مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج١)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

الدكتور رشدي راشد

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

تُرْجِمَتْ هـذِهِ الأعمـالُ ونُشِـرَتْ
بِدَعْمٍ ماليٍّ مِنْ مدينـةِ الملك عبد العزيز للعلوم والتقنيـة،
ضِمْنَ مبادرةِ الملك عبد الله لِلْمحتوى العَرَبِيّ

مدينة الملك عبدالعزيز
للعلوم والتقنية KACST

مركز دراسات الوحدة العربية

سلسلة تاريخ العلوم عند العرب (١٣ / ج١)

الرياضيات التحليلية

بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة

الجزء الأول

المؤسّسون والشارحون

بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان،
الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود

الدكتور رشدي راشد

ترجمة:

نقولا فارس، بدوي المبسوط،
منى غانم، نزيه المرعبي، محمود حكيم
«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

الفهرسة أثناء النشر - إعداد مركز دراسات الوحدة العربية

راشد، رشدي

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة / رشدي راشد؛ ترجمة نقولا فارس... [وآخ.].

٥ ج (ج ١، ٨٦٢ ص). - (سلسلة تاريخ العلوم عند العرب؛ ١٣/ج١)
محتويات: ج ١. المؤسّسون والشارحون: بنو موسى، ابن قرّة، ابن سنان، الخازن، القوهي، ابن السمح، ابن هود.
ببليوغرافية: ص ٨١١ - ٨٣٤.
يشتمل على فهرس الأسماء والمصطلحات.

ISBN 978-9953-82-373-7 (vol. 1)

ISBN 978-9953-82-372-0 (set)

١. الرياضيات عند العرب - تاريخ. ٢. أ. فارس، نقولا (مترجم). ب. العنوان. ج. السلسلة.

510.1

«الآراء الواردة في هذا الكتاب لا تعبّر بالضرورة
عن اتجاهات يتبناها مركز دراسات الوحدة العربية»

العنوان الأصلي بالفرنسية

Les Mathématiques infinitésimales
du IX^{ème} au XI^{ème} siècle
vol. 1: Fondateurs et Commentateurs
Banū Mūsā, Ibn Qarra, Ibn Sinān, al-Khāzin, al-Qūhī, Ibn Samḥ, Ibn Hūd
par Roshdi Rashed
(London: Al-Furqān Islamic Heritage Foundation, 1996)

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ - ١١٣
الحمراء - بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ - لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ - ٧٥٠٠٨٥ - ٧٥٠٠٨٦ - ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعربي» - بيروت، فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)
e-mail: info@caus.org.lb Web Site: http://www.caus.org.lb

الطبعة الأولى
بيروت، ٢٠١١

المحتويـات

تقديـــم

الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة
في سلسلة تاريخ العلوم عند العرب
ضمن مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي

يطيب لي أن أقدِّم لهذه المجلدات الخمسة في الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، التي تُترجَمُ وتُنشَرُ بالتعاون بين **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية** و**مركز دراسات الوحدة العربية**، في إطار مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

تهدف هذه المبادرة إلى إثراء المحتوى العربي عبر عدد من المشاريع التي تنفّذها مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية بالتعاون مع جهات مختلفة داخل المملكة وخارجها. ومن هذه المشاريع ما يتعلق بترجمة الكتب العلمية الهامة، بهدف تزويد القارئ العربي بعلم نافع يفيد في التوجّه نحو مجتمع المعرفة والاقتصاد القائم عليها، ومنها ما يتعلق برقمنة المحتوى العربي الموجود ورقياً وإتاحته على الشبكة العالمية، الإنترنت.

يُعَدُّ هذا العمل، الذي يستند إلى إحدى عشرة مخطوطة عربية، خطوة هامة في اكتشاف المخطوطات العربية العلمية وتحقيقها، وفي إظهار وتحليل مدرسة عربية أصيلة في الرياضيات التحليلية والهندسة ورياضيات اللامتناهيات في الصغر، مع تتبع علمائها وتطورها وإنتاجها وأصالتها.

وتبينّ هذه المجلدات بشكل جليٍّ أن الحضارة العربية الإسلامية واللغة العربية قد قادت عربة المعرفة في مجالات العلم نحو أربعة قرون، وهذا يؤكّد ما أقرّه العالِم جورج سارتون في كتابه المرجعي **مدخل في تاريخ العلم**، كما أوضحت هذه المجلدات، أن العلماء العرب والمسلمين لم يكونوا نَقَلَةً لِعِلْمِ غيرهم فقط بل أنتجوا العلوم الأصيلة، وكان منهم عباقرة كابن الهيثَم.

إن مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية سعيدة بصدور هذه المجلدات الخمسة. وأود أن أشكر المؤلف، وأشكر مركز دراسات الوحدة العربية على الجهود التي بذلها لتحقيق الجودة العالية في الترجمة والمراجعة، وعلى سرعة الإنجاز، كما أشكر زملائي في مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية الذين يتابعون تنفيذ مبادرة الملك عبد الله للمحتوى العربي.

الرياض ١٠/ ٤/ ١٤٣٢هـ
رئيس مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية
د. محمد بن إبراهيم السويل

حول الترجمة العربية لهذا الكتاب

بدأ رشدي راشد منذ أكثر من خمس عشرة سنة نشرَ أجزاء متتابعة من دراسة موسوعيّة متكاملة في «الرياضيّات التحليلية»، ترمي إلى تجميع الوثائق المتعلّقة بهندسة اللامتناهيات في الصغر، المكتوبة بالعربية، وإلى تحقيقها وشرحها وكتابة تاريخها خلال فترة ازدهارها القصوى بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة، أي بين القرن التاسع والقرن الحادي عشر للميلاد.

ومع حلول سنة ٢٠٠٦ للميلاد، وصل عدد مجلّدات هذه المجموعة القيِّمة إلى خمسة، صدرت باللغة الفرنسية، وجاءت كمساهمة أساسيّة لا غنى عنها في دراسة التراث العلمي العربي وكتابة تاريخه عبرَ تحقيق مخطوطاته ونشرها، وفي التأريخ للعلوم الريّاضيّة العربيّة وتطبيقاتها.

ولقد بلغ البحث في ميدان هندسة اللامتناهيات في الصغر، خلال الفترة التاريخيّة المذكورة، ذروته مع ابن الهيثم، بعد أن تأسَّس في القرن التاسع الميلادي مع بني موسى.

ونحن نود أن نشكر الأستاذ رشدي راشد، الذي عهد إلينا ترجمة هذا الجزء من «الرياضيات التحليلية»، وأْتَمَنَنا على هذا، وكذلك على السماح لنا بنقل الرسوم الهندسية والعديد من العبارات الرياضية من القرص الإلكتروني للنسخة الفرنسية الأصل، وعلى إمدادنا بالنصوص العربية المستشهد بها من المخطوطات والمراجع الأخرى، وعلى مراجعته لأجزاء كثيرة من الترجمة.

لقد استخدمنا في هذه الترجمة، من جهة، المصطلحات الرياضية التي كانت متداولة في ذلك العصر، وحاولنا، من جهة أخرى، قدر الإمكان انتقاء أكثر المصطلحات الرياضية الأخرى انتشاراً وتعبيراً وبعداً عن اللبس. ولقد اعتمدنا غالباً في ترجمة المصطلحات الرياضية الحديثة إلى العربية على «معجم الرياضيات

المعاصرة» (تأليف صلاح أحمد وموفَّق دعبول وإلهام حمصي، مؤسسة الرسالة للطبع والنشر والتوزيع بيروت ١٩٨٣).

ونلفت نظر القارئ الكريم إلى ضرورة قراءة الصيغ الرياضية الواردة في الكتاب من اليسار إلى اليمين، إلا في بعض الحالات التي ترد فيها الصيغة ضمن الجملة.

ونحن ندرك جيداً، كما يُدرك كلٌّ من مارس ترجمة النصوص الرياضية والعلمية إلى العربية، أنّ المسألة في هذا المضمار معقّدة، ونحن نشكر سلفاً أي نقد بنّاء في هذا الإطار.

نقولا فارس، بدوي المبسوط، منى غانم،
نزيه المرعبي، محمود حكيم
«أعضاء فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي»

تمهيـد

يتّفق مؤرّخو العلوم، بدون إشكال، على أنّ إحدى مهمّاتهم الأساسيّة هي رسم تشكّل التقاليد العلميّة. وقد تبدو هذه العمليّة سهلة، إذ غالباً ما تظهر التقاليد أمام المؤرّخين تحت أسماء وعناوين تتيح التعرّف الفوري على هذه التقاليد. ولكن ما أن ينكبّ هؤلاء على عملهم حتى يتبدّد ظاهر البساطة الخادع هذا. فالصفة الملازمة لكلّ تقليد علمي هي أنّه يتطوّر ويتنوّع ويتجدّد مع تعاقب المؤلّفين والمبدعين ومع بروز المسائل. ولا تلبث أن تبرز عقبات أخرى على هذا المسار، ويجد المؤرّخ نفسه في مواجهة المسائل التي من بينها المسألة الشهيرة الخاصة بـ «الأسلوب»؛ والمقصود هنا هو أيضاً الأسلوب العلمي الذي يميّز التقليد ويطبع هويّته، بغض النظر عن الأشكال التي يتقدّم بها هذا التقليد وعن التحوّلات التي يتعرّض لها. تكمن كل الصعوبة في عزل العلامة الفارقة التي، بالرغم من الإحساس المتواصل بوجودها، لا يسهل الإمساك بها. ولكن معرفة هذه العلامة الفارقة هي وحدها التي تتيح الرؤيةَ الصحيحة لأعمال شخصٍ ما، والتي تُمَكّنُ من فهم معناها. يُعطي هذا المسار الظاهراتيّ للتقليد دوره التنظيمي؛ فهو يستخلص ترابط الأعمال الناسجة لهذا التقليد، ويحمي المؤرّخ من اتّباع ميوله الخاصّة، كأن يتوه في البحث عن الروّاد أو أن يؤخذ بِوَهم اكتشاف ما هو جديد.

ويبدو لنا أنّ هذه المهمّة، الضروريّة بالنسبة إلى تاريخ العلوم بشكل عام، تُلبّي حاجات عاجِلة فيما يتعلّق بتاريخ الرياضيّات وتاريخ العلوم في عصر الإسلام الكلاسّيكي. تعود أسباب حالة الاستعجال هذه، إلى هشاشة البحث التاريخي في هذا الميدان وإلى نقاط الضعف في تاريخه: فالبحث في تاريخ العلوم والرياضيّات في عصر الإسلام الكلاسّيكي، معزول بسبب اللغة وهو محصور في الغالب ضمن نطاق الدراسات الشرقيّة، ويخضع لمعايير نوعيّة ما تزال

غامضة ومُشوّشة. يجب أن نضيف، إلى هذا، عائقاً آخر يعود إلى الحوادث، التي قد يتعرّض لها الموضوع، ويمنع إرجاء هذا البحث في التقاليد؛ فكيف يتم التعرّف على هذه التقاليد المتوارية خلف تنوّع الوقائع، مع غياب صانعيها الرئيسيّين أحياناً؟ لنتذكّر مثال التقليد الجبري، عندما كنّا لا نعرف عن السموأل أو عن شرف الدين الطوسي أكثر من مجرّد اسميهما؛ ولنتذكّر تاريخ نظريّة الأعداد مع غياب أعمال الخازن والفارسي. . . إلخ، أو تاريخ علم المناظر دون أعمال ابن سهل، أو علم الفلك دون فكرة واضحة عن مدرسة مراغة. ولا شكّ أنّ من الممكن دائماً، حتى في ظروف كهذه، أن نكشف تقليداً ما؛ ولكنّ الأمر يختلف عندما يكون المطلوبُ رسمَ حدود التقليد وعزل عناصره الموحِّدة وتقدير الأسباب في تحوّلاته المتوالية. فهذا الأمر يتطلّب تأمّلاً مَعرفيّاً دقيقاً ويقِظاً بشكل دائم ولو أنّ هذا التأمّل يبقى، كما ينبغي أن يكون، خفيّاً. مثل هذا التحليل فقط يتيح لنا فهم طريقة انتقال البنى المعرفيّة وتطوّرها، من زمن إلى آخر.

أتاح لنا هذا النهج، الذي وجّه أعمالنا في تاريخ الجبر وفي نظريّة الأعداد والتحليل الديوفنطي وفي علم المناظر، والذي ما زال نهجَنا في مؤلّفِنا هذا، فَتْحَ بعض المسالك في هذا المجال أو ذاك، إن لم نقل أنّه مكّننا من قَطْع أشواط على الدروب التي يجب أن نسلكها. لم نتخلَّ أبداً في هذه الأبحاث، في تاريخ الرياضيّات والعلوم في عصر الإسلام الكلاسّيكي، عن المصادرة التالية: «لا يسعنا فهم أيّ شيء عن الابتكارات الفرديّة إذا لم ندرجها ضمن التقاليد التي شهدت ولادتها»؛ ونحن كنّا، وما زلنا ندعو، إلى ضرورة القطع مع نهج الاختصار التاريخي الذي ما زال متّبَعاً في هذا المضمار. فلم يعد يكفي الاتّكال على الأبحاث العشوائيّة وعلى قطف زهرة من كلِّ بستان.

نهدف في هذا الكتاب، إلى رسم التقليد البحثي في «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر»؛ ونحن نطمح، هذه المرّة، إلى استكشاف كلّ الطرق فيه، أو إلى استكشاف الطريق المركزيّة فيه على الأقلّ. يرتكز أملنا هذا، بدون شك، على طبيعة حقل هذه الدراسة، كما يرتكز أيضاً على جهود من سبقونا في هذه الدراسة. تتعلّق دراستنا بعدد محدود من المؤلّفات التي وصل القسم

الأكبر منها إلينا، والتي يعود تأليفها إلى الفترة الواقعة بين النصف الثاني من القرن التاسع ـ وبشكلٍ خاص مع بني موسى ـ والنصف الأوّل من القرن الحادي عشر، حيث توقّفت بوضوح مع ابن الهيثم. لقد جذبت هذه المادّة، من جهة أخرى، مؤرّخي الرياضيّات الذين تركوا لنا بعض الأعمال، التمهيديّة والمؤقّتة، إنّما الثمينة أيضاً بدون أدنى شك: نذكر في هذا المجال، بشكل خاصّ، الترجمات إلى الألمانيّة التي قام بها هـ. سوتر (*H. Suter*).

ما هو المعنى الذي تغطّيه عبارة «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» هذه التي نستخدمها؟ لا يتعلّق سؤالنا هذا بالبلاغة الكلاميّة فحسب. فهذه الصيغة التي تبنّيناها ليست مأخوذة من أيّ لفظٍ من ألفاظ الرياضيّات العربيّة في العصر الكلاسّيكي. ويمكن لهذه العبارة، بسبب غياب المراجع، أن تؤدّي إلى تضليل في المعنى: فبين «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» وَ«حساب اللامتناهيات في الصغر» لا يوجد سوى خطوة سرعان ما تُقطع، رغم الهوّة الفاصلة. وإذا أردنا توضيح هذه المسألة بدقّة، علينا تحليلها مع تمييز عنصرين فيها. العنصر الأوّل عامّ، وهو غياب اسم هذه المادّة العلميّة: فهل نستطيع أن نُدخل مادّة، في تاريخ علمٍ ما، قبل أن يُعتمَدَ اسمٌ لهذه المادّة؟ تلك هي المسألة التاريخيّة والمعرفيّة المطروحة التي تتعلّق بوضع العلم الناتج وباستقلاليّته. ومن جهة أخرى، إذا ما ابتكرنا اسماً، فإنّنا في هذه الحالة على الأقل، نُعَبِّر عن الحاجة الجديدة لتمييز هذه المادّة العلميّة من كلّ ما عداها. ولكن، لا خلاف أنّ غياب الاسم لا يعني عدم وجود الشيء: فمن الذي يستطيع اليوم أن ينكر، مثلاً، وجود بحث منظّم في التحليل التوافيقي قبل ابتكار عنوان هذا العلم، أو وجود إسهاماتٍ في الهندسة الجبريّة الأوّليّة قبل صياغة هذه التسمية، أو وجود دراساتٍ في التحليل الديوفنطي قبل أن يُعطى اسم عالم الرياضيّات الإسكندراني المذكور لهذا النشاط الرياضي؟ تعود مسألتنا بالتحديد، في هذه الحالة، إلى معرفة طبيعة «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر» هذه، وإلى معرفة تنظيمها وتماسكها ووحدتها، والروابط التي تجمع بين مختلف الفصول التي تتشكّل منها، وباختصار، إلى معرفة مدى المسافة التي تفصلها عن «حساب اللامتناهيات في الصغر». عند ذلك نستطيع، على ما نعتقد، فهمَ مصادر

«حساب اللامتناهيات في الصغر» بشكل أفضل، وإدراكَ «بداياته» الحقيقيّة.

إنّ أوّل ما يطمح إليه هذا الكتاب هو استرجاع هذا التقليد في «رياضيّات اللامتناهيات في الصغر»، قبل القيام بتفحُّص هذا التفاوت بين تاريخ حساب اللامتناهيات في الصغر وبين ما قبل تاريخه. نبدأ إذاً بتحقيق، وشرح كلِّ الكتابات التي وصلت إلينا حول قياس مساحات السطوح والمجسّمات المنحنية (الهلاليّات، والدوائر، والقطوع المكافئة، والقطوع الناقصة، والأكَر، والأسطوانات، والمجسّمات المكافئة) وحول تحديد القِيم القصوى لمساحات السطوح والمجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية. لقد قرَّرنا أن نقصر دراستنا على هذه الكتابات لأنّها تترابط منطقيّاً في وَحْدة تدريجيّة؛ ولقد حصل هذا الترابط بفضل التصويبات والابتكارات المتتالية وليس بالرغم عنها. فكلّ واحد من الرياضيّين الذين قاموا بإسهام في هذا الميدان، دون استثناء، استعاد كتابات أسلافه ليحسّن البراهين الواردة فيها وليتصوَّر امتدادات جديدة لها. أليست هذه الصفة ملازمة لأيّ تقليدٍ حي؟ لم نستبعد كتابات أخرى عن هذه المجموعة الرياضيّة، لسبب ظرفيّ، بل إنَّ سبب ذلك هو أنَّ هذه الكتابات الأخرى، بالرغم من صلات القربى التي تربط بينها وبين هذه المؤلّفات في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، لم تكن بعدُ منتمية عضويّاً إلى هذا التقليد. نقصد بالكتابات الأخرى، الأعمالَ في علم الفلك وميكانيكا السكون والتحليل العددي، حيث تدخل اعتبارات في اللامتناهيات في الصغر. فإذا حصل أن استعدنا هنا إحدى تلك الكتابات، فلتنوير القارئ أو لإرساء أسس الكتابة التاريخيّة. وإذا وردت تلك الكتابات في التعليقات الإضافيّة أو الملاحق، فليس لأنّها مجرّد إضافات إلى تاريخ رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، بل لأنّها متمِّمة لها، وذلك حتّى لو أنّها تستحق أن يُفرَدَ لها مجلّدٌ شبيه بمجلّدات كتابنا هذا.

المجلّد الأوّل من مؤلّفنا هذا نكُرِّسُه للبحث في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، منذ بداية تكوُّنه وحتى عشيّة إنجاز هذه التكوُّن: أي للمؤسّسين. يحتوي إذن هذا المجلّد تحقيقاً وشَرحاً للنصوص المكتوبة بين النصف الثاني من القرن التاسع ونهاية القرن العاشر؛ وهي نصوص تعود إلى بني موسى ولثابت

بن قرّة وللخازن ولإبراهيم بن سنان وللقوهي ولابن السمح. ولا بدّ أن نعبّر عن الأسف للفقدان، المؤقّت أو النهائيّ، لأعمال الماهاني وابن سهل ولآخرين غيرهما. وقد رأينا من المناسب أن نضمَّ إلى هذا المجلّد فصلاً عن ابن هود وهو خَلَفٌ لابن الهيثم وشارح له ولابن سنان.

لقد قدَّمنا في المجلّد الثاني تحقيقاً وشَرحاً لأعمال المؤلّف الذي أتمَّ هذا التقليد ووضع نهاية له، وهو ابن الهيثم.

بعد ابن الهيثم، توقّف البحث المجدِّد في هذا المضمار. وهكذا نرى أنَّ تاريخ التحليل الرياضي يعيد نفسه، بعد أرشميدس بأحد عشر قرناً، وفي سياقين رياضيَّين وثقافيَّين مختلفَين. فقد أصيبت محاولتان، للبحث في هذا الميدان، بتوقّف فجائي بعد أن عرفتا نجاحاً واسعاً. يُشكّل هذان التوقّفان الفجائيّان ظاهرةً جديرة باهتمام مؤرّخي التحليل الرياضي؛ كما أنَّ هذه الظاهرة ذاتُ قيمة كبرى بالنسبة إلى الباحث في عِلم المعرفة. وستكون هذه الظاهرة موضوعَ دراستنا في المجلّد الثاني، إذ نكون قد أنهينا المقدّمات الضروريّة وعمليّات العودة إلى الوراء اللازمة لإعادة رسم التقليد الأرشميدي.

ولقد تبيّن لنا، خلال كتابتنا للمجلّد الأخير المذكور، أنّه من الضروري، إذا أردنا فهمَ أبحاث ابن الهيثم في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر ومعرفة التجديدات التي أدخلها في التقليد الأرشميدي، أن نقوم بتحقيق إسهامه في تقليد أبلونيوس ونحلّله. وهكذا تأخذ أبحاثُ ابن الهيثم في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر مكانَها ضمن مجموع كتاباته. فكان لا بدّ لنا من إعداد مجلّدٍ ثالثٍ نُكَرِّس معظمَه، لأبحاث ابن الهيثم في المخروطات وفي تطبيقاتها. سويّة، فإذا أضفنا هذين المجلّدين إلى كتابات ابن الهيثم التي سبق أن نشرناها («المعلومات» و«التحليل والتركيب»)، نحصل لأوّل مرّة على جملة الأعمال الرياضية لابن الهيثم (باستثناء شروحه لأقليدس).

كانت بعضُ النصوص التي حقّقناها وشرحناها في هذه المجلّدات، تُعتَبَر مفقودةً قبل أن نعثر عليها وننشرَها؛ وكان بعضها الآخر ضحيّة التباس وسوء فهمٍ، عملنا على تبديدهما. إنَّ القسم الأعظم من هذه النصوص لم يكن قد

حُقّق من قبْل؛ أمّا النصوص القليلة التي سبق أن حُقّقت، فإن تحقيقها لم يحصل بطريقة نقديّة، باستثناء نصّ واحد منها فقط.

ولقد شرحنا عدّة مرّات، في أعمال سابقة، الطريقة التي نَتّبِعها في تحقيق النصوص. أمّا قائمة المراجع المذكورة في هذا المجلّد، فهي ليست كاملة، لأنّنا تعمَّدنا انتقاءها من بين المراجع الموجودة لدينا. لذلك نأمل أن يُفهَمَ غياب بعض المراجع عن هذه اللائحة على أنّه مقصود وليس نتيجة لجهلنا بها. ونتمنّى أخيراً أن يجد العلماء والباحثون بعض النفع في هذا العمل، وأن يصفحوا عمّا ورد فيه من أخطاء. يكفينا أنّنا قد بذلنا فيه قدر مستطاعنا. . .

ولا بدّ لي هنا من شكر الأستاذ كريستيان هوزيل (*Christian Houzel*) لقبوله قراءة هذا الكتاب وفقاً للقواعد المتّبعة في هذه المجموعة من المجلّدات، وهي المهمّة التي أدّاها بكلّ معرفته وسعة اطّلاعه. والشكر الحار للأستاذ فيليب أبغرال (*Philippe Abgrall*) وللسيّدة زوجته، وللأساتذة مارون عوّاد، وهيلين بلّوستا (*Hélène Bellosta*)، وباسكال كروزيه (*Pascal Crozet*) وريجيس مورلون (*Régis Morelon*) لإعادة قراءتهم لهذا الجزء أو ذاك من مخطوطة هذا الكتاب. وأتوجّه بشكري أيضاً للسيّدة ألين أوجيه (*Aline Auger*)، مهندسة الدراسات في المركز الوطني الفرنسي للبحث العلمي، لتعاونها المُخلِص والفعّال، طوال فترة التحضير الصعب للنسخة الفرنسية لهذه المجلّدات، بما فيه إنجاز الفهارس.

رشدي راشد
مدير أبحاث في المركز الوطني للبحث العلمي ـ باريس.
أستاذ في جامعة طوكيو، قسم تاريخ العلوم وفلسفتها ـ طوكيو.

تنبيـــه

لكي لا نعيد رسم الشكل الهندسي نفسه مرّتين، غالباً ما نُحيل، في المقدّمات وفي التعليقات الإضافيّة، إلى الأشكال الهندسيّة الموجودة في النصوص المحقّقة.

ولقد أضفنا بعض الأشكال الهندسيّة في النصوص، لتسهيل الفهم. ونحن نلفت النظر إليها في كلٍّ مرّة.

نرمز إلى المخطوطات بأحرف. وقد شرحنا هذا الترميز في قائمة المراجع.

< > هذان القوسان يعزلان، في النص العربي، ما قد أضفناه لسدٍّ ثغرة في المخطوطة.

[] يُستخدَم هذان القوسان في النصّ العربي فحسب، وذلك للدلالة على ضرورة حذف الكلمة أو المقطع المعزولَين، من أجل تماسك النصّ.

/ تدلّ هذه الإشارة على نهاية ورقة المخطوطة.

الفصل الأوّل

بنو موسى وحساب حجم الكرة وحجم الأسطوانة

١ـ ١ مقدّمة

١ـ١ـ ١ بنو موسى: أعيان وعلماء

يُعرَّف الإخوة الثلاثة محمّد وأحمد والحسن، أبناء موسى بن شاكر، معاً في أغلب الأحيان، باسم والدهم. وتحمل المقالات التي كرّسها لهم المفهرسون القدامى العنوان: "بنو موسى"[١]. وما فتئ المفهرسون المحدثون يتّبعون أقرانهم القدامى، بل يقومون بمجرّد النسخ عنهم[٢]. وقد امتد هذا التقليد، بشكل أو بآخر، إلى اللاتينيّة؛ وذلك أنَّ جيرارد دو كريمون (*Gérard de Crémone*)، على سبيل المثال، يذكرهم على الشكل الآتي: "*Filii Sekir, i. e. Maumeti, Hameti, Hasen*"[٣]. ولا بد من الاعتراف بأنّ هذه الطريقة، في ذِكر حياة بني موسى، لم تمنع كتّاب سِيَرهم من الفصل فيما بينهم، ومن ذكر أحدَهم، هنا أو هناك، دون ذِكر الآخَرَيْن. فضلاً عن ذلك، لم يتوانَ كتّاب السِّيَر هؤلاء عن الإشارة إلى بعض الفروق الفرديّة، ذات الأهميّة الكبرى بالنسبة إلينا. نذكر من هذه الفروق اهتمام محمّد بعلم الفلك والرياضيّات، وإبداع أحمد في ميدان الميكانيكا، وأخيراً، عبقريّة الحسن في علم الهندسة[٤]. ولقد نسب كُتّاب السِيَر أحياناً إلى أحد الإخوة، بمفرده، كتاباتٍ تحمل أسماء بني موسى الثلاثة[٥].

---

[١] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدّد (طهران، ١٩٧١)، الصفحتان ٣٣٠-٣٣١؛ القفطي، "تأريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبّرت (*Julius Lippert*) (لايبزغ (*Leipzig*)، ١٩٠٣)، الصفحات ٣١٥-٣١٦ و ٤٤١-٤٤٣؛ ابن أبي أصيبعة "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، تحقيق أ. مولّر (*A. Müller*)، ٣ مجلّدات (القاهرة/كونيغسبرغ (*Königsberg*)، ١٨٨٢-٨٤)، المجلّد الأوّل، الصفحات: ١٨٧، ٩-١٢ و٢٠٧، ٢٢ و٢٠٨، ١٧؛ تحقيق ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥)، الصفحات: ٢٦٠، ١١-١٣ و٢٨٦، ١٩ و٢٨٧، ١٥. إلاّ أنّ ابن أبي أصيبعة يتكلم على "بني شاكر".

[٢] انظر: ك. بروكلمان: (*C. Brockelmann*)، *Geschichte der arabischen Litteratur*، الطبعة الثانية، I (لايدن (Leiden)، ١٩٤٣)، الصفحة ٢١٦؛ هـ. سوتر (H. Suter)، *Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke* (لايبزيغ Leipzig، ١٩٠٠)، الصفحتان ٢٠-٢١؛ ف. سيزكين (F. Sezgin)، *Geschichte des arabischen Schrifttums*، V (لايدن Leiden، ١٩٤٢)، الصفحات ٢٤٦-٢٥٢؛ م. ستاينشنايدر (M. Steinschneider)، "Die Söhne des Musa ben Schakir"، *Bibliotheca Mathematica*، 1 (١٨٨٧)، الصفحات ٤٤-٤٨، ٧١-٧٦؛ ج. الدبّاغ، "بنو موسى (Banū Mūsā)"، *Dictionary of Scientific Biography*، المجلّد الأوّل (نيويورك، ١٩٧٠)، الصفحات ٤٤٣-٤٤٦؛ المقدّمة العربيّة لأحمد يوسف الحسن لتحقيق "كتاب الحيل" لبني موسى (حلب، ١٩٨١)، الصفحات ١٨-٣٠.

[٣] انظر: م. كلاجيت (M. Clagett)، *Archimedes in the Middle Ages*، المجلّد الأوّل (ماديسون (*Madison*)، ١٩٦٤)، الصفحة ٢٣٨.

[٤] في حالة الحسن، على سبيل المثال، يشهد أخواه على قدرته في الهندسة – انظر بداية الفقرة التالية (١-١-٢). ويورد المفهرسون رواية صحّتها غير مؤكّدة، لكنّ من حسناتها أنّها تنقل صدىً ممّا كان يتردّد، في ذلك العصر، عن عبقريّة الحسن في الهندسة. فهو،=

يُجمِع المفهرسون والمؤرّخون في تأكيدهم أهميّة الأعمال العلميّة لبني موسى وعلى أهمّيّة إسهامهم العلمي في ذلك العصر[٦]؛ ويبدو أنّهم يتّفقون على تفوّق الأخ الأكبر محمّد في المجال السياسي، حيث كان دورُ الأخوين الآخرَيْن ضعيفاً جدّاً.

لم نُذكّر بهذه الجوانب لأجل قيمتها الرِوائيّة، بل لأنّها تُظهِر أنّ الأخوة الثلاثة كانوا يعملون بشكل واضح كفريق. ولم تستبعد الأعمالُ الجماعيّة في هذا الفريق الكتاباتِ الفرديّة. وإذا نظرنا إلى هذا الأمر عن قرب، نلاحظ أنّ الأخوة الثلاثة لم يشكّلوا فقط ما قد يسمّيه البعض بلغة عصرنا "فريقاً في البحث"، بل إنَّ هذا الفريق شكّل بالفعل نواة متماسكة لمدرسة في البحث العلميّ. بالإضافة إلى ذلك، لم يكن هذا "الفريق" يحصر عمله في البحث العلمي، بل كان يتدخّل أيضاً في السياسة العلميّة وفي السياسة بمعناها العام. وكان هذا الفريق أيضاً في تنافس مع فرقٍ أخرى كفريق الكِندي، الذي كان أقلّ تماسكاً، كما يبدو. كلُّ هذه الوقائع، التي فرضت نفسها علينا عند دراستنا للشهادات المتعلّقة ببني موسى والكندي وبعصرهم بشكلٍ عام، تُجيز لنا طرحَ هذا السؤال الجديد: ماذا يمثّل بدقّة هذا النوع من التكوُّن، لهذا النوع من "الفِرَق" في القرن التاسع؟

لن نكتفي، للإجابة عن هذا السؤال، بمجرّد ردّ الأمر إلى التفاهم العفوي، أي التواطؤ، بين الأخوة. وذلك أنّ سيرة حياة جان وجاك برنولّي (*Jean et Jacques Bernoulli*)، اللذين عاشا لاحقاً، قدّمت لنا مثالاً مضادّاً ساطعاً، ينقض ذلك. ولا يُمكن، من جهة أخرى، فهمُ هذا الفريق بدون أن نأخذ بعين الاعتبار المدرسة التي كان ينشّطها ويمثّل نواتها. فقد عرف الإخوة الثلاثة كيف يرتبطون مع أفضل

= وفقاً لتلك الرواية، لم يقرأ سوى المقالات الستّ الأولى من "أصول" أقليدس لأنّه توصّل وحدَه إلى النتائج الواردة في المقالات السبع الباقية. وقد لامه الخليفة المأمون شخصيّاً على عدم إنجازه لقراءة كتاب أساسي إلى هذا الحدّ، حتى وإن لم يكن بحاجة إلى ذلك (القفطي، "تأريخ الحكماء"، ص. ٤٤٣).

حول أهميّة إسهام محمّد في علم الفلك، انظر ج. صليبا:

G. Saliba, "Early Arabic critique of Ptolemaic cosmology "*Journal for the History of Astronomy*, 25 (1994): 115-141.

[٥] على سبيل المثال، ينسب النديم إلى أحمد لوحده تأليف "كتاب الحيل"؛ وينسب إلى الحسن كتاب في "الشكل المدَوَّر المستطيل"، وهذه النسبة أكّدها ثابت بن قرّة في بداية مؤلّفه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"؛ وينسب عدّة مؤلّفات إلى محمّد وحدَه.

[٦] على سبيل المثال، النديم، "الفهرست"، الصفحتان ٣٠٤ و٣٣١؛ ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، المجلّد الأوّل، الصفحات ١٨٧، ٩-١٢؛ ٢٠٥، ٢٩-٣١؛ ٢١٥، ٢٩-٣١؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٦٠، ١١-١٣؛ ٢٨٣، ٩-١١؛ ٢٩٥، ٩-١١.

المترجمين كحُنَيْن بن إسحاق وهلال بن هلال الحمصي، على سبيل المثال[٧]؛ كما استطاعوا استمالة معاونين لهم من مرتبة ثابت بن قرّة[٨]. وكانت هذه المدرسة تعمل على ترجمة الإرث اليوناني، بقدر ما كانت تعمل في البحث المجدِّد؛ ولقد ترافق هذان النشاطان، بحيث لا يمكن فهم أحدهما بدون الآخر، كما أكّدنا ذلك أكثر من مرّة[٩]. وأخيراً، اهتمّ بنو موسى، أيضاً، بإنشاء المؤسّسات العلميّة؛ فقد كانوا على علاقة مع "بيت الحكمة" الشهير في بغداد، وشاركوا في حسابات الأرصاد الفلكيّة، وكذلك في أعمال الهندسة المائيّة. كان هذا الانخراط لبني موسى في الحياة العلميّة والثقافيّة متزامناً مع مشاركتهم في الحياة السياسيّة (على الأقل بالنسبة إلى محمّد) والإداريّة (بالنسبة إلى هذا الأخير وإلى أحمد). نحن إذن أمام الكثير من الوقائع التي حصلت في النصف الأوّل من القرن التاسع للميلاد، ضمن دوائر السلطة والمعرفة في بغداد التي كانت مركزاً لإمبراطوريّة شاسعة تتربّع على قمّة المجد في ذلك العصر. ولا شكّ بأنّ الكلام حول ما كان يُدَبَّر في هذه الدوائر من مشاريع ورهانات يتطلّب تأليف كتابٍ كامل؛ وإنّ بحثاً كهذا، يستحق الخوض فيه، لا سيّما وأنّ حالة بني موسى ليست قطعاً حالة منفردة.

تسمح هذه الصورة التي نرسمها هنا بخطوط عريضة للغاية، بفهم الظروف المحيطة بعمل بني موسى؛ فهي توضح روايات المفهرسين القدامى، وتوحي بالمحاولة الأولى للقيام بدراسةٍ نقديّة للشهادات المنقولة بشأنهم. فبذلك ندرك لماذا تتواجد ، في كتاب واحد (هو تحديداً الكتاب الذي نتناوله هنا)، مسائلُ هندسيّة مع تركيبات آليّة جديدة؛ ونرى أيضاً كيف كان من الممكن أن يتابع أحد الإخوة – أحمد

[٧] كتب النديم في "الفهرست"، ص. ٣٢٦، بصدد هلال بن هلال الحمصي: "وترجم الأربع المقالات الأولة بين يدي أحمد بن موسى". هذه الواقعة تؤيّدها مخطوطات الترجمة. ذلك أنّ عبارة النديم مأخوذة عمليّاً من مقدّمة ترجمة "المخروطات" لأبلونيوس، حيث نقرأ أنَّ هلال بن هلال الحمصي قد كُلّف بترجمة المقالات الأربع الأولى بحضور أحمد بن موسى، انظر "المخروطات"، مخطوطة طهران، ملّي ملك ٨٦٧، الورقة ٣و. انظر:
R. Rashed, *Apollonius*: *Les Coniques,* tome 1.1: *Livre I*, Berlin, New York, 2008, p. 507, 12-14.

[٨] انظر الفصل اللاحق.

[٩] انظر مقال ر. راشد،
R. Rashed, "Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic: examples from mathematics and optics", *History of Science*, 27, (1989), pp. 199-209
الذي أعيد نشره في
Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe، Variorum CS388 (Aldershot, 1992), I.

_ بحثاً بدأ بـه أخ آخر _ الحسن؛ ونفهم أخيراً روايـة سيرتـهم، غير المؤكّدة برأينـا، والتي يتم تناقُلها حاليّاً، بدون دراسة حقيقيّة.

لقد كان الوسطُ الطليعيُّ والسياسيُّ الصاخبُ الذي كـان يتحرُّك فيـه هؤلاء العلمـاء، حقلاً من أخصب الحقول لنسج الروايات والأساطير. فبعد أن وقع بنو موسى ضحايا للمفهرسين ذوي المخيّلة الجامحة، أضحوا أبطـال روايـة خياليّة. وقد سبق أن بيّنـّا أكثر من مرّة أنّ جموح الخيـال كـان نزعة عند المفهرس القديم، القفطي[١٠]، وهو مصدرنا الأساسي عن بني موسى. فقد كان القِفطيّ يحبّ تزيين رواياته لجذب قارئـه، إن لم يكن لتسليته. ويروي القفطي أنّ والد بنـي موسى[١١]، أي موسى بن شاكر، لم يكن "من أهلِ العلم والأدب، بل كـان فـي حداثتـه حراميّـاً،...، ثمَّ يخرج فيقطع الطريق على فراسخ كثيرة من طريق خراسان". وسنرى أنّ اختيار هذه المنطقة ليس عَرَضيّاً بتاتاً في بقيّة الرواية. ولم يبخل القفطي، من ناحية أخرى، في إعطاء تفاصيل عن مَكر موسى بن شاكر، وعن الوسائل التـي كـان يستخدمها لخداع النـاس. فيصف لنـا، من ضمن أشياء أخرى، زَيَّ موسى وحصانه ...، وكل ذلك بعد ثلاثة قرون ونصف القرن من حصول الحدث[١٢]. تثير هذه التفاصيل الشكوكَ حول روايـة القفطي، أو على الأقل، حول مصادره.

ويأتي اختيار خراسان مناسباً لتأمين تتمّة الرواية، وذلك عند الحديث عن علاقة قاطع الطرق مع الشخص الذي سيصبح لاحقاً الخليفة المأمون. وكـان الخليفـة هـارون الرشيد قد جعل المأمون والياً على هذه المنطقة حيث عاش فيهـا، قبل أن يطيح بأخيه الأمين ويصبح الخليفة العبّاسي السابع. وتتوالى رواية القفطي وتنتهي كقصّـة حقيقيّـة: يتوب قـاطع الطرق، ويصبح رفيقاً للخليفة اللاحق، ثمّ يموت فـي اللحظـة الملائمـة (يبقى تاريخ وفاته غير واضح) بعد أن يعهد بأولاده الثلاثة إلى الخليفة. وضعت هذه الوفاة، التي حدثت في الوقت المناسب، الأخوة الثلاثة على الطريق الملكي، إذ بدؤوا

---

١٠ انظر المجلد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣١-٣٦؛ وكذلك "العمل الجبري للخيّام" (حلب، ١٩٧٩)، الصفحتان ١٣-١٤ من المقدّمة العربيّة.

١١ القفطي، "تأريخ الحكماء"، الصفحات ٤٤١-٤٤٣.

١٢ المرجع السابق. هذه الرواية غالباً ما يتناولها المؤرّخون القدامى والمحدثون. لنذكّر بمثال واحد: ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالِحاني، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ طُبع مجدّداً سنة ١٩٥٨، الصفحتان ١٥٢-١٥٣.

حياتهم في حماية الوصي عليهم، الخليفة نفسه، ثمّ أصبحوا، بطلب منه، في عهدة إسحاق بن إبراهيم المُصعَبي، الذي كان حاكم بغداد لفترة من الزمن؛ أدخلهم المُصعَبيُّ، الذي أصبح مربّيَهم، إلى "بيت الحكمة" برعاية عالم الفلك الشهير يحيى بن أبي منصور [الذي توفِّيَ في عام ٢١٧ هـ/٨٣٢ م].

هذه هي رواية القفطي. إنّها القصّة التي سيقتبسها من بعده ابن العبري، ثمّ جميع الآخرين بدون كللٍ، منذ ذلك الحين وحتى أيّامنا هذه. وحتى الساعة لا نعرف أيَّ مصدر مستقل عن رواية القفطي، يؤكّد لنا هذه الرواية بأكملها أو بقسم منها. بل على العكس من ذلك، يأتي التناقض من القفطي نفسه، الذي يقدِّم، في مكان آخر من كتابه، صورة لموسى بن شاكر قليلاً ما تتطابق مع تلك التي قدّمها سابقاً، فهو يُظهِره هذه المرّة كشخص ينتسب إلى الفئة الأكثر تقدّماً من الرياضيّين وعلماء الفلك[١٣]!

ونظراً إلى غياب أيّ مصدر آخر يؤكّدها، لا يمكننا إلا أن نستبعد رواية القفطي هذه، التي أضيفت، على كلِّ حال، في نهاية كتابه[١٤]. ولكن سيرة بني موسى تصبح، عندئذ، باهتة وهزيلة. فلا يبقى سوى القليل للغاية من الوقائع التي تسمح بإغناء سيرتهم المبعثرة في الحوليّات وكتب السِّيَر الأخرى. يظهر محمّد وأحمد، في كتاب الطبري "تاريخ الرسل والملوك"[١٥]، في غمرة الأحداث، ضمن حاشية عدد من الخلفاء المتعاقبين. ونرى كلاً من هذين الأخوين، بين الأشخاص الأثرياء، في عداد مستشاري الخلفاء، أو المسؤولين عن الأعمال الكبرى في الهندسة المدنيّة. وكان اسم كلٍّ من محمّد وأحمد، في عام ٢٤٥ هـ/٨٥٩ م، على قائمة كبار الأغنياء الذين كان عليهم أن يقدّموا للخليفة المتوكّل[١٦]، الأموالَ الضروريّة لبناء مدينته الجديدة، "الجعفريّة"[١٧]. وكانت هذه القائمة تضم حوالى عشرين اسماً لشخصيّات، من بينها بعض الوزراء المشهورين مثل ابن فرّوخانشاه وابن مُخْلَد. وكان محمّد بن موسى،

[١٣] نعرض ما كتبه القفطي بدون أن يلاحظ التناقض الفاضح مع ما أكّده سابقاً: "متقدِّم في علم الهندسة، هو [موسى بن شاكر] وبنوه محمّد بن موسى وأحمد أخوه والحسن أخوهما وكانوا جميعاً متقدِّمين في النوع الرياضيّ وهيئة الأفلاك وحركات النجوم. وكان موسى ابن شاكر هذا، مشهوراً في منجِّمي المأمون وكان بنوه الثلاثة أبصَر الناس بالهندسة وعلم الحيَل"، "تأريخ الحكماء"، الصفحة ٣١٥. تتناقض صورة ابن شاكر هذه والتواريخُ المعطاة هنا مع كلِّ نقطة من نقاط الرواية الأخرى.

[١٤] يتعلّق الأمر بالمقالة ما قبل الأخيرة.

[١٥] "تاريخ الرسل والملوك"، تحقيق محمّد أبو الفضل إبراهيم (القاهرة، ١٩٦٧)، المجلّد التاسع، الصفحة ٤١٣.

[١٦] المرجع السابق، الصفحة ٢١٥.

[١٧] المرجع السابق، الصفحة ٢١٦.

بعد ثلاث سنوات ــ في العام ٢٤٨ هـ/٨٦٢ م ــ، حاضراً للإصغاء إلى الخليفة المنتصر[١٨] وهو يروي حُلُمه. وفي عام ٢٥١ هـ/٨٦٥-٨٦٦ م، كان محمّد نفسه مكلّفاً من قائد جيش الخليفة، المستعين، بمهمّة استعلاميّة تهدف إلى تقدير قوّات العدو[١٩]. وفي ذلك العام نفسه أيضاً، كان محمّد بن موسى في عداد الوفد المفاوض في مسألة تَنَحّي الخليفة[٢٠].

يبيِّن سياقُ ومضمونُ شهادات الطبري هذه، صحّة هذه الشهادات، كما يؤكّدها مؤرّخون آخرون: فالمسعودي[٢١] يشير إلى علاقات بني موسى مع الخليفة الواثق [٨٤٢-٨٤٧ م]، التي يذكّر بها أيضاً ابن خُرداذبه[٢٢]. وينقل ابن أبي أصيبعة، بدوره، قصّة غالباً ما تروى، وفيها أنّ بني موسى استغلّوا موقعهم في بلاط الخليفة المتوكّل لتدبير الدسائس ضد زميلهم الكِنْدي[٢٣]. وتتّفق جميع هذه الروايات على أنّ الأخوين محمّداً وأحمدَ كانا يتمتّعان بمنزلة جيّدة في بلاط الخلفاء العبّاسيّين ابتداءً من المتوكّل (٨٤٧ م) ووصولاً إلى المستعين (٨٦٦ م) على الأقل، أي قبل وفاة محمّد في عام ٨٧٣ م، وفق النديم. ويؤكّد أحمد بن موسى بنفسه مباشرةً هذا الوضع المُمَيّز، فيروي أنّه أرسِل إلى دمشق كمدير لديوان البريد[٢٤].

هذه المنزلة الرفيعة التي كان يتمتّع بها بنو موسى، هي التي تزيد من احتمال صحَّة شهادات أخرى قدّمها النديم: فالإخوة بنو موسى أنفسهم موّلوا مهمّات للبحث عن مخطوطات يونانيّة في بقيّة أرجاء الإمبراطوريّة البيزنطيّة[٢٥]، واستمالوا مترجِمين أجزلوا لهم العطاء. ويؤكّد ابن أبي أصيبعة أقوال ابن النديم، ويذكر، في

---

[١٨] المرجع نفسه، الصفحة ٢٥٣.

[١٩] المرجع نفسه، الصفحة ٢٩٢.

[٢٠] المرجع نفسه، الصفحة ٣٤٤.

[٢١] "التنبيه والإشراف"، تحقيق م. ج. دو جوج
Al- Tanbīh wa al-ishrāf, éd. M.J. de Goeje, Biblliotheca Geographorum Arabicorum VIII (Leiden, 1894), p. 116.

[٢٢] "المسالك والممالك"، تحقيق م. ج. دو جوج
Al-Masālik wa al-mawālik, éd. M.J. de Goeje, Biblliotheca Geographorum Arabicorum VI (Leiden, 1889),
أعادت طباعته مكتبة "المثنّى" في بغداد، بدون تاريخ، ص. ١٠٦.

[٢٣] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٢-٢٠٨، ١٧؛ نشر رضا، ص. ٢٨٦، ٩-٢٨٧، ١٥.

[٢٤] في مؤلّف بني موسى ذي العنوان "مقدّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقات ٢٢٣ظ-٢٢٦ظ، نقرأ: "ثم تهيأ لأحمد بن موسى الشخوص إلى الشام والياً لبريدها".

[٢٥] انظر: النديم، "الفهرست"، الصفحتان ٣٣٠-٣٣١.

عداد هؤلاء المترجمين، إسحاق بن حنين شخصيّاً وحُبيش وثابت بن قرّة الذي كان يتلقّى أجراً منتظماً من بني موسى.

وتُصَوِّر مصادرُ أخرى جديرة بالثقة، بني موسى كعلماء اهتمّوا بأعمالٍ في الرصد الفلكي والهندسة المدنيّة. فقد أورد ابن خلّكان[٢٦] بدقّة أنّهم قاموا، بطلبٍ شخصيّ من المأمون، بالتثبّت من طول محيط الأرض[٢٧]. واستنتج المؤرّخ وعالم الفلك ك. نلّينو (C. Nallino)[٢٨]، من أقوال ابن خلّكان، بعد أن أخذ بعين الاعتبار أعمارَ الإخوة الثلاثة وما نعرفه عن هذا الحدث العلمي المهمّ، أنّ بني موسى استطاعوا المشاركة فيه كمساعدين لعلماء الفلك في ذلك العصر، ولكن ليس بصفتهم مسؤولين عن التجربة. أمّا بالنسبة إلى الأعمال الكبرى في الهندسة المدنيّة، فيذكر الطبري القناة التي حُفِرت تحت إشرافهم؛ ولقد تكلّم ابن أبي أصيبعة[٢٩] على هذا المشروع المائي.

وهكذا شكّل هؤلاء الإخوة الثلاثة، الأثرياء والمقرَّبون من السلطة، فريقاً متماسكاً من الباحثين الطليعيّين في العلوم الرياضيّة وفي الرياضيّات التطبيقيّة، أيضاً، بالمعنى المتعارف عليه في عصرهم، أيْ في الهندسة المائيّة خاصّة والهندسة الميكانيكية؛ كما كانوا ناشطين في الحركة العلميّة لذلك العصر، وشكّلوا نواة لمدرسة علميّة ضمّت إليها ثابت بن قرّة وعلماءَ آخرين. هكذا يظهر لنا بنو موسى الذين سنقوم هنا بدراسة أعمالهم الريّاضيّة.

١-١-٢ أعمال بني موسى الرياضيّة

يقدّم المفهرسون القدامى، وبشكل خاصّ النديم والقِفطي، قائمتين لعناوين كتابات بني موسى في الميكانيكا وعلم الفلك والموسيقى والأرصاد الجويّة والرياضيّات.

---

[٢٦] انظر: "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عبّاس، المجلّد الخامس (بيروت، ١٩٧٧)، ص. ١٦١-١٦٢.

[٢٧] انظر: البيروني، "الآثار الباقية عن القرون الخالية"، تحقيق ك. إ. ساشو (C.E. Sachau) تحت عنوان *Chronologie Orientalischer Völker* (لايبزيغ (Leipzig)، ١٩٢٣)، الصفحة ١٥١؛ كذلك البيروني، "كتاب تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) ومراجعة إمام إبراهيم أحمد، ظهر في *Revue de l'Institut des manuscripts arabes* (أيّار_تشرين الثاني ١٩٦٢)، الصفحة ٨٥.

[٢٨] انظر: ك. نلّينو [محاضرات في الجامعة المصريّة]:
C. Nallino, *Arabian Astronomy, its History during the Medieval Times*, (Roma, 1911), pp. 284-286.

[٢٩] انظر: ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء"، تحقيق مولّر (Müller)، ص. ٢٠٧، ٢٧-٢٠٨، ١٧؛ تحقيق رضا، الصفحات ٢٨٦، ٢٣-٢٨٧، ١٥.

هاتان القائمتان ليستا شاملتين، فلا يُمكننا أن نحسم مسألة عناوين أعمال بني موسى استناداً إلى هاتين القائمتين فقط. ففيما يخصّ الهندسة وهي المادّة التي تهمّنا هنا، يُشير أحمدُ نفسه إلى كتاباتٍ غائبة عن قائمتَيْ المفهرسَيْن، كما يفعل ذلك من بعده رياضيّون لاحقون. ونحن نعرف عناوين خمسة كتب في الرياضيّات تعود إلى بني موسى، وصل إلينا منها اثنان فقط.

١- الكتاب الأوّل عنوانه "الشكل المدوّر المستطيل"؛ وقد نَسَبه النديم والقفطي إلى الحسن بن موسى، وهذا ما يؤكّده السجزي، وهو رياضيّ في نهاية القرن العاشر. وهذا الأخير لا يكتفي بذِكر العنوان، موضِحاً أنَّ بني موسى وضعوا "كتاباً في خواصّ القِطْع الناقص وسمّوه الدائرة المستطيلة"، بل يلخّص أيضاً الطريقة التي طبّقوها لإجراء الرسم المتّصِل للقطع الناقص بواسطة خاصّية بؤرتَيْه[٣٠].

من جهة أخرى، يذكّر محمّد وأحمد بن موسى، في كتابهما المقتضب "مقدّمات كتاب المخروطات"، أنّ أخاهما الحسن وضع مؤلّفاً في توليد القطوع المخروطيّة الناقصة وفي برهان مساحتها:

"وتهيّأ للحسن بن موسى بقوته في علم الهندسة واستعلائه فيه النظر في علم قطع الأسطوانة، إذا قُطعت بسطح على غير موازاة لقاعدتها، وكان الخط المحيط بالقطع خطًا تام الإحاطة، فاستنبط علمه وعلم الأعراض الأول التي تعرض فيه من الأقطار والسهام والأوتار، واستنبط علم مساحته"[٣١].

ولكن كتاب "الشكل المدوّر المستطيل" ، حسب شهادة السجزي، يتناول مسألة توليد القطوع الناقصة. كل شيء يشير إذن إلى أنّ الأمر يتعلّق بنفس الكتاب. هذا كلّ ما يمكننا تأكيده؛ وفيما عدا ذلك، يبقى المجال مفتوحاً لبعض التخمينات؛ فيكون الكتاب قد وُضِع قبل أن تتسنّى لمؤلِّفه معرفة معمّقة بـ"مخروطات" أبلونيوس – وربّما كان مُطَّلِعاً على كتاب سيرينوس أنطينوي(*Serenus d'Antinoë*)، "في قطع الأسطوانة"[٣٢]. لقد لعب هذا المؤلَّف لابن موسى دوراً أساسيّاً، وشكَّل نقطة انطلاق

---

[٣٠] انظر، ضمن ر. راشد، أعمال السجزي الرياضية(بيروت، ٢٠٠٨)، ص. ٢٨٤، ما كتبه السجزي في كتابه "في وصف القطوع المخروطية": "وطريق آخر غريب مستخرج من خواصه. وعمل هذه الخاصة وبنى عليها بنو موسى بن شاكر كتاباً في خواص القطع الناقص وسمّوه الدائرة المستطيلة". ويتعلّق الأمر بخاصَّة "البؤرتين" القائلة إنَّ مجموع الخطّين الخارجين من كلّ نقطة على القطع الناقص إلى البؤرتين يساوي القطر الأعظم .

[٣١] بنو موسى، "مقدّمات كتاب المخروطات"، مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقتان ٢٢٣ظ-٢٢٤و، تحقيق ر. راشد ضمن: *Les Coniques,* tome 1.1: *Livre I*، ص. ٥٠٥، ٤-٨.

[٣٢] سنتناول ثانية هذه المسألة ضمن التحليل الذي يرد لاحقاً لنص ابن السمح، الفصل السادس.

لتطوّر عظيم لهذه الدراسة قام به ثابت بن قرّة الذي استند بفضل هذا المؤلَّف إلى معرفة معمّقة بـِ"مخروطات" أبلونيوس[٣٣].

لم يصل إلينا هذا الكتاب؛ لكن يبدو لنا أنّ جزءاً من نصِّه كان مصدر إيحاء لمساهمة ابن السَّمْح التي وصل إلينا جزءٌ منها في نصٍّ عبري[٣٤]. إنّ أهميّة هذا الكتاب في تاريخ نظريّة المخروطات ورياضيّات اللامتناهيات في الصغر المكتوبة باللغة العربيّة، وإشارات أحمد بن موسى إليه، والمعلومات التي قدّمها السجزي، والتخمينات التي قدّمناها هنا، تحثّ على إعادة تناول مسألة هذا الكتاب بشكل مستقلّ.

٢- الكتاب الثاني هو "مقدّمات كتاب المخروطات" الذي ذكرناه سابقاً، وقد أشار إليه النديم والقفطي، ووصل إليَنا في عدّة مخطوطات. أثبِتَت فيه تسع مقدّمات، "يُحتاج إليها في تسهيل فهم الكتاب"[٣٥]، أي كتاب "مخروطات" أبلونيوس.

٣- يعيد محمّد وأحمد بن موسى، في مقدّمة الكتيّب السابق، رسم تاريخ دراساتهم لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، ويذكران شرحاً كتبه أحمد لسبع مقالات من ذلك المؤلَّف. هذه الإشارة الغامضة هي المعلومة الوحيدة التي لدينا عن هذا الشرح[٣٦].

٤- كتاب عنوانه "الشكل الهندسيّ الذي بيَّن جالينوس أمرَه"، ولم يتم العثور عليه.

٥- الكتاب الذي نحقّقه هنا.

أخيراً، هناك نصٌّ صغير آخر، في تثليث الزاوية، يحمل اسم بني موسى، إلا أنَّ نسبته إليهم تثير، على ما يبدو، صعوباتٍ حقيقيّة[٣٧].

تبرز، من جميع هذه العناوين، بين السطور على الأقلّ، سمة ثابتة، استمرّت تتعزّز على امتداد هذا البحث الذي ابتدأ بالعربيّة مع بني موسى؛ وهي الاهتمام المزدوج بهندسة المخروطات، وبقياس السطوح والأحجام التي تحدّها المنحنيات؛ أي بالاهتمام في آنٍ واحد بتقليد أبلونيوس وبتقليد أرشميدس.

[٣٣] انظر لاحقاً تحليل كتاب ابن قرّة: "في قطوع الأسطوانة وبسيطها".
[٣٤] انظر لاحقاً تحليل نص ابن السمح.
[٣٥] مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقة ٢٢٤ظ.
[٣٦] المرجع نفسه، الورقة ٢٢٤ظ، حيث نقرأ: "وتهيأ انصرافه من الشام إلى العراق، فلما صار إلى العراق عاد إلى تفسير السبع مقالات التي وقعت إلينا".
[٣٧] انظر مخطوطة أكسفورد، مكتبة بودليان:
Bodleian Library, Marsh 207, fol. 131^v & Marsh, 720, fol. 260^v.

١-١-٣ كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرِّيّة: نصٌّ لاتيني وإعادة كتابة قام بها الطوسي

غريبٌ هو مصير هذا الكتاب. فحتى الآن لم يتم العثور عليه بالعربيّة (باستثناء مقطعين)*، ولم يبقَ منه سوى تحرير قام به نصير الدين الطوسي في القرن الثالث عشر. إلا أنَّ لدينا، لحسن الحظ، ترجمته اللاتينيّة التي أنجزها جيرارد دو كريمون والتي حُقّقت وتُرجِمت إلى عدّة لغات[٣٨].

هذه هي الوقائع. وقد جرى كلّ شيء وكأنّ تحرير الطوسي قد حلّ محل النصّ الأصلي. ويُمكننا أن نتخيّل المسار التالي لهذا الكتاب؛ وهو يبتعد قليلاً، بدون شك، عن مساره الحقيقي: اختار الطوسي نصّ هذا الكتاب، نظراً إلى أهميّته مع سهولة فهمه من قِبَل الطلاب مقارنة بأعمال العلماء اللاحقين في هذا الميدان، ليكون من بين الكتابات التي كان ينبغي تحريرها وإدراجها ضمن المجموعات المشهورة المعروفة تحت عنوان "المتوسّطات"، أي "الكتابات الفلكيّة الصغيرة" التي أضيف إليها بعض كتب الرياضيّات. وقد عرفت هذه المجموعات المخصّصة بالدرجة الأولى للتعليم نجاحاً كبيراً، نستطيع أن نقيسه بالعدد المرتفع لمخطوطاتها التي وصلت إلينا. لقد أمّن إذاً تحريرُ الطوسي لفكر بني موسى انتشاراً واسعاً. لكن هذا النجاح حصل، إذا جاز القول، على حساب النصّ نفسه: فقد كان تداول تحرير الطوسي كبيراً بحيث تمّ إهمال نسخِ نصِّ بني موسى الأصلي الذي اختفى، كما يبدو منذ ذلك الحين؛ وقد باءت بالفشل جميع محاولاتنا للعثور عليه.

---

* تم العثور على مقطعين من هذا المؤلّف، انظر الصفحات ٣٩-٤٧. أضيفت هذه الملاحظة عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلّدنا هذا.

[٣٨] راجع: م. كورتز:

M. Curtze, " Verba Filiorum Moysi, Filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de Geometria, nach der Lesart des codex Basileenis F. II. 33 mit Einleitung und Commentar ", *Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturförscher*, vol. 49 (Halle, 1885), pp. 109-167;

وانظر أيضاً هـ. سوتر:

H. Suter , "Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir", *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1902), pp. 259-272;

وانظر م. كلاجيت:

M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. 1, pp. 233-367.

انظر كذلك و. كنور:

W. Knorr, *Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry* (Boston, Basel, Berlin, 1889), pp. 267-275.

أمّا النص اللاتيني فينقص منه، كما سنرى ، مقطعٌ طويل أعاد تحريره الطوسي. يشرح بنو موسى في هذا المقطع التركيبَ الآلي الذي ابتكروه لتحديد قطعتين مستقيمتين بين قطعتين مستقيمتين معلومتين، بحيث تتوالى القطع الأربع في تناسب مُتّصل؛ ويشرحون فيه أيضاً مسألة تثليث الزاوية[٣٩]. وربّما لم يكن جيرارد دو كريمون يرغب بمواجهة الصعوبة الحقيقيّة، اللغويّة والتقنيّة، لهذا المقطع الذي لا تثير صحّة نسبته إلى بني موسى أيّ شكٍّ. لذلك لا بد، من أجل فهم إسهام بني موسى، من العودة إلى نص جيرارد دو كريمون؛ لكنّ من البديهيّ أيضاً، أن نعود بالضرورة إلى تحرير الطوسي لأجل تحقيق هدفنا هذا. وتـُقدِّم لنا هذه الترجمة اللاتينيّة خدمة أخرى، فهي تـُعلِمُنا بالمعنى الذي كان الطوسي يعطيه لكلمة "تحرير"، وتسمح لنا بقياس المسافة التي تفصل تحرير الطوسي عن نصّ بني موسى. لكنَّ تحرير الطوسي لا يلبث، بدوره، أن يلقي الضوء على الترجمة اللاتينيّة، أو على الأقل على سماتها اللغويّة. لذا، ينبغي على الذي يؤرّخ لفكر بني موسى في هذا الميدان، أن يواجه الصعوبة المزدوجة المتمثّلة في استخدام تقليد غير مباشر، وفي العودة إلى نص أعيدت كتابته بعد ثلاثة قرون. ولنحاول، في البداية، أن نفهم، بشكل مؤقّت على الأقل، كيف أراد الطوسي أن "يُحرِّر" أو أن "يُعيد كتابة" مؤلَّف بني موسى، وذلك بعد أن أشرنا مسبقاً إلى العقبتين اللتين يواجههما المؤرِّخُ في هذه الحالة.

ترتبط العقبة الأولى بأسلوب كتابة بني موسى ومعاصريهم؛ فهم يتوجّهون إلى رياضيّي زمانهم، إلى طلاب الرياضيّات وعلم الفلك. وكان يجب أن تكون لهؤلاء القرّاء معرفة جيّدة بمؤلَّفيْ "الأصول" و"المعطيات" لأقليدس، وبكتابات أخرى. فإذا حدث أن يستخدم بنو موسى قضيّة من هذين المؤلَّفَيْن بدون التذكير بها بوضوح، فإنَّ ذلك يعود بالضبط إلى أنـّهم كانوا يعوّلون، بشكل بديهيّ، على معرفة القرّاء بهذين المؤلَّفَيْن. ولم يفكّر أحدٌ قَطُّ بلومهم على هذه الممارسة، التي كانت مألوفة وقديمة العهد. إنَّ الطوسي نفسه، الذي كان أفضل العارفين بأعمال أقليدس وكان يدرك الإحالات المضمَرة لبني موسى، لم يعتبر قط أنـّه من الضروري توضيحها، ولم يرَ

[٣٩] انظر نص بني موسى أدناه، ص. ١٢٢-١٢٣.

فـي عدم ذكرهـا أيَّ نقص ينبغـي سَدّه. والظـن بـأنّ هـذه الممارسـة تنطـوي علـى نيّـة لإخفاء المصادر، يعني عدم معرفة التقاليد الرياضيّة في ذلك الزمن؛ ويجـب التـذكير، في هذا الصدد، بأنَّه قد يحدث أن يستخدم بنو موسى قضـايا، سبق لهم أن برهنوهـا، دون أن يذكروا ذلك بشكل واضح.

تـُرجِعنا العقبـة الثانيـة إلـى صياغة الطوسـي التـي تتوجّـه، هـي أيضـاً، إلـى طـُلاب متقدّمين في الرياضيّات. لم يكن هؤلاء الطُلاّب مطَّلعين على أعمال أقليدس فحسـب، بـل كـانوا قـادرين علـى إتمـام مراحلَ، أوّليّـة علـى الأقـل، مـن البـراهين. ولـم يُهمِـل الطوسي هذه المراحل، بسبب قصور في تحريره، بل إنَّه قام بذلك عن قصد.

ولكنـَّنا نعرف أنَّ الإيجاز هو أحد معايير تحرير الطوسي؛ فهو، علـى امتداد نـصّ بني موسى، يحذف ما يبدو لـه غير ضروري للعرض الرياضـي الـدقيق. وقد يوافق الـبعض علـى خياراتـه أو يرفضـها؛ لكـنَّ هـذا الاقتصـاد فـي التحريـر، بالنسـبة إلـى الطوسي، ضـامنٌ لأناقـة الـنصّ علـى الأقلّ، بـل يُضـفي عليـه، أيضـاً بشـكل مُضـمَر، صبغة تعليميّة.

لنعد الآن إلى معنى هذه "التحارير" أو "إعادات الكتابة" التي قـام بهـا الطوسـي. إنّ هذه المسألة، رغـم أهميّتهـا الكبـرى، لـم تـُدرسَ مـن قَبـل حسـب معلوماتنـا؛ ونحـن لـن ندرسها هنا إلا في حالة كتاب بني موسى.

سنبدأ بـإبراز بعض السِّمات العامّـة لـِ"تحريـر" الطوسـي، قبـل أن نباشـر بالتحليـل الدقيق لمثال نأخذه من كل جوانبه. عندما "يحرّر" الطوسي، فإنَّه يريد الوصـول إلـى نـصٍّ خـالٍ مـن المقـاطع النافلـة ومـن الإطـالات التـي ليسـت مفيـدة برأيـه. والعمليّـات المتداولة عنده بشكل أساسي هي: حذف التكرار، واستبعاد الإسهاب، وإعـادة صـياغة الجمل مع إدخال الضمائر لتقوية العبارات الطويلة. نشير إذاً إلى الأمور التالية:

١ـ قـام الطوسـي بعمليّـات حـذف واسـعة فـي المقـاطع التـي خصّصـها بنـو موسـى لعرض دوافعهم، وبخاصّة في المقدّمـة، حيث يشـرحون مـا حـدا بهـم إلـى تحريـر هـذا الكتـاب ويصـفون الطريقـة التـي اختاروهـا فـي كتـابتهم الخاصّـة. وتعامـل الطوسـي بالأسلوب نفسه مع الخاتمة حيث يعود بنـو موسـى إلـى مختلف النتـائج التـي توصّـلوا

إليها. ولا نظنّ أنّ هناك حاجة إلى التذكير بالأهميّة الكبرى لهذه المقاطع بالنسبة إلى المؤرّخين.

٢- عمد الطوسي إلى حذف المقاطع التي يرى فيها تكراراً. ففي بداية القضيّة السادسة عشرة، يشرح بنو موسى كيف تسمح مسألة إيجاد مقدارين بين اثنين آخرين معلومَيْن بحيث يتوالى الأربعة في تناسب متّصل، بحلِّ مسألة استخراج الجذر التكعيبي. وفي نهاية الكتاب يذكّرون بالمعنى نفسه[٤٠]. وقد اختفى هذا التذكير من صياغة الطوسي.

٣- يقوم الطوسي، في الكتابات الرياضيّة، بتشذيب النصّ، إلا أنّه يحافظ على ما هو أساسي فيه. والعبارات المستخدَمة لعرض القضيّة ولبرهانها، مثل: "مثال"، "أقول"، "برهان"، "إن أمكن ذلك"، "هذه صورته"، "وذلك ما أردنا أن نبيّن"، حُذف بعضها بشكل منهجيّ، والبعض الآخر حُذِف في أغلب الأحيان.

يبقى أن نقول إنّ الطوسي، على امتداد هذا "التحرير"، لم يُشوِّه قطُّ، في الصفحات الرياضيّة حصراً، لا المعنى ولا حرْفيّة النصّ في القسم الأساسي منه. فهو يفصل، بعناية متناهية، أقواله وشروحه عن تلك العائدة إلى بني موسى، مبتدئاً إيّاها بكلمة "أقول". وتبيّن مقارنة "تحريره" بالنص اللاتيني أنّه لم يغيّر قطُّ بنية الاستدلال والعرض؛ فتحريره إذاً هو، بالفِعل، الخلاصة الأساسيّة لنص بني موسى.

لقد اتّضح، إذاً، أنّ الوضع أقل خطورة ممّا كُنّا نخشاه. فسنـقبَل بأنّ لدينا، بالفعل عبر "تحرير الطوسي"، نصَّ بني موسى، في القسم الأساسي منه. ولنأخذ، لمزيد من الإقناع، مثال القضيّة الرابعة عشرة، ونحاول "إعادة تشكيل" النصَّ العربي المترجم إلى اللاتينيّة. لا شكَّ أنّ إعادة التشكيل التخمينيّة هذه قد تبتعد عن الأصل في اختيار بعض الكلمات أو الصيغ اللغويّة؛ ونحن ندَّعي أنّها لن تبتعد عنه كثيراً. وهي، على أيِّ حال، ستساعدنا على اكتشاف الفروق بين تحرير الطوسي والنصّ الأصلي. لنذكّر، لضرورات المقارنة، أنّ الأحرف الهندسيّة $\overline{\text{جـ}}$، $\overline{\text{و}}$، $\overline{\text{ز}}$، $\overline{\text{ط}}$، أصبحت على

[٤٠] انظر القضيّة التاسعة عشرة من النص اللاتيني، الصفحة ٣٤٨.

التوالي لدى جيرارد دو كريمون G، U، Z، T وأصبحت لدينا، C، F، G، I. [أنظر الجدول الأوّل]

ويُمكن أن يعترض البعض، أيضاً، على الحجج التي قدّمناها في الفقرات السابقة، بالقول بعدم إمكانيّة الحكم بطريقة دقيقة _لا هنا ولا في مكان آخر_على أمانة الترجمة اللاتينيّة. وممّا لا شك فيه أنّ أيّ حكم من هذا النوع يَبقى غيرَ ممكن، إلى حين العثور على نصّ بني موسى نفسه أو، إذا تَعَذر ذلك، على مقطع أو عدّة مقاطع من هذا النصّ. ولقد قادنا البحث عن مثل هذه المقاطع إلى العثور على قضيّتين أكّد تحليلُهما المقارَن، كما يبدو، النتائجَ التي حصلنا عليها[٤١].

إذا استثنينا الحوادث المرتبطة بنسخ الاستشهاد، سنرى أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفيّاً النصّ العربي؛ ومن جهة أخرى سنرى أنّ تحرير الطوسي يجري وفق المسار الذي وصفناه. وقبل أن ندوّن في جدول جديد المقارَنات التي تُمكّن من تبيين هذه الأقوال، نذكّر بأنَّ الاستشهادين اللذين عثرنا عليهما موجودان ضمن شرح لِـ"أصول" أقليدس[٤٢]، لمؤلِّف مجهول الهويّة، يذكر فيه هذا المؤلِّف، من بين آخرين، ثابت بن قرّة، النيريزي، الأنطاكي، ابن الهيثم، ابن هود وكذلك الدمشقي والفارابي. ويذكر هذا المؤلِّفُ نفسُه بني موسى عندما يهتم بمسألة تثليث الزاوية. فيكتب: "وقد تقسم الزاوية بثلاثة أقسام على ما ذكره بنو شاكر. ويقدم لذلك مقدمة"[٤٣]. وعند ذاك يورد القضيّة الثانية عشرة من مؤلَّف بني موسى، قبل أن يتناول القضيّة الثامنة عشرة.

[انظر الجدول الثاني].

تؤكّد لنا المقارنة أمانة الترجمة اللاتينيّة لنصّ بني موسى. فقد ثبت لدينا، بالنسبة إلى قضيّتين مختلفتين، متباعدتين بما يكفي، أنّ جيرارد دو كريمون ينقل حرفيّاً النصَّ العربي. ومن جهة أخرى، تبيّن هذه الترجمة طبيعة تحرير الطوسي كما وصفناه حتى قبل أن نعثر على هذين الاستشهادين.

---

[٤١] أضيف هذا القسم عند تصحيح الأوراق الأولى التي أخرجتها المطبعة، من مجلّدنا هذا. نشير إلى أنّ الاستشهاد، بالمقطعين اللذين عثرنا عليهما، يبيّن أنّ مؤلّف بني موسى كان لا يزال متداوَلاً حتى نهاية القرن الثالث عشر الميلادي على الأقل.
[٤٢] مخطوطة حيدر أباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢.
[٤٣] المرجع نفسه، الورقة ٥٠و.

لم يُهمِل الطوسي، الذي كان رياضيّاً من المرتبة الأولى، مهمّة إعادة كتابة بعض المؤلّفات الريّاضيّة الأساسيّة. يتّضح هنا هدف هذه المهمّة؛ فهو يتمثّل في تشذيب النصّ الأصلي، وتغيير أسلوبه قليلاً، بدون المسِّ، مع ذلك، بالأفكار الرياضيّة المثبتة، أو ببنية المؤلَّف؛ ويحصل ذلك بدون التدخُّل في الاستدلال وبدون إدخال شيء إلى المؤلَّف من خارجه. إنَّ القيام بهذه المهمَّة أبعد من أن يكون سهلاً، وهي بحاجة إلى رياضيّ من منزلة الطوسي للقيام بها على أحسن وجه. إلا أنّ القيام بها لا يجري بشكل رتيب. فالقضايا الأكثر تعقيداً من الناحية الرياضيّة والتقنيّة هي الأقلُّ تلاؤماً مع هذه المهمّة. يبقى نصُّ الطوسي، بخصوص هذا الصنف من القضايا، أكثر قرباً، بالفعل، من نصّ بني موسى، كما تشهد على ذلك، في هذه الحالة المقارنة بالنص اللاتيني؛ وهذا ما يحدث بخصوص القضيّتين السابعة عشرة والثامنة عشرة حيث يختلط بالرياضيّات وصفُ آلات تقنيّة. لكن، هنا بالتحديد، ينقص من النصّ اللاتيني الذي نحقّقه مقطع، من ثلاث صفحات، بقي محفوظاً لحسن الحظ في تحرير الطوسي.

لقد أتاح هذا المقطع المفقود في النصّ اللاتيني، الفرصة لظهور الأقوال الأكثر إثارة للبلبلة. نـُشير في البداية إلى أنّ الطريقة التي يقترحها بنو موسى في هذا المقطع، خلافاً لكلّ ما قد قيل، ليست تلك التي تحمِلُ، وفقاً لأقوال أوطوقيوس (*Eutocius*)، اسم أفلاطون. ونؤكّد أيضاً أنّ لا شيء يسمح في هذا المقطع بتشكيكٍ محتمَل في أصالته أو في نسبته إلى بني موسى. فالطوسي نفسه، الذي لم يتوانَ قطُّ عن فصل أقواله عن أقوال بني موسى، لم يترك أيَّ غموض حول هذه النقطة. من جهة أخرى، لا يسمح تاريخ النصّ العربي بأيِّ شكّ في نسبة هذا المقطع إلى بني موسى. وأخيراً يقدّم النصّ العربيّ والترجمة اللاتينيّة جواباً واضحاً بخصوص هذه المسألة. فالنصّ المطعون بصحّته يقع في نهاية القضيّة السابعة عشرة في نصّ بني موسى؛ وهؤلاء يوردون في القضيّة الثامنة عشرة، وبشكل هو على أكثر ما يكون من الوضوح، الطريقة الآليّة المعروضة في هذا المقطع. يأتي عرض القضيّة الثامنة

عشرة كما يلي: "النا أن نقسم بهذه الحيلة أيّ زاوية شئنا بثلاثة أقسام متساوية"، في حين نقرأ في النص اللاتيني:

"*Et nobis quidem possibile est cum hoc ingenium sit inventum ut dividamus quemcunque angulum volumes in tres divisions equales*" (ص. ٣٤٤، ١، ١-٣)

غير أنّ من يقرأ النصّ اللاتيني وحده لا يقع على هذه "الحِيَلة" التي يشير إليها هنا بنو موسى، والتي لا يمكن بالتالي أن يكون ذكرها من فِعل الطوسي. وقد كتب بنو موسى بعد ذلك بقليل، وفقاً لتحرير الطوسي: "فتحرِّك بالحيلة المذكورة زح..." (انظر أدناه ص.١٣٣، ١)، ونقل جيرارد دو كريمون هذه العبارة إلى اللاتينيّة على الشكل التالي:

« *Et quoniam possibile est nobis per ingenium quod narravimus in eis que premissa sunt et per ea que sunt ei similia ut moveamus lineam ZH…* » (٣٤٦-٣٤٨، ١، ٣٣-٣٥)

أي ما معناه: "وبما أنـّه يمكن لنا بطريقة الحِيَل التي وصفناها في القضيّتين السابقتين وبالأشياء التي تشبهها، أن نُحرّك الخطّ *GH* ...".

من الواضح إذاً أنّ بني موسى قد وصفوا هذه الحِيَل سابقاً في مقطع لم يترجمه جيرارد دو كريمون.

لا مفرَّ إذاً، أمام من يهتمّ بهذا الإسهام لبني موسى، من أن يخوض المعركة على جبهتين: تحرير الطوسي والترجمة اللاتينيّة. فالثانية توضح معنى الأولى؛ والأولى بدورها تساعد على تثبيت حدود الثانية. يقدّم لنا تحرير الطوسي، من بعض النواحي، خلاصة نصّ بني موسى، بشكل أكثر أمانةً بالرغم من تدخـّلات الطوسي. لكنـّنا لايمكن أن ننكر أنّ الترجمة اللاتينيّة، تنقل إلينا جيّداً التفاصيل والأقوال والتكرارات...، التي حذفها الطوسي والتي تشكّل كلُّها جزءاً لا يتجزّأ من النصّ.

أخيراً، أمّن كلٌّ من "تحرير" الطوسي وترجمة جيرارد دو كريمون، البقاءَ لنصّ بني موسى، بإعطائه دوراً تاريخيّاً، إذ أصبح المرجعَ الأساسيَّ في التعليم الأرشيميدي طيلة عدّة قرون.

الجدول الأوّل

ملاحظات	III تحرير الطوسي	II النص العربي الذي يُحتمل أن يكون في أساس النص اللاتيني I (ترجمة جيرارد)	I ترجمة جيرارد دي كريمون Gérard de Crémone
نلاحظ أنّه تمّ الحفاظ على المعنى وأنّ عبارة الطوسي أقصر بقليل.	سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي قاعدتها.	(١) كل نصف كرة فإن مساحة سطحه (أو بسيطه) ضعف مساحة سطح الدائرة العظيمة التي تقع فيها.	(1) *Embadum superficiei omnis medietatis spere est duplum embadi superficiei maioris circuli qui cadit in ea.*
الفرق الوحيد يكمن فيما يلي: في النص (III)، الدائرة الكبرى هي قاعدة نصف الكرة، بينما هذا مضمَر في النصّين (I و II).	فليكن ا ب جـ د نصف كرة، ودائرة ا ب جـ عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، و د قطبها.	(٢) مثال ذلك: فليكن ا ب جـ د نصف كرة، ودائرة ا ب جـ عظيمة تقع فيها ونقطة د قطب هذه الدائرة.	(2) *Verbi gratia, sit medietas spere BCAD, et maior circulus qui cadit in ea sit circulus ABC, et punctum D sit polus huis circuli.*
قام الطوسي بحذف هذه الجملة.		(٣) فأقول إن: مساحة سطح (أو بسيط) نصف كرة ا ب جـ د ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ، وبرهانه أن ...	(3) *Dico ergo quod embadum superficiei medietatis spere ABCD est duplum embadi superficiei circuli ABC, quod sic probatur.*
قد يحدث أن لا يحتفظ المترجم اللاتيني سوى بإحدى الكلمتين "embadum مساحة" و "superficies سطح". ولقد قام الطوسي بحذف الجزء الثاني ليذهب مباشرة إلى البديل الآخر.	فإن لم يكن ضعف سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لسطح نصف الكرة.	(٤) فإن لم يكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لمساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د فهو إما أن يكون أقل منها وإما أن يكون أكثر منها.	(4) *Si non fuerit duplum ernbadi circuit ABC equale superficiei medietatis spere ABCD, tunc sit duplum eius aut minus superficie medietatis spere ABCD aut maius ea.*
النصّان متطابقان، مع فارق هو أنّ الطوسي أحلّ الضمائر محلّ الأسماء واستبعد عبارة "إن أمكن ذاك" المضمَرة في العرض. وهذه الاختلافات في الأسلوب هي التي تشكّل الفارق بين "صياغتَي" هذه الفقرة.	فليكن أولاً أصغر منه، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة أصغر من نصف كرة ا ب جـ د، وهو نصف كرة هـ ح ط كـ.	(٥) فليكن أولاً ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ أقل من مساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د، إن أمكن ذلك؛ وليكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ مساوياً لمساحة سطح نصف كرة أقل من نصف كرة ا ب جـ د، وليكن نصف كرة هـ ح ط كـ.	(5) *Sit ergo in primis duplum embadi circuli ABC minus embado superficiei medietatis spere ABCD, si fuerit illud possibile. Et sit duplum embadi circuli ABC equale superficiei medietatis spere minoris medietate spere ABCD, que sit medietas spere EHIK.*

(6) *Cum ergo fiet in medietate spere ABCD corpus compositum ex portionibus piramidum columnarum, cuius basis sit superficies circuli ABC et cuius caput sit punctum D, et ponetur ut corpus non tangat medietatem spere EHIK,*	(٦) فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط كـ ،	فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم – كما وصفنا- قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط كـ	النصّان متطابقان، مع فارق بسيط استبدل الطوسي عبارة "مؤلَّف ... الأخرى" بعبارة "كما وصفنا" منعاً للتكرار. وهذا، كما يبدو، أحد دوافع "تحرير" الطوسي.
(7) *tunc oportebit ex eis que premisimus ut embadum superficiei corporis ABCD sit minuss duplo embadi superficiei circuli ABC. Sed embadum superficiei corporis ABCD est maius embado superficie medietatis spere EHIK, quoniam continet ipsam. Ergo embadum superficiei medietatis spere EHIK est multo minus duplo embadi superficiei circuli ABC. Et iam fuit ei equalis. Hoc vero contrarium est et impossibile.*	(٧) فمما بينا آنفاً تكون مساحة سطح مجسم ا ب جـ أقل من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ . ولكن مساحة سطح مجسم ا ب جـ د أكثر من مساحة سطح نصف كرة هـ ح ط كـ لأن الأول يحيط بالآخر. فمساحة سطح نصف كرة هـ ح ط كـ أقل كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ . وقد كان مثله، هذا خلف لا يمكن.	كان سطحه أصغر من ضعف سطح دائرة ا ب جـ وأعظم من سطح نصف كرة هـ ح ط كـ. فضعف سطح دائرة ا ب جـ المساوي لسطح نصف كرة هـ ح ط كـ أعظم كثيراً منه؛ هذا خلف.	
(8) *Et iterum sit duplum embadi superficiei circuli ABC maius embado superficiei medietatis spere ABCD, si fuerit possibile illud. Et sit equale superficiei medietatis spere maioris medietate spere ABCD, que sit medietas spere FGLM.*	(٨) ثم ليكن ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ أكثر من مساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د ، إن أمكن ذلك؛ وليكن مساوياً لمساحة سطح نصف كرة أعظم من نصف كرة ا ب جـ د، وليكن نصف كرة و ز ل م.	ثم ليكن ضعف سطح دائرة ا ب جـ أعظم من سطح نصف كرة ا ب جـ د، وليكن مساوياً لسطح نصف كرة و ز ل م.	هكذا اختصر الطوسي مرحلتَي العبارة بمرحلة واحدة.
(9) *Cum ergo fiet in rnedietate spere FGLM corpus compositum ex portionibus piramidum columpnarum, cuius basis sit superficies circuli FGLM et cuius caput sit punctum D, et non sit corpus tangens medietatem spere ABCD,*	(٩) فإذا عمل في نصف كرة ا ب جـ د مجسم من قطع من مخروطات الأساطين مركب بعضها على بعض، قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة د بحيث لا يماس نصف كرة هـ ح ط كـ.	ونعمل فيه مجسماً – كما وصفنا- غير مماس لنصف كرة ا ب جـ د.	لقد تعمّد الطوسي هنا، كما في السابق، إهمال وصف المجسّم، مذكّراً بأنّ وصفه قد حصل سابقاً، وهكذا اقتصر هذا المقطع على ما هو أساسي.
(10) *tunc oportebit ex eo quod premisimus ut sit embadum superficiei corporis FGLM maius duplo embadi circuli ABC.*	(١٠) فيكون مساحة سطح مجسم و ز ل م أكثر من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ د، لما مرّ.	فيكون سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة ا ب جـ ، لما مرّ	الفارق الوحيد عن النص (III) هو وجود كلمة "مساحة" وتسمية المجسّم.

العبارة الأخيرة "لكونه محيطاً به" غائبة عن النص اللاتيني؛ أمّا الطوسي، فلم يسمِّ المجسّم.	وسطح نصف كرة و ز ل م أعظم من سطح المجسم لكونه محيطاً به.	(١١) ومساحة سطح نصف كرة و ز ل م أعظم من مساحة سطح مجسم و ز ل م لكونه محيطاً به.	(11) *Verum embadum superficiei medietatis spere FGLM est maius embado superficiei corporis FGLM.*
	فسطح نصف كرة و ز ل م أعظم كثيراً من <ضعف> سطح دائرة ا ب جـ ، وكان مثله؛ هذا خلف.	(١٢) فمساحة سطح نصف كرة و ز ل م أكثر كثيراً من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ ، وقد كان مثله؛ هذا خلف لا يمكن.	(12) *Ergo embadum medietatis spere FGLM est maius duplo embadi superficiei circuli ABC. Sed iam fuit ei equale. Hoc vero est contrarium et impossibile.*
جملة الطوسي: "فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه"، ليس لها ما يقابلها في الترجمة اللاتينيّة. لكنَّ ما قد يثير العجب هو أن يكون بنو موسى، خلافاً لأسلوبهم في الكتابة الذي نعرفه، قد نسوا وضع هذا الاستنتاج. فمن المحتمل – كما تشهد على ذلك باقي رسالتهم- أن يكون الاستنتاج غائباً، بسبب إغفال جيرارد، أو بسبب غيابه عن المخطوطة التي كان هذا الأخير يترجمها.	فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.	(١٣) فليس مساحة سطح نصف كرة ا ب جـ د بأقل من ضعف مساحة سطح دائرة ا ب جـ ، وقد كنا بينا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبين.	
	وقد بان منه أن سطح الكرة أربعة أمثال سطح أعظم دائرة تقع فيها.	(١٤) وهنالك تبين أن كل كرة فإن مساحة سطحها أربعة أمثال مساحة سطح أعظم دائرة تقع فيها، وهذا ما أردنا بيانه. وهذه صورته.	(14) *Iam ergo ostensum est quod embadum superficiei omnis spere est quadruplum embadi superficiei maioris circuli cadentis in ea. Et illud est quod declarare voluimus. Et hec est forma eius.*

الجدول الثاني

I ترجمة جيرار دي كريمون	II النص الأصلي العربي للقضيّة ١٢	III صياغة الطوسي	ملاحظات
Cum fuerit circulus cuius diameter sit protracta, et protrahitur ex centro ipsius linea stans super diametrum orthogonaliter et perveniens ad lineam continentem et secatur una duarum medietatum circuli in duo media, tunc cum dividitur una harum duarum quartarum in divisiones equales quotcunque sint, deinde protrahitur corda sectionis cuius una extremitas est punctum super quod secant se linea erecta super diametrum et linea continens et producitur linea diametri in partem in quam concurrunt donec concurrunt et protrahuntur in circulo corde equidistantes linee diametri ex omnibus punctis divisionum per quas divisa est quarta circuli, tunc linea recta que est inter punctum super quod est concursus duarum linearum proctractarum et inter centrum circuli est equalis medietati diametri et cordis que protracte sunt in circulo equidistantibus diametro coniunctis.	إذا كانت دائرة وأخرج من مركزها خطٌّ يقوم على القطر على زاوية قائمة وينتهي إلى خط المحيط ويفصل نصف الدائرة بنصفين، فإنه إذا قسم أحد هذين الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ثم أخرج وتر القسم الذي أحد طرفيه نقطة تفاصل نصف قطر الدائرة القائم مع الخط المحيط، وأخرج القطر في الجهة التي يلتقيان فيها، وأخرج في الدائرة أوتار موازية لخط القطر من جميع نقط الأقسام التي قسم بها ربع الدائرة، فإن الخط المستقيم الذي بين النقطة التي التقى عليها الخطان المخرجان وبين مركز الدائرة مثلُ نصف قطر الدائرة والأوتار التي أخرجت في الدائرة الموازية للقطر مجموعة.		نلاحظ أنّ الطوسي، كعادته، أهمل وضع صيغة القضيّة في نصّه ليبدأ مباشرة بمثال القضيّة. نقل جيرار دو كريمون النص العربي حرفيّاً، وربّما كان الفارقُ الوحيد حادثَ نسخٍ طرأ على التقليد المخطوطيّ. يتعلّقُ الأمر بالجملة التالية: “Cuius diameter sit protracta” التي كان يجب أن تترجَم بالعبارة: <وأخرج قطرها>. ويُحتَمَل جدّاً أن يكون الأمر متعلّقاً بقفزة من كلمة إلى أخرى بسبب التشابه، أي أن تكون العبارة في الأصل كما يلي: <إذا كانت دائرة وأخرج قطرها وأخرج من مركزها ...>. حواشي النص II: ٣ أحد: احدى – ٤ طرفيه: طرفين / تفاصل: تفاضل – ٥ وأخرج (الثانية): وأخرجت.
Verbi gratia, sit circulus ABG, cuius diameter sit linea AG et cuius centrum sit punctum D. Et protrahatur ex eo linea DB erecta super lineam AG orthogonaliter et dividat arcum ABG in duo media. Et dividam quartam circuli super quam sunt A, B in divisiones equales quot voluero et ponam eas	مثاله: دائرة ا ب جـ، قطرها ا جـ ومركزها نقطة د، وقد أخرج منه خط د ب يقوم على خط ا جـ على زاويتين قائمتين، ويقسم قوس ا ب جـ بنصفين. ثم	ليكن ا ب جـ دائرة قطرها ا جـ ومركزها د، وقد قام عمود د ب منه على القطر، ولنقسم ربع ا ب بأقسام متساوية كم كانت، وهي ا ز	بعد إهماله كلمة "مثاله"، يستعيد الطوسي هنا نص بني موسى بأسلوب مختصر وأكثر أناقةً في أغلب الأحيان. لا تختلف الترجمة اللاتينيّة عن النص الأصلي. ويعود الاختلاف البسيط في جملة: "Et protraham… punctum E"، إلى الترجمة بدون شك.

	ز ل ل ب ، ولنخرج وتر ب ل وننفذه، وننفذ قطر جـا إلى أن يلتقيا على هـ، ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح موازيين لقطر جـا . فأقول: إن خط د ه يساوي نصف قطر جـا ووتري ز ط ل ح جميعاً.	نقسم ربع الدائرة الذي عليه ا ب بأقسام متساوية كم شئنا، وهي ا ز ل ب ز ل. ونصل ل ب ، ونخرج خطي ا جـ ل ب حتى يلتقيا على نقطة هـ، ونخرج من نقطتي ز ل وتري ز ط ل ح يوازيان قطر ا جـ. فأقول: إن خط د ه مثل نصف القطر ووتري ل ح ز ط مجموعة.	*divisiones AZ, ZL, LB. Et protraham cordam BL et faciam ipsam penetrare. Et elongabo iterum lineam AG, que est diameter, secundum rectitudinem donec concurrant super punctum E. Et protraham ex duobus punctis Z, L duas cordas ZT, LH equidistantes diametro AG. Dico ergo quod linea DE est equalis medietati diametri et duabus cordis ZT, LH coniunctis, cuius hec est demonstratio.*
يهمل الطوسي كلمة "برهانه" ويستعيد نص بني موسى بشكل مكثّف، مغيّراً التعابير في بعض الأحيان، مثلَ تغييره: "سطح"، "لأن"، و"مثل ذلك" بـ: "مربع"، "من أجل أن"، و"كذلك". وهي في الواقع مرادفات. والأهمّ من ذلك هو أنـّه عندما يعتمد استدلال بني موسى نفسه (فيما يخصّ هـ د)، فإنـّه يوجز هذا الاستدلال. الترجمة اللاتينيّة تنقل النصّ بدقّة، مع فارق بسيط، يخصُّ العبارة "si quarta circuli" التي قد تكون شرحاً أدخله جيرارد أو ناسخ المخطوطة التي ترجمها جيرارد، لأنـّها مُضمرة في النص. حواشي النص II: ٢ ندبر: نريد – ٣ كذلك: لذلك – ٤ قسمي: قد تُقرأ قسي، وفي هذه الحالة يكون الصواب "قوسي" – ٥ ب ح: با/ لقسمي:قد تقرأ لقسي، وفي هذه الحالة يكون الصواب "لقوسي"/ ط ا و ز: طا دال الف واو زاي - ٦ ح و هـ ل: ها واو ها لام.	فنخرج خط ط ا ح ز وننفذ ح ز إلى أن يلقى جـ هـ على و. وبمثل ذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط جـ هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا ح و ب ه متوازية، لأن قوسي ط ح ح ب مساويتان لقوسي ا ز ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع و ط ز مثل ا و . وبمثل ذلك ح ل مثل و هـ ، فـ د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعاً؛ وذلك ما أردناه.	برهانه: أنا نخرج خط ط ا ، ونخرج خط ح ز وننفذه على استقامة حتى يلقى / خط جـ هـ على نقطة و. وكذلك ندبر إن كانت الأقسام أكثر. فخطوط <جـ هـ> ط ز ح ل متوازية لأنها كذلك أخرجت في الوضع، وخطوط ا ط و ح هـ ب متوازية من أجل أن قسمي ط ح ب ح مساويتان لقسمي ا ز ز ل، فمربع ط ا و ز متوازي الأضلاع، فخط ح ل مثل خط و هـ ، فجميع خط هـ د مساوٍ لخطي ط ز ح ل ولنصف القطر مجموعة.	*Protraham lineam TA et protraham lineam HZ et faciam ipsam penetrare secundum rectitudinem donec occurrat linee EG super U. Et similiter faciam, si quarta circuli super quam sunt A, B fuerit divisa in divisiones plures istis divisionibus. Linee ergo TZ, HL sunt equidistantes, quoniam taliter sunt protracte. Et linee TA, HU, BE sunt equidistantes propterea quod due divisiones TH, HB sunt equales duabus divisionibus AZ, ZL. Ergo quadratum TAUZ est equidistantium laterum. Ergo linea TZ est equalis AU. Et iterum quadratum HUEL est equidistantium laterum. Ergo linea HL est equalis UE. Ergo tota linea ED est equalis duabus lineis TZ, HL et linee erecte que est medietas diametri coniunctis.*
هذه المرّة، يقوم الطوسي بتلخيص نصّ بني موسى دون تغيير في الاستدلال. فهو يكتب "وإن ... الشكل"، بدلاً من	وإن أخرجنا د م عموداً على وتر	وإن نحن أخرجنا في هذا الشكل خطاً من المركز وقطع وتراً	*Si ergo nos protraxerimus in hac figura lineam ex centro et secureit unam cordarum*

divisionum quarte circuli in duo media, sicut lineam DM, tunc secatur linea LB super duo media super punctum M in duo media. Tunc iam scietur ex eo quod narravimus in hac figura quod multiplicatio medietatis corde BL in duas cordas equidistantes diametro et in medietatem diametri coniunctas est minor multiplicatione medietatis diametri in se et maior multiplicatione linee DM in se, propterea quod triangulus DMB est similis triangulo EDB et est similis triangulo EMD. Ergo proportio linee MB ad BD est sicut proportio DB ad BE. *Et propter illud erit multiplicatio linee DB, que est medietas diametri, in se equalis rnultiplicationi linee MB in lineam BE. Verum linea BE est longior duabus cordis ZT, LH et medietate diametri coniunctis, propterea quod iste coniuncte sunt DE, et linea BE est longior DE. Ergo mulliplicatio linee MB in duas cordas ZT, LH et in medietatem diametri coniunctas est minor multiplicatione medietatis diametri in se. Et quoniam triangulus DMB est similis triangulo EMD, erit proportio BM ad MD sicut proportio MD ad ME. Et similiter erit multiplicatio linee BM in lineam ME equalis multiplicationi linee MD in se. Sed linea ME est minor duabus cordis ZT, LH et medietate diametri coniunctis, propterea quod iste omnes sunt equales linee*	من أوتار ربع الدائرة بنصفين، مثل خط د م يقطع ب ل على نقطة م بنصفين، فقد نعلم مما وصفنا أن تضعيف نصف وتر ب ل بالأوتار الموازية للقطر <ونصف قطر الدائرة> مجموعةً أقلّ من تضعيف نصف القطر بمثله وأعظم من تضعيف د م بمثله، من أجل أن مثلث د م ب يشبه مثلث هـ م د ونسبة خط م ب إلى ب د كنسبة د ب إلى ب هـ. فلذلك يكون تضعيف خط د ب الذي هو نصف القطر بمثله مثل تضعيف خط م ب بخط ب هـ. ولكن خط هـ ب أطول من وتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة. فتضعيف خط م ب بخطوط ل ح و ز ط و ب د <مجموعة> أقلّ من تضعيف نصف القطر بمثله. ولأن مثلث د م ب يشبه مثلث د م هـ، يكون نسبة ب م إلى م د كنسبة م د إلى م هـ . ولذلك يكون تضعيف خط ب م بخط م هـ مثل تضعيف خط م د بمثله. ولأن خط م هـ	ب ل، كان سطح نصف ب ل في د هـ أصغر من مربع نصف القطر وأكثر من مربع د م، وذلك لأن مثلّثي د ب م ب هـ د متشابهان لكون زاويتي د م ب ه د ب قائمتين وزاوية ب مشتركة، فنسبة ب م إلى م د كنسبة ب د إلى د هـ. فـ ب م – أعني نصف ب ل- في د هـ مساوٍ لـ ب د في م د. و ب د في م د أصغر من مربع ب د وأعظم من مربع م د. فإذن نصف ب ل في نصف القطر وفي وتري ط ز ح ل جميعاً أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع د م.	"وإن أخرجنا ...". و يكتب "خطّا ... هـ ب د" بدلاً من "عموداً ... ب هـ د". في الجملة الأخيرة، يتّخذ نسبة مختلفة عن النسبة التي اتخذها بنو موسى. الصيغة اللاتينيّة تنقل النص العربي حرفيّاً مع اختلافات بسيطة. مثال على ذلك: لا وجود في النص العربي لـ "في هذا الشكل" ("in hac figura") وكذلك يظهر المثنّى " in duas cordas" جمعاً في النص العربي. يضيف الطوسي هنا تعليلاً لتشابه المثلّثين، وهذا التعليل لا وجود له، لا في النصّ العربي ولا في النصّ اللاتيني. ولخّص بعد ذلك نصّ بني موسى، الذي بدا له أطول ممّا يلزم. أمّا جيرارد فتبع النصّ العربي خطوة خطوة. فالعبارة: "propterea … longior DE" التي كان عليها أن تكون ترجمة للعبارة "من أجل أن هذه جميعاً مثل د هـ وخط ب هـ أطول من د هـ"، غائبة عن النصّ العربي. ومن الصعب معرفة ما إذا كان ذلك نقصاً أم أنّه إضافة لا لزوم لها قام بها المترجم أو أحد النساخين. والاختلاف الثاني هو التالي: وردت في النص العربي عبارة "الخطوط ل ح و ز ط و د ب"، بينما يوضّح النصُّ اللاتيني مردّداً "duas cordas … diametri". أخيراً يكتب جيرارد العبارة: "Et similiter …" التي هي ترجمة لِـ "كذلك"، وهذا خطأ من النسّاخ، إذ تجب قراءتها في الواقع: "ولذلك".

DE, et linea DE est longior EM. Ergo multiplicatio MB in duas cordas ZT, LH et in medietatem diametri coniunctas est maior multiplicatione DM in se.	أصغر من وتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعة، من أجل أن هذه جميعاً مثل خط د د هـ وخط د هـ أطول / من خط م هـ، فتضعيف م ب بوتري ز ط ل ح ونصف القطر مجموعةً أعظم من تضعيف د م بمثله.		
Iam ergo ostensum est quod in omni circulo in quo protrahitur ipsius diametrus deinde dividitur una duarum medietatum ipsius in duo media, postea dividitur una duarum quartarum in divisiones equales quotcunque fuerit et protrahuntur ex punctis divisionum omnium corde in circulo equidistantes diametro, tunc multiplicatio medietatis corde unius sectionum quarte circuli in medietatem diametri et in omnes cordas que protracte sunt in circulo equidistantes diametro coniunctim est minor multiplicatione medietatis diametri in se et maior multiplicatione linee que egreditur ex centro et pervenit ad unam cordarum divisionum quarte circuli et dividit eam in duo media in se. Et illud est quod declarare voluimus.	فقد استبان أن ... تضعيف نصف وتر قسم من أقسام ربع الدائرة بنصف القطر وبجميع الأوتار الموازية للقطر أقلُّ من تضعيف نصف القطر بمثله وأعظمُ من تضعيف الخط الذي خرج من المركز وينتهي إلى وتر من أوتار أقسام ربع الدائرة ويقسمه بنصفين بمثله؛ وذلك ما أردنا بيانه.	فكل دائرة يخرج قطر فيها وبنصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ويخرج من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح نصف وتر أحد تلك الأقسام في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع العمود الخارج من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب.	يستعيد الطوسي هنا بلغته، خلاصة بني موسى، دون أن يغفل أيّاً من عناصرها. تجدر الإشارة إلى أنّه أبدل كلمة "تضعيف" بكلمة "سطح" ذات المعنى الهندسيّ. وفي هذا الاستشهاد تنقص جملة ذكَر الطوسي بها ونقلها جيرارد، وهي: "كل دائرة إذا أخرج قطرها وقسم أحد نصفيها بنصفين، وقسم أحد الربعين بأقسام كم كانت، وأخرج من نقط الأقسام أوتار موازية للقطر ...". ويُحتَمل أن تكون هذه الجملة قد أُهمِلت، من قِبل الكاتب المجهول الذي أعطى الاستشهاد.
Sit itaque angulus ABG in primis minor recto. Et accipiam ex duabus lineis BA, BG duas quantitates equales, que sint quantitates BD, BE. Et revolvam super centrum B et cum rnensura longitudinis BD circulum DEL. Et extendam lineam DB usque	فلتكن الزاوية المفروضة زاوية ا ب جـ؛ ونأخذ من خطيها مقدارين متساويين وهما ب هـ ب د، وذلك بأن نتخذ نقطة ب مركزاً وندير ببعدهما دائرة	فلتكن الزاوية ا ب جـ، ولتكن أوّلاً أقلّ من قائمة. ونأخذ من خطي ب ا ب جـ مقداري ب د ب هـ متساويين. ونرسم على مركز ب وببعدهما دائرة	إنَّ نصّيّ الطوسي وجيرارد قريبان جدّاً من بعضهما حتى أنَّه يُخيّل إلينا أنّ الكاتب المجهول قد نقل بداية الاستشهاد بطريقة تفتقر إلى الدِّقّة. وهكذا نتحقّق، بعد قراءة الكلمات الأولى في النسخة اللاتينيّة وفي تحرير الطوسي، أنَّ الدراسة تبدأ بتناول الزاوية الحادّة. وهذه العبارة تظهر لاحقاً في الاستشهاد. من جهة أخرى. يستخدم

تحرير الطوسي عبارة كما تستخدم النسخة اللاتينيّة خطَّيْ الزاوية "Et accipiam … equales"، بينما نقرأ فقط في النص المذكور عبارة: "خطّيها". لكن هذه الاختلافات لا تُضعف اليقين بأنّ الأمر يتعلّق بنفس النصّ.	د هـ ل، ونخرج د ب إلى ل، ونقيم ب ز عموداً على ل د، ونصل هـ ز ونخرجه إلى ح لا إلى غاية.	د ل هـ. ونخرج خط د ب إلى ل. ولتكن أوّلاً أقلّ من قائمة. ونخرج ب ز يقوم على خط د ل على زاويتين قائمتين، ونخطّ خطّ ه ز وننفذه إلى ح، ولا نجعل له غاية محدودة.	*ad L. Et protraham lineam BZ erectam super lineam LD orthogonaliter. Et lineabo lineam EZ et extendam ipsam usque ad H. Et non ponam linee ZH finem determinatum.*
يسترجع الطوسي هنا، بلغته، نص بني موسى الذي ينقله جيرارد حرفيّاً، باستثناء بعض الاختلافات التي لا تُذكر. وهو يغفل عبارة واحدة فقط، في أعقاب "ad partem puncti L" ليقول "على محيط الدائرة". لنذكر بأنّ الطوسي يكتب "والزاوية ... ثلث زاوية د ب هـ" وهذا القول غائب عن الاستشهاد وعن النسخة اللاتينيّة. حواشي النص II: ٢ يتحرك: يحرك – ٣ لمحيط الدائرة: لخط با زاي / ز هـ ح: زاي – ٤ تزال تتحرك: نزال يتحرك – ٥ خط ب ز: محيط الدائرة / الذي: الذين ٦ – ز: عين.	ونفصل من ز ح ز ع مثل نصف قطر الدائرة. فإذا توهمنا أن ز ح يتحرك إلى ناحية نقطة ل ونقطةَ ز لازمة للمحيط في حركتها وخط ز هـ ح في حركته لا يزال يمر على نقطة هـ من دائرة د هـ ل، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، وجب حينئذٍ أن تكون القوس التي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د هـ. والزاوية التي توترها هذه القوس ثلث زاوية د ب هـ.	ونأخذ من خط ز ح مثل نصف قطر الدائرة، وهو ز ع. فإذا توهمنا أن خطّ ز ع يتحرك على محيط الدائرة إلى ناحية ل <و> نقطةَ ز لازمة لمحيط الدائرة في حركتها وخط ز هـ ح لا يزال يتحرك على نقطة هـ <من دائرة د هـ ل>، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز، حينئذٍ وجب أن يكون القوس الذي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هو ثلث قوس د هـ.	*Et accipiam de !inca ZH equale medietati diametri circuli, quod sit linea ZQ. Quando ergo ymaginamus quod linea ZEH movetur ad partem puncti L et punctum Z adherens est margini circuli in motu suo et linea ZH non cessat transire super punctum E circuli DEL et ymaginamus quod punctum Z non cessat moveri donec fiat punctum Q super lineam BZ, oportet tunc ut sit arcus qui est inter locum ad quem pervenit punctum Z et inter punctum L tertia arcus DE; cuius demonstratio est:*
في الجزء الأوّل من هذا المقطع، نرى أنّ الطوسي يتبع عن قرب نص بني موسى. فنرى تشابه الجملة الأولى مع جملة بني موسى، مع تغييرين لا يذكران، هما: "ليكن" بدل "أن نجعل" و"لكونه" بدل "من أجل". بعد ذلك، يصوغ الطوسي بقيّة المقطع، مع بقائه قريباً من نصّ بني موسى. وتبقى ترجمة جيرار حرفيّة. مع ذلك، نجد الجملة: "عندما تصير نقطة ع على خط ب ز : apud cursum puncti Q super lineam BZ"	برهانه: ليكن الموضع الذي انتهت إليه ز نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع ب ز على س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة لكونه مساوياً لـ ز ع. ونخرج من المركز قطراً يوازي ط هـ وهو م ب كـ. ونخرج م ط، فـ ط س مساوٍ	برهان انّا نجعل الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز عند نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع خط ب ز / على نقطة س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة من أجل أنه مساوٍ لخط ز ع. ونخرج من ب خطّاً موازياً لخط ط س	*Quod ego ponam locum ad quem pervenit punctum Z apud cursum puncti Q super lineam BZ apud punctum T. Et protraham lineam TE secantem lineam BZ super punctum S. Ergo linea TS est equalis medietati diametri circuli, propterea quod est equalis linee ZQ. Et protraham ex B lineam equidistantem linee TS, que sit linea MBK. Et protraham*

lineam ex T ad M. Ergo linea MT et linea TS sunt equidistantes duabus lineis MB, BS et equales eis. Ergo linea MT est equidistans linee BS et equalis ei. Sed linea BS est perpendicularis super diametrum LD. Ergo corda arcus TM erigitur ex diametro LD super duos angulos rectos. Ergo dividit diametrus LD cordam MT in duo media et dividit propter illud arcum MT in duo media super punctum L. Verum arcus ML est equalis arcui DK. Ergo arcus DK est equalis medietati arcus MT. Sed arcus MT est equalis arcui EK, propterea quod linea TE equidistat linee MK. Ergo arcus DK est tertia arcus DE. Et similiter angulus DBK est tertia anguli ABG.	وهو م كـ ، ونخرج خطاً من ط إلى م؛ فخطا م ط ط س موازيان لخطي م ب ب س ومساويان لهما. وخط ب س عمود على قطر ل د، فوتر قوس م ط يقوم على قطر ل د على زاويتين قائمتين. فقد قسم قطرُ ل د وترَ م ط بنصفين، وقسم لذلك قوسَ م ط بنصفين على نقطة ل. ولكن قوس م ط مساوية لقوس كـ هـ من أجل أن ط هـ موازٍ لخط م كـ ، إذاً <قوس د كـ> ثلث قوس د هـ. وكذلك زاوية كـ ب د ثلث زاوية هـ ب د.	ومواز لـ م ب ، و م ط موازٍ ومساوٍ لـ ب س، و ب س عمود على ل د، فـ م ط عمود على ل د، ولذلك يكون منصفاً بالقطر، ويكون م ل مثل ل ط و د كـ مثل م ل و م ط مساوٍ لـ كـ هـ فـ د كـ مثل نصف كـ هـ و <مثل> ثلث د هـ ، وزاوية كـ ب د ثلث زاوية ا ب جـ ؛ وذلك ما أردناه.	غائبة عن النص العربي. والجملة الثانية الغائبة عن النصّ العربي هي: "فخط م ط موازٍ ومساوٍ لخط ب س : Ergo linea MT est equidistans line BS et equalis ei" يبدو انّ هذه الإضافة تعود إلى المخطوطة المستخدمة من قِبل جيرارد أو إلى جيرارد نفسه. وأخيراً، نجد في النص اللاتيني الجملة الزائدة التالية: "ولكن قوس م ل مساوية لقوس د كـ ، فقوس د كـ مساوية لقوس م ط " "Verum ... MT"، وهي بشكل بديهيّ ناتجة عن قفزة من سطر إلى سطر بسبب تشابه الكلمات في المخطوطة التي يذكرها الكاتب المجهول؛ وتعود هذه الزيادة إلى هذا الكاتب المجهول أو إلى ناسخ مخطوطته. حواشي النص II: ١ ز: عين.

١-١-٤ عنوان كتاب بني موسى وتاريخه

لنتناول، الآن، عنوان الكتاب. لا تقدّم لنا النسخة اللاتينيّة أيّ فائدة تُذكر بهذا الخصوص، إذ إنّها تحمل، بكل بساطة، العنوان التالي:

Verba filiorum Moysi filii Sekir ...

أي "كلمات أبناء موسى بن شاكر...". والعنوان، وفقاً لتحرير الطوسي، هو: "كتاب في معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكُرِّيّة". ولكنَّ العنوانَ الذي يورده كُتّابُ السِّيَر القُدامى يختلف قليلاً عن هذا العنوان الأخير. ففي القرن العاشر، يعطي النديم لكتاب بني موسى العنوان التالي: "كتاب مساحة الأكر، وقسمة الزوايا بثلاثة أقسام متساوية ووضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى على قسمة واحدة". أمّا القفطي الذي كتب بعد النديم، فهو يورد قائمة كتابات بني موسى التي وضعها النديم، ثمَّ يُعطي بلا مبالاة العنوان التالي لكتاب بني موسى: "كتاب مساحة الكرة وقسمة الزاوية بثلاثة أقسام متساوية". وفي الواقع يعكس العنوان الذي ذكره النديم، وبالترتيب، محتوى كتاب بني موسى كما وصفوه بأنفسهم في الخلاصة التي حذفها الطوسي واحتفظت بها النسخة اللاتينيّة؛ بينما يبدو أنّ مصدر العنوان الذي وضعه الطوسي هما السطران الأوّليان من الكتاب، اللذان احتفظت بهما النسخة اللاتينيّة. فقد تحدّث بنو موسى في بداية مؤلّفهم عن "... معرفة مساحة الأشكال المُسطَّحة وحجم الأجسام"،

"*...scientie mensure figurarum superficialium et magnitudinis corporum*" .

ولكنَّ هذه الأجسام هنا، هي في أهمِّ قسم منها كرويّة. يلزمنا إذن المزيد من المعلومات لإيضاح هذه الفروق بين العنوانين، فكلٌّ منهما يوضِّح قسماً من محتويات الكتاب.

ولسنا أوفر حظّاً عندما يتعلّق الأمر بتحديد تاريخ تأليف هذا الكتاب. فالابن البكر، محمد بن موسى، تُوُفِّيَ سنة ٨٧٣ للميلاد. وكان الحسن، وهو الأخ الأصغر، قد تُوفِّيَ أوّلا. نحن نعلم فقط أنّ الكتاب كُتِب بعد ترجمة "كرويات" منالاوس وكتابَي "مساحة الدائرة" و"الكرة والأسطوانة" لأرشميدس. ولكنّنا نعلم أنّ ترجمة

"الكرويّات" قد تـمّت قبل عـام ٨٦٢ للميلاد، إذ إنّ مترجِمَها قسطا بـن لوقا قدّمها للأمير أحمد الذي صار الخليفة أحمد في السنة نفسها. ولقد سبق أن بيّنا وجودَ ترجمة أولى لكتاب "مساحة الدائرة" قبل عام ٨٥٦ للميلاد[٤٤]. وليس هناك معلومة حاسمة تـُتيح لنا بتقصير الفترة التي قد كـُتِبَ فيها كتاب بني موسى.

أمّا بخصوص النصّ الذي نـُحقّقه هنا، أيْ تحرير الطوسي لكتاب بني موسى، فنحن نعلم بواسطة الجُمَل الختامية لمجموعة كاملة من المخطوطات، أنـّه وُضع إمّا في عام ٦٥٣م/١٢٥٥هـ أو في عام ٦٥٨م/١٢٦٠هـ، تبعاً لقراءة عبارة "خنجـ" أو "خنح"، وهي عبارة كـُتبت وفق نظام الترقيم المعروف بالـ"جُمَّل" للدلالة على الأعوام[٤٥]. كَتب الطوسي هذا النصّ إذا، إمّا أربع عشرة سنة وإمّا تسع عشرة سنة قبل وفاته. وهذا التحرير وصل إلينا عِبر عدد من المخطوطات. وليس ما يدعو إلى الاستغراب في ذلك، إذ إنّ هذا التحرير كان في عداد ما سُمِّيَ بكتب "المتوسّطات"، وهي كتب موجّهة، كما سبق أن قلنا، إلى جمهور أوسع بكثير من جمهور الرياضيين من المرتبة الأولى. ولقد نالت كتبُ "المتوسّطات" هذه، حظوة كبيرة أمَّنت لها البقاء، وهذا ما لم تحظَ به دائماً أعمال البحث الأكثر تقدّماً. لذا بقي عددٌ كبير من مخطوطاتها إلى يومنا هذا؛ فاحتوت المكتبات الكبيرة - وكذلك المكتبات الأقل أهميّة- على نسخة واحدة أو عدّة نسخ من "كـُتـُب المتوسّطات" هذه. ولم تَخـْلُ المجموعات الخاصة من المخطوطات من بعض مخطوطات هذه "المتوسِّطات".

إنَّ تحديد أمكنة كلِّ هذه المخطوطات، في الظروف الحالية، مستحيلٌ؛ أمّا المقابلة فيما بينها كلّها فهو مطلبٌ غير معقول. لِذا، لم أستطع الحصول، من بين بضعة العشرات من مخطوطات هذا النصّ التي وقعت بين يديّ، سوى على ستّ وعشرين من نـُسَخِها لأسباب مختلفة، لا مجال هنا لذكرها. ولكنّ هذا العدد الذي لا يستهان به، لا يشكّل سوى جزءٍ بسيط من عدد النسخ الموجودة في أنحاء المعمورة؛ غير أنـّنا

---

[٤٤] انظر:
R. Rashed, "Al-Kindī's Commentary on Archimedes' 'The measurement of the circle'", *Arabic Sciences and Philosophy*, 3.1 (1993), pp. 7-53.

[٤٥] نحن أمام مجموعة من خمسة أحرف تتيح قراءة تاريخين ممكنين: الاثنين ٢٧ تموز ١٢٦٠ أو الاثنين ٢٠ أيلول ١٢٥٥. وهذا التاريخ الأخير يبدو أكثر واقعيّة، إذا أخذنا بعين الاعتبار مجموعة المخطوطات.

نأمل أن نحقّق النصّ بكثير من الدِّقّة ، استناداً إلى هذه المخطوطات الستّ والعشرين، المبعثرة على قارّات ثلاث. ولن أخاطر إذا قلت إنّ استخدام مخطوطات إضافيّة لن يُقدِّم عناصر جديدة من شأنها تحسين التحقيق بشكل ملموس، إلا إذا تمّ العثور بالطبع على تحرير الطوسي المكتوب بيده أو على ما هو أفضل من ذلك، أي على نصّ بني موسى نفسه. ولم يكن إصراري على نقل كلّ الروايات المختلفة لهذه المخطوطات، في الحواشي، إلا من أجل مساعدة الباحثين الآخرين على الذهاب إلى أبعد ممّا وصلت إليه، عن طريق استخدام المزيد من النسخ. وحتّى لو بدا هذا الجهد غير مُجدٍ، فإنّه قد يتيح –إذا توفرّت الوسائل اللازمة والمثابرة- تحديد أمكنة كلّ المخطوطات المتواجدة وإعادة نقلها لمراجعتها ومقابلتها فيما بينها وصولاً إلى إتمام تاريخ التقليد المخطوطيّ. ولكنّ تنفيذ هذا المشروع غير ممكن الآن أو في المستقبل القريب.

وإن بدا لنا النصُّ المحقّق هنا مؤكّداً، فإنّ تاريخه لم يزل تخمينيّاً. ولقد اقتصرت محاولتنا على تصنيف المخطوطات الستّ والعشرين، ولن نعطي، نظراً إلى طبيعة هذا الكتاب، الجداولَ المُرقّمة العديدة التي أتاحت تحقيقها.

ونُقدِّم فيما يلي قائمة بهذه المخطوطات:

١- [A] إسطنبول، عاطف ١٤/١٧١٢، الأوراق ٩٧ظ-١٠٤ظ.

٢- [B] برلين: *Berlin, Staatsbibliothek, or. quart.* 1867/13، ١٥٦ظ-١٦٤ظ.

٣- [C] إسطنبول، جار الله (*Carullah*) ١٥٠٢، الورقات ٤٢ظ-٤٧ظ.[٤٦]

٤- [D] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٣/٣٤٥٣، الأوراق ١٤٨و-١٥٢ظ.[٤٧]

٥- [E] إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٥/٣٤٥٦، الأوراق ٦١ظ-٦٤ظ.[٤٨]

---

[٤٦] المقصود مجموعة منقولة عن النسخة العائدة إلى عالم الفلك الشهير قطب الدين الشيرازي، كما يؤكّد الناسخ ابن محمود بن محمد محمد الكُنياني. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (كلُّ صفحة تحتوي ٢٥ سطراً وهي بقياس 25,5×17,9 سم: 17,2×11,2 سم للنص).

[٤٧] مخطوطة منسوخة بيد عبد الكافي عبد المجيد عبد الله التبريزي عام ٦٧٧ في بغداد. وهذه المخطوطة كانت عام ٨٤٨ بحوزة فتح الله التبريزي. والمخطوطة مكتوبة بالخط النسخي (الصفحة 17,1×13,2 سم؛ النص 13,9×9,6 سم). يعود ترقيم الأوراق إلى عهد قريب.

٦- [F] فيينـا:(*Vienne, Nationalbibliothek, Mixt* 1209/13)، الأوراق ١٦٣ظ-١٧٣ظ

٧- [G] لنـدن: (*Londres, India Office* 824/3, (N° 1043) 50r-52v)[٤٩]، الأوراق ٣٦و-٣٩و، ٥٠و-٥٢ظ.

٨- [H] طهران، سِبَهسالار ٢٩١٣، الأوراق٨٦ظ-٨٩ظ.

٩- [I] طهران، ملّي ملك ٣١٧٩، الأوراق ٢٥٦ظ-٢٦١ظ، ٢٦٤و-٢٦٧ظ.

١٠-[J] باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٦٧[٥٠]، الأوراق ٥٨ظ-٦٨و.

١١- [K] إسـطنبول، كوبرولـو (Koprülü) ١٤/٩٣٠، الأوراق ٢١٤ظ-٢٢٧و (أو ٢١٥ظ-٢٢٨و حسب ترقيم آخر).[٥١]

١٢- [L] إسـطنبول، جـار اللـه (Carullah) ٣/١٤٧٥، الأوراق ١ظ-١٤ظ (الأوراق غير مرقّمة).

١٣- [M] مشهد، آستان قدس ٥٥٩٨، الأوراق ١٨-٣٣.[٥٢]

١٤- [N] نيويورك:

(*New York, Columbia University, Plimpton*, Or 306/13)،

الأوراق١١٦و-١٢٢ظ[٥٣]

---

[٤٨] نُسِخَ أحد نصوص هذه المجموعة في ١٢ ربيع الأوّل عام ٦٥١ (انظر الورقة ٨١ظ). والخط هوالنستعليق (الصفحة 25,5×11,3 سم؛ النص 19,4×8,9 سم). يعود ترقيم الصفحات إلى عهد قديم.

[٤٩] تحتوي هذه المخطوطة فقط على برهان الخازن للقضيّة ٧ (الورقات ٣٦و–٣٧و)، تتبعه القضيّة ٧ لبني موسى (الورقات ٣٧و–٣٩و)، والقضيّة ١٦ (الورقات ٥٠و–٥٢ظ). لنذكر وجود تفسيرات عديدة كُتبت بين السطور لأحمد بن سليمان، وهو حفيد الناسخ محمد رضا بن غُلان محمد بن أحمد بن سليمان. يعود تاريخ هذه المجموعة إلى ذي الحجة ١١٣٤ هـ. انظر:

Otto Loth,, *A catalogue of the Arabic Manuscripts in the Library of the India Office* (London, 1877), pp. 297-299.

[٥٠] راجِع:

M. Le Baron de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale* (Paris, 1883-1895).

[٥١] راجِع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، أعدّه د. Ramazan Şeşen و Cevat Izgi و Cemil Akpinar، وقدّمه د. إكمال الدين إحسان أوغلو، مركز البحث في التاريخ الإسلامي، فن وثقافة، ٣ مجلّدات. (اسطنبول، ١٩٨٦)، المجلّد الأوّل، ص ٤٦٣–٤٦٧. لنذكر أنّ هذا المخطوط يعود إلى الرياضي والفلكي تقي الدين بن معروف.

[٥٢] انظر أحمد ج. معاني، "فهرست كتب خطّي كتابخانة آستان قدس" (مشهد، ١٣٥٠/١٨٧٢)، المجلّد الثامن، الرقم ٤٠٣، ص. ٣٦٦–٣٦٧.

[٥٣] الكتابة بالخطّ النسخي (قياس الصفحة 20×15 سم؛ ٢٧ سطراً في الصفحة).

١٥- [O] أكسفورد: (*Oxford, Bodleian Library, Marsh* 709/8)[٥٤]، الأوراق ٧٨و-٨٩ظ.

١٦- [P] إسطنبول، كوبرولو ١٤/٩٣١، الأوراق ١٢٩و-١٣٦ظ.[٥٥]

١٧- [Q] القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٢٦ظ-٣٣ظ.[٥٦]

١٨- [R] طهران، مجلس شورى ٣/٢٠٩، الأوراق ٣٣-٥٤.[٥٧]

١٩- [S] إسطنبول، سليمانيّة، أسد أفندي ٢٠٣٤، الأوراق ٤ظ-١٥ظ.[٥٨]

٢٠- [T] طهران، مجلس شورى ٣٩١٩، الأوراق ٢٧٢-٢٩٨.

٢١- [U] طهران، دنيشكا ١٣/٢٤٣٢، الأوراق ١٢٣-١٣٧ (١٤٤ظ-١٥١ظ حسب ترقيم آخر).[٥٩]

٢٢- [V] إسطنبول، سليمانيّة، آيا صوفيا ٢٧٦٠، الورقات ١٧٧و-١٨٣ظ.

٢٣- [W] إسطنبول، حاجي سِليم آغا ٧٤٣ (*Haci Selimaga*)، الأوراق ٧١ظ-٨١ظ.

٢٤- [X] إسطنبول، بشير آغا (*Beşiraga*) ١٤/٤٤٠، الورقات ١٦٢ظ-١٧١ظ.[٦٠]

٢٥-[Y] كراكوفيا: (*Cracovie Biblioteka Jagiellonska*)[٦١]، الأوراق ١٨٣ظ-١٩٤ظ.

---

[٥٤] راجع:
Joanne Uri, *Bibliothecae Bodleianae Codicum Manuscriptorum Orientalium* Oxonii, 1787), p. 208.

[٥٥] راجع *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*، المجلّد الأوّل، ص ٤٦٧-٤٧٢.

[٥٦] لوصف هذه المخطوطة، انظر كتابنا *Géométrie et dioptrique*، ص. CXXXVI. المخطوط غير كامل وينتهي عند القضيّة ١٦. وكتابنا المذكور تُرجِم إلى العربيّة تحت عنوان "علم المناظر وانعكاس الضوء–أبو يوسف يعقوب بن اسحق الكندي". ترجمه د. نزيه المرعبي (فريق الدراسة والبحث في التراث العلمي العربي) وصدر عن مركز دراسات الوحدة العربيّة، بيروت، ٢٠٠٣.

[٥٧] انظر *Catalogue des manuscrits persans et arabes de la Bibliothèque du Madjless* (قائمة المخطوطات الفارسيّة والعربيّة لمكتبة المجلِس) لِـ Y.E. Tessami (ي. أ. تسّامي)، منشورات المكتبة (طهران، ١٩٣٣)، المجلّد الثاني، ص. ١١٧-١١٨. لنذكر أنّ هذا المخطوط تنقصه الصفحات من ص. ٧٥.٢ إلى ص. ٩١.٣ أي القضيّتان ٦ و ٧.

[٥٨] خُطَّ هذا النص بيد مختلفة عن تلك التي نسخت باقي المجموعة، كما أنّ الورق المستعمل مختلف، إنّه إذاً نصٌّ مضاف. نجد في الصفحة الأولى اسم الرياضي ابن إبراهيم الحلبي. الكتابة بالخطّ النسخي (الصفحة 22,2×12,7 سم والنص 14,3×6,2 سم).

[٥٩] انظر *Catalogue des manuscrits de la bibliothèque centrale*، (قائمة مخطوطات المكتبة المركزيّة) جامعة طهران، المجلّد التاسع، ص ١١٠٠-١١٠١.

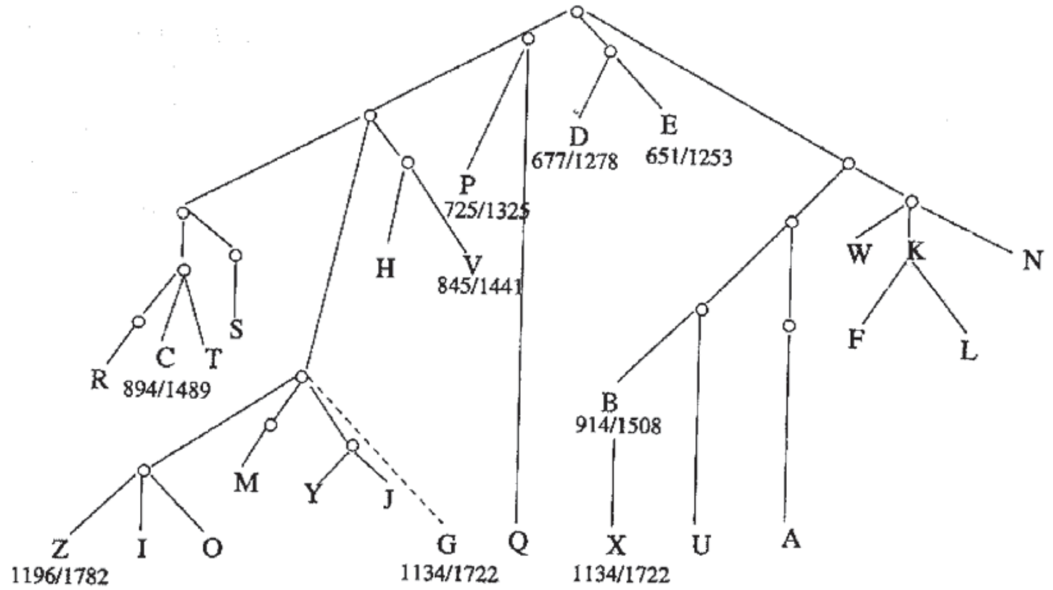
[٦٠] تعود النسخة إلى بداية ذي القَعدة من العام ١١٣٤هـ. و الكتابة بخطّ "نسخي" ومتقنة جدّاً (الصفحة 28,2×15,7 سم).

[٦١] تُوافق هذه المخطوطة المخطوطة التالية: (MS Berlin, Staatsbibliothek, n° 5938 (= Or. fol. 258، التي فُقدت من المكتبة عقب عمليّات الإجلاء، إبّان الحرب العالميّة الثانية. يعود الفضل في هذه المعلومة إلى د. Hars Kurio الذي نقدّم له جزيل الشكر. لوصف هذه المخطوطة، انظر W. Ahlwardt، *Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin XVII*، Arabische Handschriften 5 (Berlin, 1893)، ص ٣١٣.

٢٦- [Z] مانشستِر[٦٢]:

Manchester, John Rylands University Library, 350, fols 372^{v} -377^{v} (1. 4), 388^{r} (1. 4), 388^{v}-391^{r} (1. 3), 379^{r} (1.4)-380^{v} (1.4), 385^{r} (1. 3) ،385^{v}-386^{v} (1. 4), 382^{r}-385^{r} (1. 3), 380^{v}-382^{r}, 386^{v} (1.4), 387^{v}-388^{r}, 391^{r-v}

إنّ دراسة الروايات المختلفة لهذه المخطوطات أو للحوادث - الإغفالات، الإضافات، الأخطاء، الخ.- ثناءً فيما بينها، تتيح لنا رسم شجرة التسلسل المخطوطي المذكورة أعلاه لكتاب بني موسى:



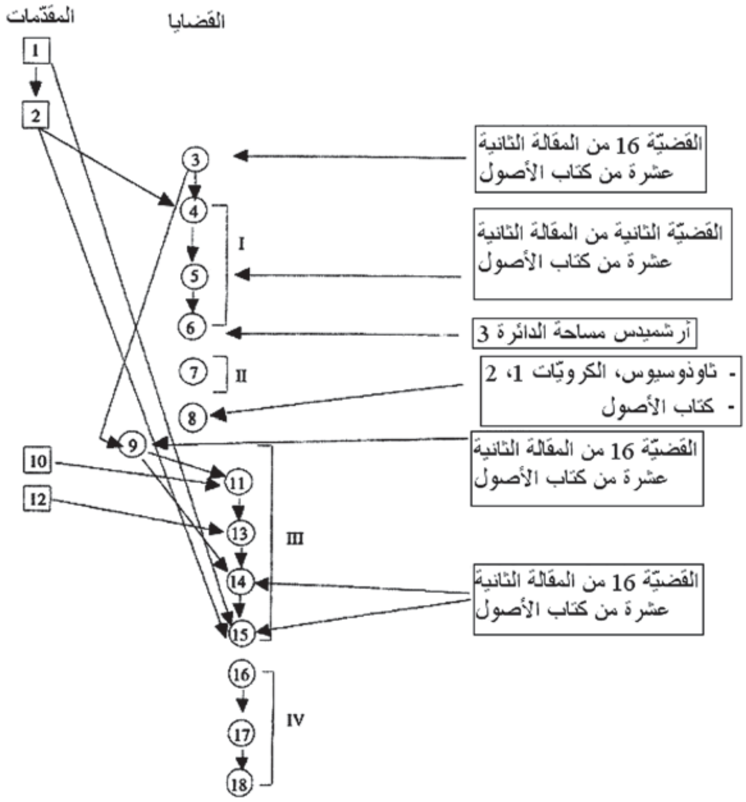
[٦٢] ورقات هذه المخطوطة غير مرتّبة. الواضح أنّ الناسخ قد نقل نموذجاً غير مرتّب، يحوي صفحات مقلوبة.

١-٢ الشرح الرياضي

١-٢-١ تنظيم كتاب بني موسى وبنيته

يدخل كتاب بني موسى، " كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرّيّة"، ضمن إطار التقليد الأرشميدي، غير أنّ تحريره يختلف عن تحرير كتاب "الكرة والأسطوانة" أو أيّ مؤلَّف آخر لأرشميدس. وصحيح أنّ الأفكار الأساسيّة فيه تعود إلى أرشميدس إلا أنّ بني موسى لم يسلكوا الطريق التي رسمها هذا الأخير، بل قاموا بالبحث عن طريق أسهل وأقصر. فيكون كتابهم، بهذا المعنى فقط، أرشميديّاً. يبقى أنّ بنية كتاب بني موسى وكذلك الطريقة التي اتّبعوها تختلفان عن البنية والطريقة الموجودتين في مؤلَّفات أرشميدس حول الموضوع نفسه. هذه الوَحْدَة في الأفكار إضافة إلى الاختلاف في البنية وفي طريقة البرهان، تميّز الوضع الخاص لهذا الكتاب الذي يُعتَبَر أحد أوائل الأبحاث الرياضيّة الأرشميديّة بالعربيّة.

لننظر أوّلاً إلى بنية هذا الكتاب. إنّه يتألّف من ١٨ قضيّة تنقسم إلى عدّة مجموعات. القضايا الثلاث الأولى مقدّمات في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التالية تتناول قياس الدائرة وحساب π؛ القضيّة السابعة تـُعيد برهان صيغة إيرن الإسكندري الخاصّة بمساحة المثلّث؛ القضيّة الثامنة تبحث في وَحْدانيّة الكرة المارّة بأربعة نقاط غير موجودة في نفس السطح المستوي؛ القضايا الثلاث التالية تتناول مساحة السطح الجانبيّ لمخروط دوراني ولجذع مخروط؛ القضيّة الثانية عشرة هي مقدّمة في الهندسة المستوية؛ القضايا الثلاث التي تليها تتناول مساحة سطح الكرة وحجمها؛ وأخيراً كـُرّست القضايا الثلاث الأخيرة لإيجاد متوسّطين ولتثليث الزاوية. ويمكننا تمثيل العلاقات التضمينيّة المنطقيّة لهذه القضايا بالبيان الوارد على الصفحة التالية. يظهر، إذاً، وبمجرّد نظرة إلى هذا البيان، أنّ بني موسى تناولوا في هذا الكتاب، أربعة مواضيع هي: مساحة الدائرة، ومساحة المثلّث بواسطة صيغة إيرن الإسكندري، ومساحة سطح الكرة وحجمها، ومسألة المتوسّطَين وتثليث الزاوية. لكنَّ المرءَ قد يفاجأ، للوهلة الأولى على الأقلّ، بعدم التجانس بين القضيّة السابعة من جهة والقضايا الثلاث الأخيرة من جهة أخرى. يظهر، بالإضافة إلى ذلك، عدمُ



التجانس هذا، في كلّ مرّة من خلال انقطاع في بنية الكتاب. لكنَّ هذه المفاجأة قد تتبدَّد إذا أخذنا حرفيّاً بعنوان الكتاب نفسه، أي إذا اعتبرنا هذا الكتاب "ملخَّصاً" مكرّساً لمساحة الأشكال المستوية والكرويّة، التي كانت تـُعتبَر، في ذلك العصر، أشكالاً مهمّةً أو صعبة في دراستها. مهما يكن من أمر، لا شيء يسمح بالتشكيك بصحّة نسبة هذه القضايا إلى بني موسى أو بانتمائها إلى هذا الكتاب. يؤكّد التقليد المخطوطي العربي وجود هذه القضايا ضمن هذا الكتاب، كما يؤكّد ذلك أيضاً تقليدُ الترجمة اللاتينيّة التي قام بها جيرارد دي كريمون (*Gérard de Crémone*) في القرن الثاني عشر. زيادة على ذلك، تحوي هذه الترجمة اللاتينيّة مقطعاً أخيراً، مهمّاً من الناحية التاريخيّة، يذكّر بنو موسى فيه بالنتائج الرئيسيّة التي تمّ التوصّل إليها؛ وتتطابق هذه النتائج الأخيرة مع نتائج القضايا السابقة. زد على ذلك أنّ بني موسى يختمون المقطع المذكور من النسخة اللاتينيّة، كما يختمون كتابهم، بقول في غاية الأهمّيّة:

"وكلّ ما وَصَفنا في كتابنا فإنّه من عملنا، إلاّ معرفة المحيط من القطر فإنّه من عمل أرشميدس، وإلا معرفة وضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى <الأربعة> على نسبة واحدة، فإنّه من عمل منالاوس، كما مرّ ذِكره".

يجدر بنا الآن، قبل تفحُّص تقييم بني موسى هذا لإسهامهم الخاص، تأكيد وجود القضيّة ٦ والمجموعة الأخيرة من القضايا ضمن كتاب بني موسى. أمّا وجود صيغة إيرن الإسكندري فيه، فهو أمرٌ لا تؤكّده فقط التقاليد المخطوطيّة وما كتبه بنو موسى بأنفسهم وفقاً للترجمة اللاتينيّة، بل يؤكّده أيضاً ملحقٌ غالباً ما كان يُرافق التقليد العربي المخطوطي. وذلك أنَّ هذا الملحقَ يحوي برهاناً آخر، لهذه الصيغة نفسها، منسوباً إلى أبي جعفر الخازن، من أواسط القرن العاشر الميلادي.

هكذا لم يتّخذ كتاب بني موسى أيّاً من رسائل أرشميدس نموذجاً له؛ بل إنـّه يظهر كعمل هدفه معالجة المواضيع الأربعة المذكورة آنفاً. والآن علينا أن نرجع إلى الطريق التي سلكوها.

فهل سلك بنو موسى الطريق الذي خطّه أرشميدس، أم اختاروا طريقاً آخر حسب قولهم؟ تتيح الإجابة عن هذا السؤال تحديدَ المكان الصحيح لبني موسى في التقليد الأرشميدي. إلا أنّ هذه الإجابة تقتضي أن نستعيد، بشكل مُختصر على الأقلّ، الدراسة التي قام بها بنو موسى. فلنبدأ بالمقدّمات التي تخصُّ الهندسة المستوية وبقضايا المجموعة الأولى.

١-٢-٢ مساحة الدائرة

المقدّمة ١ - إذا أحاط مضلّع محيطه p بدائرة نصف قطرها r، تكون مساحته

$$S = \frac{1}{2} p.r.$$

لتكن a_1، a_2، ...، a_n أطوال أضلاع المضلّع التي يبلغ عددها n ؛ فتكون مساحة المضلَّع مساوية لمجموع مساحات الـ n مثلّثاً، حيث يكون r ارتفاع كلّ مثلّث؛ فيكون

معنا: $$S = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2} a_i .r = \frac{1}{2} r.p.$$

إذا أحاط مجسّم متعدّد السطوح مساحته S بكرة نصف قطرها r، يكون حجمه:

$$.V = \frac{1}{3} S . r$$

إذا كان للمجسّم n سطحاً مساحاتها s_1، s_2، ...، s_n على التوالي، يكون حجمُه مجموعَ أحجام الـ n هرماً، حيث يكون r ارتفاع كلّ هرم؛ فنحصل على:

$$.V = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{3} s_i . r = \frac{1}{3} r . S$$

ملاحظة ـ يُفترض أن تكون الصيغة التي تعطي حجم الهرم معروفة، مهما كان شكل القاعدة. توجد هذه الصيغة في المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس.

المقدّمة ٢ ـ إذا أحيط مضلّع محيطه p بدائرة نصف قطرها r، تحقّق مساحته S المتباينة المزدوجة التالية: مساحة الدائرة $< \frac{1}{2} p . r < S$.

لتكن a_1، a_2، ...، a_n أطوال أضلاع المضلّع. وليكن h_i طول العمود الخارج من مركز الدائرة إلى الضلع ذي الطول a_i، ولتكن s_i مساحة القطاع الموافق لهذا الضلع، يكون لدينا:

$$\frac{1}{2} a_i h_i < \frac{1}{2} a_i r < s_i \text{،}$$

ومنها

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} a_i h_i < \frac{1}{2} r \sum_{i=1}^{n} a_i < \sum_{i=1}^{n} s_i \text{،}$$

وهي النتيجة المطلوبة.

وكذلك، إذا أحيط مجسّم متعدّد السطوح له n سطحاً مساحته الإجماليّة S، بكرة نصف قطرها r، يكون: حجم الكرة $< \frac{1}{3} S . r <$ حجم المجسّم.

ويبرهن بنو موسى بعد ذلك القضيّة التالية:

القضيّة ٣ ـ لتكن دائرة محيطها p ولتكن قطعة من خطّ مستقيم طولها l. تكون لدينا حالتان:

أوّلاً: إذا كان $l < p$، يُمكننا رسم مضلّع، محيطه p_n، تحيط به الدائرة بحيث يكون

$$l < p_n < p \text{؛}$$

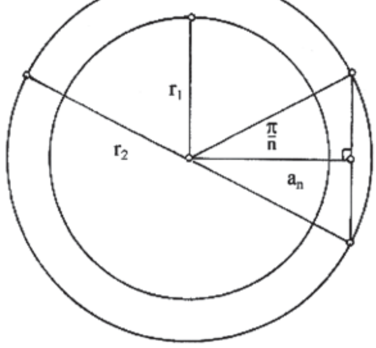
ثانياً: إذا كان $l > p$، يُمكننا إحاطة الدائرة بمضلّع، محيطه q_n، بحيث يكون

$p < q_n < l$.

يستند برهانا الحالتين على وجود دائرة، محيطها l معلوم، وعلى وجود مضلَّع متساوي الأضلاع. يسلِّم بنو موسى بوجود هذه الدائرة. وفيما يخص المضلَّع ، فإنّهم يستخدمون القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "أصول" لأقليدس التي تقول: "لتكن لدينا دائرتان متراكزتان؛ ارسُمْ في الدائرة الكبرى مضلّعاً تكون أضلاعه متساوية الطول ويكون عددها مزدوجاً ولا تلامِس الدائرة الصغرى".[٦٣]

يمكننا على كلّ حال أن نلاحظ أنّه يلزم ويكفي، للحصول على مضلّع متساوي الأضلاع له n ضلعاً ويكون حلاً للمسألة، أن يحقّق عامده* a_n ما يلي

$$r_1 < a_n < r_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2 \cos\frac{\pi}{n} < r_2 \Leftrightarrow \frac{p_1}{p_2} < \cos\frac{\pi}{n} < 1$$ ،



حيث يُشير r_1 و r_2 إلى نصف قطرَي الدائرتين المتراكزتين على التوالي، و p_1 و p_2 إلى محيطهما على التوالي (وجود العدد الصحيح n يتعلّق باتّصال دالّة جيب التمام).

لنأت الآن إلى برهان بني موسى. إنَّهم يتناولون دائرتين متراكزتين ABC و DEG (انظر الشكل، ص. ٩١).

[٦٣] انظر "أعمال أقليدس" (*Les Œuvres d'Euclide*)، ترجمة ف. بيْرار (F. Peyrard) إلى الفرنسيّة (باريس، ١٩٦٦)، ص. ٤٧٠-٤٧١.

* أي العمود الخارج من مركز الدائرة إلى الضلع (المترجِم).

الحالة الأولى: $p < l$، نفترض أنّ p محيط ABC و l محيط DEG

الحالة الثانية: $p > l$، نفترض أنّ l محيط ABC و p محيط DEG.

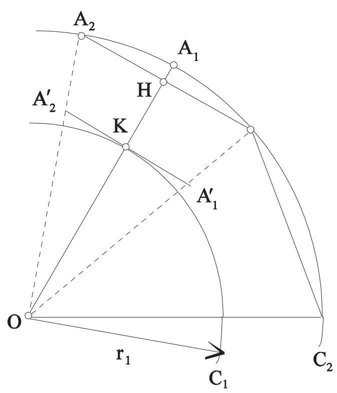
في الحالتين، تكون الدائرة ABC أعظم من الدائرة DEG، وكلّ مضلّعٍ، أكان متساويَ الأضلاع أم لا، محاطٍ بالدائرة ABC بدون أن تلامس أضلاعه الدائرة DEG، يكون محيطه محصوراً بين l و p.

غير أنّه يجب ، للإجابة التامة عن النصف الثاني من المسألة في الحالة $p > l$، أن يؤخذ مضلّعٌ يحيط بالدائرة المعلومة وهي DEG ومحيطها p، بحيث لا تقطع أضلاعه الدائرة ABC؛ وهذا ما يتحقّق باستخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، بالإضافة إلى تحاكٍ معيَّن.

في الواقع، يأخذ بنو موسى في القضيّة ٣، الدائرة C_1 ومحيطها p ويسلّمون بوجود الدائرة C_2 ذات المحيط المعلوم l. وبعد ذلك يتناولون الحالتين التاليتين:

أ) $p < l$. C_2 و C_1 متراكزتان، و C_2 داخل C_1. نريد "رسم" المضلّع P_n ذي المحيط p_n والمحاط بالدائرة C_1 بحيث يكون $l < p_n < p$. يكون المضلّع P_n، المحدّد في القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس والذي يكون P_n محاطاً بـ C_1 دون أن يلامس C_2، حلاً لهذه المسألة.

ب) $p > l$. C_1 داخل C_2. نستطيع أن نرسم، وفقاً للقضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، المضلّع P_n المحاط بـِ C_2 والذي لا يلامس C_1 بحيث يكون : $p < p_n < l$؛ وإذا أردنا إحاطة C_1 بالمضلّع P'_n ذي المحيط p'_n



بحيث يكون $p < p'_n < l$، نستخرج P'_n من P_n بواسطة تحاكٍ، كما يلي:

ليكن $OH = a_1$ عامد المضلّع P_n، فيكون لدينا: $r_1 < OH < r_2$. لنأخذ التحاكي $\left(O, \frac{r_1}{a_1}\right)$، (أي الذي مركزه نقطة O، ونسبته $\frac{r_1}{a_1}$)، فنحصل على P'_n، صورة P_n، بحيث يكون $p < p'_n < p_n < l$. فيكون المضلّع P'_n حلاً لهذه المسألة: فهو "يحيط بـ" C_1 ولا يلامس C_2 (أنظر الشكل)؛ أي أنّ بني موسى، بعد استخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، أكملوا عملهم بتطبيق التحاكي.

يُبرهن بنو موسى، في القضيّة التالية، مستخدمين طريقة البرهان بالخُلف، العبارة التي تعطي مساحة الدائرة: "كلّ دائرة فسطح نصف قطرها في نصف محيطها هو مساحتها".

القضيّة ٤ـ كلُّ دائرة نصف قطرها r ومحيطها p، تكون مساحتها

$S = \frac{1}{2}p.r$. [الشكل، ص. ٩٢]

إذا كان $S < \frac{1}{2}p.r$، يكون $S = \frac{1}{2}l.r$ مع $l < p$، ويمكن أن نرسم مضلّعاً تحيط به الدائرة ويكون محيطه p' بحيث يكون $l < p' < p$ (حسب القضيّة السابقة). وحسب القضيّة ٢، تكون S_1، مساحة هذا المضلّع، بحيث يكون $S_1 < \frac{1}{2}p'.r < S$.

غير أنّ $l < p'$، فيكون $\frac{1}{2}l.r < \frac{1}{2}p'.r$، أي $S < \frac{1}{2}p'.r$، وهذا مخالف لما فرضنا.

إذا كان $S > \frac{1}{2}p.r$، يكون $S = \frac{1}{2}l.r$ مع $l > p$. يمكننا إحاطة الدائرة بمضلّع محيطه p'' بحيث يكون $p < p'' < l$. يكون لدينا إذاً $\frac{1}{2}r.l > \frac{1}{2}r.p''$؛ وهذا خلاف لما فرضنا، لأنّ $\frac{1}{2}r.p''$ هي مساحة المضلّع وهذه المساحة أكبر من $S = \frac{1}{2}l.r$ التي هي مساحة الدائرة.

يمكننا أن نلاحظ أنّ بني موسى لم يعطوا مساحة الدائرة، مقارنة بمساحة شكل آخر، كالمثلّث القائم الزاوية الذي يكون طول أحد ضلعَي الزاوية القائمة فيه مساوياً لنصف القطر ويكون طول الضلع الآخر مساوياً لمحيط الدائرة، وفقاً لتعبير أرشميدس؛ ولكنّهم أعطوا هذه المساحة كحاصل ضرب مقدارين. ومن جهة أخرى، فإنّهم، في برهان القضيّة السابقة، يقارنون p بـp'، $p' < p$ و p بـp''، $p'' > p$، أي أنّهم يقارنون بين أطوال وليس بين مساحات، كما هو الحال عند أرشميدس، للوصول في كلّ مرّة إلى تناقض. أخيراً، يختلف مسعاهم عن مسعى أرشميدس الذي طبّق طريقة الاستنفاد. يتفادى بنو موسى المرحلة الأكثر دقّة في هذه الطريقة[٦٤]، وهي "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية – بِلُغتنا نحن– بفضل القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس، والتي قام برهانها على هذا المرور إلى الحدّ: ($\lim_{n\to\infty} \cos\frac{\pi}{n} = 1$).

يعطي بنو موسى، في نهاية القضيّة السابقة، مساحة القطاع الدائري، دون الإشارة إلى البرهان. وقد تكون طريقتهم مشابهة لتلك التي وردت في القضيّة ٤ نفسها، عبر رسم قطاع مضلّع محاط بالقطاع الدائري؛ وقد تستند طريقتهم على أنّ p'، وهو طول قوس الدائرة، متناسب مع الزاوية المركزيّة α وأنّ مساحة القطاع S' تتناسب مع الزاوية المركزيّة. فإذا كان كلٌّ من S و p مساحة الدائرة ومحيطها على التوالي، و S' و p' مساحة القطاع وطول قوسه، يكون $\frac{S}{S'} = \frac{p}{p'} = \frac{360}{\alpha}$ (حيث تقاس α بالدرجات)؛

وبما أنّ $S = \frac{1}{2}p.r$، يكون $S' = \frac{1}{2}p'.r$.

يريد بنو موسى، في القضيّة التالية، التأكّد من خاصيّة مهمّة:

القضيّة ٥- نسبة القطر إلى المحيط هي ذاتها في كلّ دائرة.[الشكل، ص.٩٤]

يستند بنو موسى على القضيّة ٢، من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"، التي تقول: "إنّ نسبة مساحتي دائرتين تساوي نسبة مربّعَي نصفَي قطرَيْهما".

---

[٦٤] انظر مقال ج. الدبّاغ، "بنو موسى"، *D.S.B*، المجلّد الأوّل، الصفحات ٤٤٣–٤٤٦.

الاستدلال بالخُلف لا يفرض نفسه إذاً، لأنّ القضيّة السابقة بيّنت أنّ $S=\frac{1}{2}p.r$. مع ذلك، يستخدم بنو موسى البرهان بالخُلف.

وينتقلون بعدها، في القضيّة ٦، إلى حساب هذه النسبة بواسطة طريقة أرشميدس كما أكّدوا سابقاً. في الواقع، تتيح هذه الطريقة الحصولَ على حدٍّ أدنى وحدٍّ أعلى لهذه النسبة، وفقاً للتقريب المطلوب، مهما بلغت قيمة هذا التقريب.

يُتْبِع بنو موسى هذه المجموعة المؤلّفة من ست قضايا بقضيّتين معزولتين، قبل العودة إلى مجموعة أخرى مهمّة حول الكرة. أولى هاتين القضيّتين هي صيغة إيرن الإسكندري.

١-٢-٣ مساحة المثلّث: صيغة إيرن

القضيّة ٧- إذا كان p محيط مثلّث طول أضلاعه a و b و c، تتحقّق مساحة هذا المثلّث الصيغة التالية:

$$S^2=\frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right).$$ [الشكل، ص.١٠٠]

ومع ذلك، لا يذكر بنو موسى لا اسم إيرن ولا أيّ اسم آخر. وينسب رياضيّون متأخّرون كالبيروني هذه الصيغة إلى أرشميدس[٦٥]. يُثبت بنو موسى هذه الصيغة ببرهان مختلف عن برهان إيرن؛ ولقد اقتبس هذا البرهان العديد به من خلفائهم مثل فيبوناتشي (*Fibonacci*) ولوقا باتشولي (*Luca Pacioli*) وغيرهم[٦٦]. لكنَّ هذا البرهان لم يلقَ قبولاً لدى البعض الآخر من خلفائهم كالخازن الذي أعطى برهاناً آخر، كما سبق وقلنا، وهو البرهان الذي ورد في أغلب الأحيان في نهاية كتاب بني موسى؛ وهذا ما فعله الشَّنّي فيما بعد[٦٧].

---

[٦٥] البيروني، "استخراج الأوتار في الدائرة"، طبعة أحمد سعيد الدمرداش (القاهرة، بدون تاريخ)، صفحة ١٠٤.

[٦٦] انظر: م. كلاجيت، "أرشميدس في القرون الوسطى" : M. Clagett, Archimedes in the Middle Ages، الملحق الرابع، ص. ٦٣٥-٦٤٠.

[٦٧] أورد البيروني هذا البرهان في رسالته ذات العنوان: "استخراج الأوتار في الدائرة".

القضيّة ٨- إذا كانت النقطة G متساوية البعد عن أربع نقاط من كرة معلومة، على أن لا تقع النقاط الأربع في نفس المستوي، تكون G مركز هذه الكرة.

تعود هذه القضيّة إلى برهان وحدانيّة الكرة التي تمر بأربع نقاط لا تقع في نفس المستوي. يستند بنو موسى، في برهان هذه القضيّة، إلى "الأصول" وإلى القضيّتين الأولى والثانية من "كرويّات" ثاوذوسيوس ("كتاب الأكر")، في ترجمة قسطا بن لوقا[٦٨]. لنلاحظ أنَّ فرضيّة وجود النقطة G داخل الكرة، لا تدخل في برهانهم. يمكننا تلخيص هذا البرهان على الشكل التالي.

لتكن B، C، D و E النقاط الأربع غير الموجودة على نفس المستوي. المستوي $(B,\ C,\ E)$ يقطع الكرة وفق دائرة يمرُّ محورها بمركز الكرة وبالنقطة G إذ أنّ $GB = GC = GE$. [انظر الشكل، ص.١٠٣]

كذلك، يمرّ محور الدائرة (ECD) بمركز الكرة وبالنقطة G. هذان المحوران مختلفان، ليس لهما سوى نقطة واحدة مشتركة هي مركز الكرة؛ إذاً G هي مركز الكرة.

١-٢-٤ مساحة سطح الكرة وحجمها

المجموعة التالية المؤلّفة من سبع قضايا، هي المجموعة المركزيّة في كتاب بني موسى. الهدف من هذه القضايا هو التوصّل إلى تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها. نُذَكّر بأنّنا لاحظنا، فيما يخص مساحة الدائرة، بعض الفروق بين طريقة أرشميدس وطريقة بني موسى. فهل سلك بني موسى طريقهم هذا بشكل متعمّد، أم لأسباب ظرفيّة؟ بتعبيرٍ آخر، هل سنجد الفروق عينها مع طريقة أرشميدس في حالة الكرة؟ للإجابة عن هذا السؤال، نتناول ثانية هذه المجموعة من القضايا.

القضيّة ٩- مساحة السطح الجانبيّ S لمخروط دوراني هي $S = \frac{1}{2}p.l$، حيث يرمز p إلى محيط دائرة القاعدة وl إلى طول الخطّ المولّد. [الشكل، ص. ١٠٤]

---

[٦٨] انظر تحرير الطوسي لترجمة قسطا بن لوقا لِ"كتاب الأكر" لِثاوذوسيوس، طبعة مكتب المنشورات العثمانيّة الشرقيّة (حيدر أباد ١٣٥٨/١٩٣٩).

ليكن المخروط (A, BCD)، ذو الرأس A، والقاعدة BCD، والمحور AE والخطّ المولّد $AB = l$. تكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: إذا كان $S > \frac{1}{2}p.l$، يكون $S = \frac{1}{2}p'.l$ مع $p' > p$.

نحيط الدائرة BCD بمضلّع متساوي الأضلاع يكون محيطه p_1 محقّقاً لـِ $p' > p_1 > p$، وهذا ممكن بموجب القضيّة ٣. ينتج من ذلك هرمٌ رأسه A يحيط بالمخروط وقاعدته ذلك المضلّع. ولكن، لدينا

$$EB \perp HI \text{ و } AE \perp (HIK)،$$

فيكون $AB \perp HI$. وكذلك $AC \perp IK$ و $AD \perp HK$.

فتكون مساحة السطح الجانبيّ للهرم $\frac{1}{2}p_1.l$ مع $\frac{1}{2}p_1.l < \frac{1}{2}p'.l$. غير أنّ $S = \frac{1}{2}p'.l$؛ وهذا مخالف لما فرضنا.

الحالة الثانية: $S < \frac{1}{2}p.l$. يسلّم بنو موسى عندها بوجود مخروط دوراني رأسه A، محوره AE ومساحة سطحه الجانبيّ S'، بحيث يكون $S' = \frac{1}{2}p.l > S$. لتكن الدائرة ML قاعدة هذا المخروط، فيكون $AM > AB$ و $EM > EB$.

نرسم مضلّعاً متساوي الأضلاع محاطاً بالدائرة ML بدون أن يلامس الدائرة ABC؛ وليكن p_1 محيطه، $p_1 > p$. فنستخرج من ذلك هرماً منتظماً، قاعدته متساوية الأضلاع ومساحة سطحه الجانبيّ $S_1 = \frac{1}{2}p_1.AN$، إذا كانت النقطة N منتصف أحد أضلاع المضلّع. لكن $AN > AB$، فيكون $S_1 > \frac{1}{2}p.l$، وبالتالي $S_1 > S'$؛ وهذا مخالف للفرض، لأنّ المخروط، الذي تساوي مساحة سطحه الجانبيّ S'، يحيط بالهرم الذي تساوي مساحة سطحه الجانبيّ S_1.

ومن استحالة الحالتين الأولى والثانية نحصل على النتيجة.

يستخدم بنو موسى، مرّتين على التوالي، فيما يخص السطوح المحدّبة، مصادرة مثيلة لمصادرة أرشميدس الخاصّة بالمنحنيات المحدّبة (أنظر كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، المصادرة الثانية).

ويُدخِل بنو موسى، بعد ذلك، مقدّمة تقنيّة:

المقدّمة ١٠ـ تقاطع السطح الجانبيّ لمخروط دوراني ولمستوٍ موازٍ للقاعدة يكون دائرةً مركزُها على محور المخروط. [الشكل، ص.١٠٦]

لنذكر أنّ المستويين المتوازيين متحاكيان بالتحاكي $\left(A,\frac{AH}{AE}\right)$؛ فالشكل IGH يحاكي إذاً الدائرة ذات المركز E، فهو بالتالي دائرة مركزها H. لكن استدلال بني موسى لا يُدخِل التحويل لذاته.

القضيّة ١١ـ مساحة السطح الجانبيّ لجذع مخروط دوراني قائم، ذي قاعدتين متوازيتين، هي $S=\frac{1}{2}(p_1+p_2)l$، حيث يكون p_1 و p_2 محيطَي القاعدتين على التوالي و يكون l طول الخطّ المولّد. [الشكل، ص.١٠٧]

يكون لدينا: مساحة $(A,GIF)=S_1=\frac{1}{2}AF.p_1$ و مساحة $(A,BCD)=S_2=\frac{1}{2}AB.p_2$،

فتكون مساحة جذع المخروط: $S=\frac{1}{2}(AF.p_1-AB.p_2)=\frac{1}{2}(p_1-p_2)AB+\frac{1}{2}BF.p_1$.

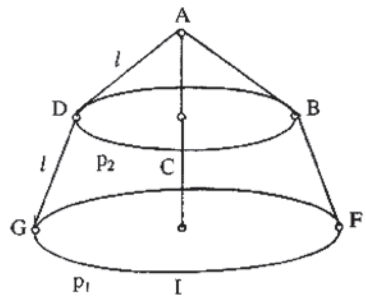
لكنّ لدينا: $\frac{AB}{p_2}=\frac{AF}{p_1}=\frac{BF}{p_1-p_2}$، فيكون $AB\,(p_1-p_2)=BF.p_2$،

ونستنتج $S=\frac{1}{2}BF\,(p_1+p_2)$؛ لكنَّ الخطّ BF هو مولّد جذع المخروط، أي $BF=l$؛ فنكون قد حصلنا على النتيجة المطلوبة.

بعد ذلك يستنتج بنو موسى مساحة المجسّم الدوراني المؤلَّف من جذع مخروط ومن مخروط لهما قاعدة مشتركة ونفس الطول l لمولّديهما:

$$S=\frac{1}{2}l\,(p_1+p_2)+\frac{1}{2}lp_2=\frac{1}{2}lp_1+lp_2$$

حيث يكون p_1 و p_2 محيطي القاعدتين.



بعد ذلك، يعمّم بنو موسى النتيجة السابقة على المجسّم الدوراني المؤلّف من أيّ عدد من جذوع المخروطات ومن مخروط عندما يكون لمولّديها كلّها نفس الطول:

$$S = \frac{1}{2} l \sum_{k=2}^{n} \left(p_{k-1} + p_k \right) + \frac{1}{2} l p_n = \frac{1}{2} l \left(p_1 + 2 \sum_{k=2}^{n} p_k \right) = \pi l \left(r_1 + 2 \sum_{k=2}^{n} r_k \right).$$

ويُدخِل بنو موسى مقدّمة أخرى في الهندسة المستوية:

المقدّمة ١٢ ـ ليكن معنا دائرة مركزها D، وقطرها AC، وليكن DB نصفَ قطر بحيث يكون $DB \perp AC$، [الشكل، ص. ١٠٩]؛ إذا افترضنا $\overset{\frown}{BL} = \overset{\frown}{LG} = \overset{\frown}{GA}$ و $HL // AC$، $GI // AC$، $DM \perp BL$، $BL \cap AC = \{E\}$، يكون معنا عندئذ:

١) $DE = DA + IG + HL$ وَ ٢) $DA^2 > \frac{1}{2} BL \left(DA + IG + HL \right) > DM^2$.

إنّ القوسين $\overset{\frown}{LG}$ و $\overset{\frown}{HI}$ متساويتان وكذلك تكون القوسان $\overset{\frown}{BL}$ و $\overset{\frown}{BH}$ متساويتين، بسبب التناظر بالنسبة إلى DB؛ لذا يتساوى القوسان $\overset{\frown}{LG}$ و $\overset{\frown}{BH}$، ونستنتج أنّ $BL // GH$.

وكذلك، فإنّ $\overset{\frown}{AG} = \overset{\frown}{IH}$ فيكون $GH // AI$. فإذا قطعت HG الخطّ DE على النقطة F، يكون لدينا $HL = FE$ و $IG = AF$، فنحصل إذاً على العلاقة ١).

المثلّثان BMD و BDE متشابهان، فيكون $\frac{BM}{MD} = \frac{BD}{DE}$، وبالتالي $BM.DE = MD.BD$. لكنَّ $MD < BD$، فيكون $MD^2 < MD.BD < BD^2$، ويكون بالتالي $MD^2 < \frac{1}{2} BL.DE < DA^2$، فنحصل إذاً على ٢).

إلاّ أنّ النتيجة التي حصلنا عليها في حالة ثلاثة أقواس متساوية $\widehat{GA}$، $\widehat{LG}$ و $\widehat{BL}$ تشمل الحالة العامّة التي نتناول فيها أيَّ عدد من الأقواس المتساوية. لنتناول ثانية هذه المقدّمة في الحالة العامّة ولنكتشف ما يكمن فيها من أفكار في حساب المثلّثات.

إذا قسّمنا ربع الدائرة A_1B إلى n قوساً متساوية بواسطة النقاط A_2، A_3، ...، A_n، يكون معنا عندئذ

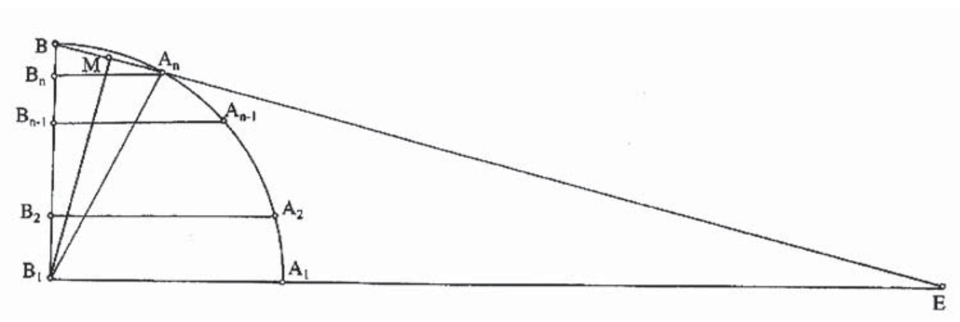
١) $A_1B_1 + 2\sum_{k=2}^{n} A_kB_k = B_1E$؛

٢) $B_1M^2 < \frac{1}{2}BA_n\left[B_1A_1 + 2\sum_{k=2}^{n} B_kA_k\right] < B_1B^2$. (أنظر الشكل، ص. ١٠٩)

يكون لدينا: $\widehat{BA_n} = \frac{\pi}{2n}$، $\widehat{BA_{n-1}} = 2.\frac{\pi}{2n}$، ...، $\widehat{BA_2} = (n-1)\frac{\pi}{2n}$،

فيكون إذاً

$A_nB_n = R\sin\frac{\pi}{2n}$، $A_{n-1}B_{n-1} = R\sin 2.\frac{\pi}{2n}$، ...، $A_2B_2 = R\sin(n-1)\frac{\pi}{2n}$.



ليكن $B_1M \perp BA_n$؛ يكون معنا $\widehat{BB_1M} = \frac{\pi}{4n} = \widehat{B_1EB}$، فيكون إذاً $B_1E = R\cot g\,\frac{\pi}{4n}$.

لنضع $R = 1$، عندئذ تُكتب العلاقة َ١) على الشكل التالي:

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\sin k.\frac{\pi}{2n} = \cot g\,\frac{\pi}{4n} - 1 \qquad (١)$$

فيُمكننا كتابتها (بإضافة 2 إلى كلِّ طَرَفٍ من طرفيها) كما يلي:

$$2\sum_{k=1}^{n}\sin k.\frac{\pi}{2n} = \cot g\,\frac{\pi}{4n} + 1، \qquad (٢)$$

ويمكننا التحقّق من هذه العلاقة بضرب كلٍّ من الطرفين بـِ $\sin\frac{\pi}{4n}$.

في العلاقة َ٢)، لدينا: $B_1M = R\cos\frac{\pi}{4n}$ و $\frac{1}{2}BA_n = BM = R\sin\frac{\pi}{4n}$.

لنضع $R = 1$؛ عندئذ تُكتب العلاقة َ٢) على الشكل التالي:

$$\cos^2\frac{\pi}{4n} < \sin\frac{\pi}{4n}.\cot g\,\frac{\pi}{4n} < 1 \qquad (٣)$$

أي $\cos^2\frac{\pi}{4n} < \cos\frac{\pi}{4n} < 1$،

وهذه العلاقة تتحقّق مهما كان n، لأنّ لدينا $\cos^2\alpha < \cos\alpha < 1$، لكلّ α مع $\alpha \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$. يمكننا إذاً أن نعطي لـِ n، قيمة كبيرة بشكل اختياريّ، ممّا يتيح البدء بتطبيق طريقة الاستدلال بالخُلْف. بتعبيرٍ عصري، يعود هذا العمل إلى حساب التكامل $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x dx$. ولكن تجدر الإشارة إلى أنّ بني موسى عملوا بطريقة مختلفة.

ستدخل هذه المجاميع، بالتحديد، وكذلك هذه المتباينات في حساب مساحة الكرة وحجمها.

القضيّة ١٣ ـ يأخذ بنو موسى، في القضيّة ١٣، نصف دائرة ABD مركزها M، ونصف قطرها R_2 [الشكل، ص.١١١]؛ هذا ويُرْسَم خطٌّ مضلّعٌ متساوي الأضلاع محاطٌ بنصف الدائرة وله عددٌ مزدوجٌ من الأضلاع. ثمّ يُرسَم في هذا الخط نصف الدائرة المحاطة به. وبواسطة الدوران، نولّد نصف كرة ومجسّماً دورانياً مؤلّفاً من مخروط ومن عدّة جذوع مخروطيّة، وأخيراً نصف كرة أخرى محاطة بالمجسّم الدورانيّ، ولها نفس المركز الذي لنصف الكرة الأولى. يبرهن بنو موسى أنّ

$$2\pi R_1^2 < S < 2\pi R_2^2 ؛$$

حيث R_1 و R_2 هما على التوالي، نصفا قطرَي الدائرة المحاطة والدائرة المحيطة، و S هي مساحة السطح الجانبيّ للمجسّم.

لنذكر أنّ هذا المجسّم يحقّق شروط القضيّة ١١، وأنّ الفرضيّات المتعلّقة بالشكل المستوي ضمن المستوي ABD هي ذاتها فرضيّات المقدّمة ١٢، يكون لدينا إذاً:

$$\frac{1}{2}BE\left(MB+HE+GF\right)<MB^{2} \qquad (١)$$

وبناءً على القضيّة ١١ يكون

$$S=\pi EB\left(MB+HE+GF\right)؛ \qquad (٢)$$

نحصل من (١) و (٢) على $S<2\pi MB^{2}=2\pi R_{2}^{2}$.

وإذا كانت النقاط S و O و P منصِّفات الأوتار BE و EF و FD، يكون

$MS=MO=MP=MU=R_{1}$ (نصف قطر الكرة المحاطة)،

وبحسب المقدّمة ١٢، لدينا

$$MS^{2}<\frac{1}{2}BE\left(MB+HE+GF\right). \qquad (٣)$$

ومن (٢) و (٣) نحصل على $S>2\pi MS^{2}=2\pi R_{1}^{2}$، وبهذا نحصل على النتيجة المطلوبة.

بعبارات أخرى: ليكن لدينا نصف الدائرة $C\left(M,R_{2}\right)$، وخطٌّ مضلّعٌ متساوي الأضلاع له $2n$ ضلعاً محاطٌ بـِ C، ونصف الدائرة $C'\left(M,R_{1}\right)$ المحاطة بالخط المضلّع. من هذه المعطيات، يستخرج بنو موسى:

- نصف الكرة $\Sigma\left(M,R_{2}\right)$،
- المجسّم Γ المؤلّف من مخروط ومن جذوع مخروطات "محاطة" بـِ Σ والذي يحقّق شروط القضيّة ١١،
- نصف الكرة $\Sigma'\left(M,R_{1}\right)$ المحاطة بهذا المجسّم،

ويبرهنون المتباينة المزدوجة $2\pi R_{1}^{2}<S<2\pi R_{2}^{2}$، حيث يكون S مساحة السطح الجانبيّ للمجسّم Γ. وهم ويستخدمون لأجل ذلك القضيّتين ١١ و ١٢ بدون استخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول".

وهكذا يمكن لبني موسى الآن تطبيق طريقة الاستدلال بالخلف مرّتين: الأولى في القضيّة ١٤ للحصول على مساحة سطح نصف الكرة، المساوية لـِ "ضعف <مساحة> سطح الدائرة العظيمة" كما يقولون؛ والثانية لاستخراج حجم الكرة

"الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث <مساحة> السطح المحيط بها". لنتناول ثانية برهان بني موسى.

القضيّة ١٤ـ مساحة سطح نصف الكرة هي ضعف مساحة دائرتها العظمى.

لتكن s مساحة الدائرة ABC و S مساحة نصف الكرة $\Sigma = ABCD$ [الشكل ص.١١٤]. لدينا حالتان:

أ) $S > 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $2s = S_1$، و $S_1 < S$. يسلّم بنو موسى في الواقع بوجود نصف كرة $\Sigma_1 = EHIK$، تقع داخل Σ ويكون لها نفس المركز وتكون مساحتها S_1.

يأخذ بنو موسى، عندئذ ، كما حصل في القضيّة ١٣، مجسّماً Γ "محاطاً" بـِ Σ، مؤلَّفاً من مخروط ومن جذوع من مخروطات، لا يلامس سطح هذا المجسّم Σ_1. يتمُ الحصول على مثل هذا المجسّم انطلاقاً من خطّ مضلّع متساوي الأضلاع "محاط" بنصف الدائرة العظمى من الكرة Σ ولا يلامس نصف الدائرة الكبرى C_1 من الكرة Σ_1؛ أي أنـّهم ينطلقون من القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" لأقليدس وليس من القضيّة ١٧ من نفس المقالة من "الأصول"، كما أكّد البعض.

ب) $S < 2s$. يكون معنا في هذه الحالة $2s = S_2$، فيكون $S_2 > S$. يأخذ بنو موسى الكرة Σ_2 ومساحتها S_2، بحيث تقع خارج Σ، ويأخذون أيضاً مجسّماً Γ' محاطاً بـِ Σ_2 ولا يلامس الكرة Σ، يحصلون عليه انطلاقاً من القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول".

في الحالتين أ) و ب)، وباستخدام المتباينتين المبرهنتين في القضيّة ١٣، نصل إلى الاستحالة. فنحصل على مساحة سطح نصف الكرة $2\pi R^2 = 2s = S$.

القضيّة ١٥ـ حجم الكرة Σ، التي يكون R نصف قطرها و S مساحة سطحها هو $V = \frac{1}{3} R.S = \frac{4}{3}\pi R^3$.

لتكن $ABCD$ الكرة المعلومة [الشكل، ص.١١٥]. تكون لدينا حالتان:

• الحالة الأولى: $\frac{1}{3}R.S < V$؛ في هذه الحالة يسلّم بنو موسى بوجود كرة $\Sigma_1 = FGLM$، لها نفس المركز ومساحتها S_1 بحيث يكون $\frac{1}{3}R.S_1 = V$، مع $S_1 > S$، أيْ بحيث تكون Σ داخل هذه الكرة Σ_1. ثمّ يأخذون متعدّد سطوح يحيط بِـ Σ ولا يلامس Σ_1 ثمَّ يستخدمون المقدّمة ١. إذا كان S_2 و V_2 مساحة سطح هذا المجسّم وحجمه على التوالي، يكون لدينا وفق المقدّمة ١: $V_2 = \frac{1}{3}R.S_2$. يكون لدينا $S_2 < S_1$، فيكون $V_2 < V$؛ وهذا مستحيل لأنّ المجسّم ذا الحجم V_2 يحيط بالكرة ذات الحجم V.

• الحالة الثانية: $\frac{1}{3}R.S > V$؛ يأخذ بنو موسى في هذه الحالة كرة لها نفس المركز، وهي $\Sigma_1' = EHIK$، أصغر من $ABCD$، مساحتها S_1' وبحيث يكون $V = \frac{1}{3}R.S_1'$. بعد ذلك، يأخذ بنو موسى متعدّدَ سطوح محاطاً بِـ Σ دون أن يلامس Σ_1' ثمَّ يطبّقون المقدّمة ٢. إذا كانت S_2' مساحة متعدّد السطوح وكان V_2' حجمه، يكون $V_2' < V$؛ فيكون لدينا إذاً، وفقاً للمقدّمة ٢، $V_2' < \frac{1}{3}R.S_2' < V$، ولكن لدينا $S_2' > S_1'$، فيكون إذاً $\frac{1}{3}R.S_2' > \frac{1}{3}R.S_1'$، أي $\frac{1}{3}R.S_2' > V$؛ وهذا مستحيل.

نحصل من الحالتين أعلاه، على النتيجة المطلوبة، أي $V = \frac{1}{3}R.S$.

لا يتساءل بنو موسى، لا في الحالة الأولى ولا في الثانية، عن وجود متعدّد السطوح الذي أدخلوه.

ملاحظةـ الحجمان الوحيدان اللذان دُرِسا في هذا النصّ هما حجما المجسّمين الواردين في القضيّتين ١ و ٢؛ أي حجم متعدّد سطوح مساحته S يحيط بكرة نصف قطرها R_1: $V = \frac{1}{3}S.R_1$، ومن جهة أخرى حجم متعدّد سطوح مساحته S محاط بكرة نصف قطرها R_2، مع: حجم الكرة $< \frac{1}{3}S.R_2 < V$.

ويستعين بنو موسى في القضيّة ١٥، بهذه النتائج، بالتحديد، ممّا يدفع إلى افتراض أنّ المجسّمات التي يأخذونها هي "متعدّدات سطوح". تبقى لدينا مسألة تحديد نوع متعدّدات السطوح التي يمكن أن نأخذها لنكون ضمن شروط حالتَيْ القضيّة ١٥.

يُمكن أن نبيِّن أنَّ هذه المسألة قابلة للحلّ باستخدام المجسّم P_n الذي تمَّ تحديده في القضيّة ١٧ من المقالة السابعة عشرة من "الأصول"، وهو مجسّمٌ "محاط" بالكرة؛ وهذا ما فعله الشارحون. لكنَّ مثل هذا المجسَّم لا يكون له كرة يحيط بها، وبالتالي لا يمكننا استخدام المقدّمة ١ لبني موسى.

في الحالة الثانية من القضيّة ١٥، يجب أن يكون متعدّد السطوح P_n، المحاط بالكرة Σ ذات نصف القطر R، خارج الكرة Σ_1' ذات نصف القطر R_1'. يجب إذاً اختيار n بحيث تكون أصغر مسافة، h، من مركز الكرتين إلى سطوح P_n أكبر من R_1، أي $h > R_1$، وعند ذلك يُحقّق V_n (وهو حجم P_n) العلاقة $V_n > \frac{1}{3}S_n.R_1$، وفقاً للمقدّمة ٢.

ونلاحظ، بالإضافة إلى ما سبق، أنّ الخازن يدرس هذه المسافات في القضيّة ١٩ من عمله الوارد لاحقاً (في كتابنا هذا).

لنعد إلى الحالة الأولى. الكرتان المستخدمتان فيها هما Σ ذات نصف القطر R، و Σ_1 ذات نصف القطر R_1، مع $R_1 > R$. فيجب أن نأخذ، بدلاً من متعدّد سطوح محيط بِـ Σ وموجود داخل Σ_1، متعدّدَ سطوح Γ_n محاط بِـ Σ_1 وبحيث تكون أصغر مسافة، h، من المركز إلى سطوحه أكبر من R، أي $h > R$، فيحقّق حجمه V_n عندئذ العلاقة $V_n > \frac{1}{3}S_n.R$ (وفق المقدّمة ٢)؛ فيمكننا عندئذ استنتاج المطلوب.

لنلاحظ، في الختام، أنّ الجملتين التاليتين في النصّ: "نَعمل على كرة ا ب جـ د مجسّماً كما وصفنا ..."، و"نَعمل في كرة ا ب جـ د مجسّماً كما وصفنا ..."، لا توضحان طبيعة المجسّم. يمكننا أن نأخذ، كما في القضيّة ١٤ المتعلّقة بمساحة الكرة، المجسّمات المؤلّفة من مخروط ومن جذوع من مخروطات. إلا أنّ بني موسى

لم يدرسوا في هذا الكتاب أحجام هذه المجسّمات. وكانوا على علم، بدون شك، بأنّ أرشميدس قد برهن في "الكرة والأسطوانة" – في القضيّتين ٢٦ و٣١- أنّ الحجم V لمجسّم من هذا النوع، حيث تكون مساحته S وحيث "يحيط" بكرة نصف قطرها R_1، يكون $V = \frac{1}{3} S.R_1$. كما كانوا على علم، في القضيّة ٢٧ بأنّ الحجم V يُحقّق $V < \frac{1}{3} S.R_2$، إذا كان المجسّم "محاطاً" بكرة نصف قطرها R_2.

يُمكن إذاً تطبيق استدلال بني موسى على مجسّمات كهذه. وربّما لهذا السبب، لم يشعر بنو موسى بضرورة مناقشة طبيعة هذا المجسّم.

نجد، فيما يتعلّق بهذه المجموعة من القضايا التي أتاحت تحديد مساحة سطح الكرة وحجمها، الفوارق ذاتها بين أرشميدس وبني موسى، التي سبق أن رأيناها في حالة مساحة الدائرة . الفارق الأوّل يتعلّق بطريقة الاستنفاد. يبدأ بنو موسى ببرهان المتباينة $\cos^2 \frac{\pi}{4n} < \sin \frac{\pi}{4n}\left(1 + 2\sum_{k=1}^{n-1} \sin \frac{k\pi}{4n}\right) < 1$.

ثمّ يطبّقون بعض القضايا، من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" – كما شرحنا سابقاً –، التي تعفيهم من "المرور إلى الحدّ" عندما يسعى n إلى ما لا نهاية، لمتسلسلات الجيوب التي أتينا على ذِكرها. وهم يستخدمون لتحديد حجم الكرة، هنا أيضاً، طريقة الاستدلال بالخُلف على مساحات السطوح الجانبيّة وليس على الأحجام. وأخيراً، لا يُعطي بنو موسى حجمَ الكرة عبر مقارنة هذا الحجم بحجم آخر، كما يفعل أرشميدس: "حجم الكرة يعادل حجم مخروط قاعدته مكافئة للدائرة العظمى للكرة وارتفاعه يساوي ضعفَي قطر الكرة". فهم يقدّمون هذا الحجم كحاصل ضرب مقدارين. هذه الفوارق تشير إلى أنّ بني موسى أرادوا شقَّ طريق مختلف عن طريق أرشميدس في البحث عن مساحة الدائرة، وعن مساحة سطح الكرة وحجمها؛ إلاّ أنّهم اختاروا طريقة أرشميدس في تقريب π.

وقد لاحظنا أنّ بني موسى يهتمّون أيضاً في هذا الكتاب، بمسائل كلاسيكيّة من الرياضيّات الهلّينيستية وخاصّة بمسألتين شهيرتين وردتا في شرح أوطوقيوس

لكتاب "الكرة والأسطوانة"، هما مسألة المتوسّطين ومسألة تثليث الزاوية.

١-٢-٥ مسألة المتوسّطين وبناؤها الآلي

القضيّة ١٦- لإيجاد مقدارين X و Y بين مقدارين معلومين M و N، يبدأ بنو موسى بعرض الحل الذي أعطاه، حسب تعبيرهم، "رجلٌ من القدماء اسمه مانالاوس أورده في كتابٍ له في الهندسة"، منوّهين بنفعه في استخراج الجذر التكعيبي. هذا العنوان لكتاب منالاوس هو أقرب ما يكون من عنوان كتاب ترجمه ثابت بن قرّة تحت عنوان "في أصول الهندسة" وذكره النديم[٦٩]، لكنّه لم يصل إلينا. لكنَّ الحلّ الذي نسبه بنو موسى إلى منالاوس هو الحل الذي نسبه أوديموس (*Eudème*) إلى أرخيطاس(*Archytas*)، على حدِّ قول أوطوقيوس[٧٠]. يتعلّق الأمر إذاً، إذا كان الطولان M و N معلومين، بإيجاد الطولين X و Y، بحيث يكون $\frac{M}{X}=\frac{X}{Y}=\frac{Y}{N}$.

عندما يكون $M=1$، ويكون N حجم مكعّب، يكون X ضِلع هذا المكعّب.

لنفترض أنّ $M>N$ ولنرسم دائرة قطرها $M=AB$، وَوتراً AC مساوياً لـِ N وخطّ التماسّ المارَّ بـِ B والذي يقطع المستقيم AC على النقطة G [الشكل، ص. ١١٦].

لنأخذ نصف أسطوانة دورانيّة محدّدة بنصف الدائرة ACB، بحيث تكون خطوطها المولّدة عموديّة على المستوي ABC. ونرسم نصف دائرة قطرها AB في المستوي المتعامد مع ABC وِفق AB، ونجعل نصف الدائرة هذه يدور حول المستقيم Az ($Az \perp ABC$)؛ ولتكن AHE نصف الدائرة هذه، في أحد أوضاعها. يقطع المستقيمُ AE القوسَ $\widehat{ACB}$ على النقطة I ويقطع نصفُ الدائرةُ AHE الأسطوانةَ على النقطة H، فيكون IH مولّداً للأسطوانة. خلال الدوران، ترسم I القوسَ $\widehat{ACB}$ وترسم H المنحني $\boldsymbol{C}$ على السطح الأسطواني.

---

[٦٩] النديم، "الفهرست"، صفحة ٣٢٧. نجد تحت اسم منالاوس "كتاب أصول الهندسة، عمله ثابت بن قرّة ثلاث مقالات".

[٧٠] *Archmidis Opera Omnia*, iterum edidit J. L. Heiberg, vol. III corrigenda adiecit E. S. Stamatis (Teubner, 1972), pp. 84-88؛ انظر أيضاً "أرشميدس"، طبعة وترجمة فرنسيّة: *Archimède*, éd. et trad. Française, Ch. Mugler, Paris, 1972, t. IV, pp. 62-64.

نجعل المثلّث ABG يدور حول AB، فترسم C نصفَ الدائرة COD، ويقطع الخطّ المستقيمُ AG، في كلِّ وضع من أوضاعه، COD على النقطة L والأسطوانة على النقطة H'؛ وخلال حركتها ترسم H' المنحني $\mathbf{C'}$ على السطح الأسطواني.

نثبّت نصف الدائرة AHE والمثلّث ABC في وضع تكون فيه $H = H'$؛ في هذه الحالة تكون $H \in \mathbf{C} \cap \mathbf{C'}$.

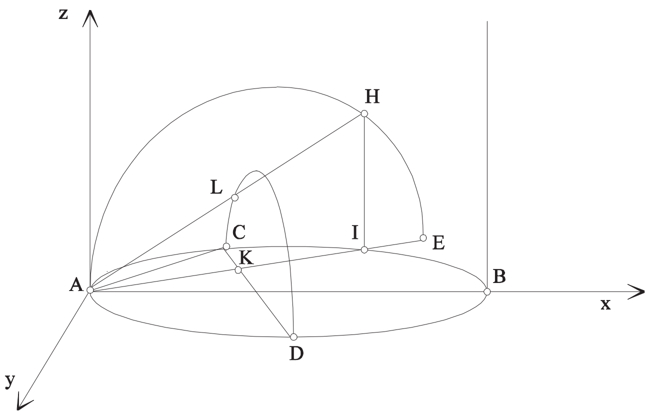
الخطُّ LK هو خطّ التقاطع بين المستويين COD و AHI، ويكون لدينا $LK \perp CD$ فيكون $LK^2 = KC.KD$ (لأنّ المثلّث CLD قائم الزاوية). لكن $KC.KD = KA.KI$ (قوّة النقطة K)، فيكون $LK^2 = KA.KI$، ويكون المثلّث ALI قائم الزاوية في L. المثلّثات AHE و AIH و ALI قائمة الزاوية ومتشابهة، فيكون $\frac{AE}{AH} = \frac{AH}{AI} = \frac{AI}{AL}$، لكن $AE = AB = M$ و $AL = AC = N$، فيكون لدينا $X = AH$ و $Y = AI$.

بتعبير آخر، يتمّ الحصول على الحلّ المنسوب إلى منالاوس بواسطة تقاطع أسطوانة قائمة معادلتها $x^2 + y^2 = a.x$، ومخروط قائم معادلته $b^2\left(x^2 + y^2 + z^2\right) = a^2x^2$، وطوق دائري معادلته $x^2 + y^2 + z^2 = a\sqrt{x^2 + y^2}$، (مع $a = M$ و $b = N$).

فإذا كانت النقطة $H\left(x_0, y_0, z_0\right)$، نقطة التقاطع، يكون لدينا:

$X = \sqrt{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2}$ و $Y = \sqrt{x_0^2 + y_0^2}$.

يلفت بنو موسى النظر، بحقّ، إلى صعوبة بناء هذا الحلّ ويقترحون طريقة آليّة للقيام بذلك. وكنّا نعتقد أنّ بإمكاننا التأكيد أنّ جهازهم شديد الشبه بذلك الذي أعطاه أوطوقيوس تحت اسم أفلاطون. ولكن الأمر ليس كذلك. وسبق أن لاحظنا أنّ هذا الجهاز الدقيق، وذا الوصف الصعب، قد وُضِع جانباً من قِبَل جيرارد دو كريمون، فغاب عن الترجمة اللاتينيّة لكتاب بني موسى.



لندرس الآن هذه الطريقة العمليّة:

القضيّة ١٧ ـ ليكن A و B الطولين المعلومين، وليكن X و Y الطولين المطلوبين أي اللذين يحقّقان العلاقة $\frac{A}{X}=\frac{X}{Y}=\frac{Y}{B}$.

ليكن المستقيمان DC و DE متعامدين [أنظر الشكل، ص.١١٩]، بحيث يكون $DC=A$ و $DE=B$. العمود الخارج من E على CE يقطع DC على النقطة F، والمستقيم الموازي لِـ EF الخارج من C يقطع ED على النقطة M، ولتكن النقطة U على امتداد MC المستقيم بحيث يكون $MU=FE$.

نحدّد حركة للقطعة FE وحركة للقطعة MU، على الشكل التالي:

تحتفظ هاتان القطعتان بطولهما الأوّليّ خلال الحركة؛ تنزلق F على المستقيم DC باتّجاه D؛ تدور FE حول النقطة E، وفي الوقت نفسه تبقى MU موازية لِـ FE؛ وتنزلق M على المستقيم ED مبتعدة عن D، وتدور MU حول النقطة C.

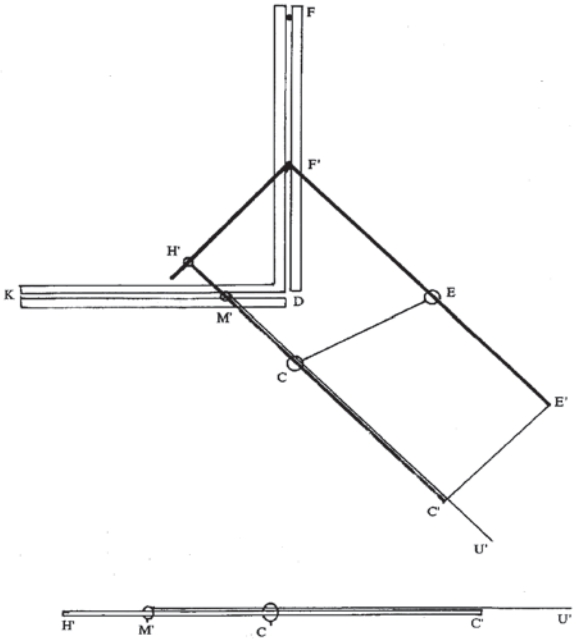
نوقف هذه الحركة عندما يقطع العمود الخارج من E على FE المستقيم MU على النقطة U. عند بلوغنا هذا الهدف، نعطي لوضع FE الاسم F_1E_1 ولوضعيّة MU الاسم M_1U_1. الشكل $F_1E_1U_1M_1$ مستطيل. والمثلّث CM_1F_1 قائم الزاوية وكذلك المثلّث M_1F_1E، فيكون إذاً $M_1D^2=DC.DF_1$ و $DF_1^2=DM_1.DE$، فنحصل على:

$$\frac{DC}{DM_1}=\frac{DM_1}{DF_1}=\frac{DF_1}{DE}؛$$

لكن $DC=A$ و $DE=B$، فتكون إذاً DM_1 و DF_1 القطعتين X و Y المطلوبتين.

كيف يمكن الحصول بسهولة على القطعتين DM_1 و DF_1؟ يقوم هنا بنو موسى بإدخال النقطة H المحدّدة كما يلي: $CH = EF$ (H على امتداد CM المستقيم)، فيكون $FECH$ مستطيلاً، وعندما تصل F إلى F_1، تأتي H إلى M_1 على المستقيم DE.

نتخيّل إذاً جهازاً يتيح الحصول على حركة الشكل $EFHC$ المؤلَّف من سيقان (عيدان أو شظايا كما يقول بنو موسى) معدنيّة.



للسيقان الثلاث EF و CH و MU نفس الطول l المحدّد انطلاقاً من المعطيات بـِ $l = \frac{B}{A}\sqrt{A^2 + B^2}$. للساق EC الطول $\sqrt{A^2 + B^2}$، وللساق FH طولٌ اختياريّ يساوي حدُّه الأدنى طولَ الساق EC. والساق EC هي، وحدها، التي تكون ثابتة.

يشكّل الساقان EF و FH كوساً (مثلّثاً بزاوية قائمة) لا يتغيّر شكله، وتجهَّز النقطة F بِرَزَّة (قُطب) يرسم رأسُها المستقيمَ FD. نضع عند كلٍّ من النقطتين الثابتتين E و C، رزّةً يكون رأسها حلقة تستطيع الدوران، وتمرُّ فيها الساق EF المتحرّكة عند E والساق HC المتحرّكة عند C. تنزلق الساق MU، الأكثر دقّة من السيقان الأخرى، في حزٍّ محفور على ظهر الساق HC وتمر في الحلقة الموجودة في الرزّة الموجودة في النقطة C. وتثبَّت على الساق MU، عند النقطة M، رزّة لها حلقة تمر بها الساق

HC ويرسم رأسُ الرزّة هذه المستقيمَ DK. وعلى الساق FH أن تنزلق داخل حلقة مربوطة بالساق HC في طرفها H.

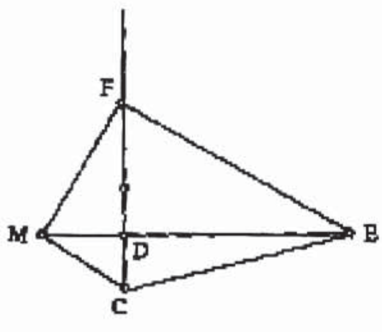
باستطاعتنا إذاً أن نتخيّل، تحت مستوي المستطيل المتحرّك $HFEC$، صفيحةً نُثَبِّت عليها الرزَّتان E و C ونصنع عليها مزلاقين لتأمين حركة الرزّتين المتحرّكتين F و M. للحصول على المزلاق FD، على سبيل المثال، نثبّت على الصفيحة مسطرتين متوازيتين، من كلتا جهتي المستقيم FD، ونفعل الشيء نفسه بالنسبة إلى MK.

بعد ذلك، يوضع هذا النظام من السيقان ذات المفاصل على هذه الصفيحة، وتمر الساقان FE وHC على التوالي بحلقتي الرزّتين E و C، في الوقت الذي توضَع كلٌّ من الرزّتين F وM، على مزلاقها.

الملاحظة الأولى: يتوافق الشكل أعلاه مع وضع وسيط للمستطيل المتحرّك، وهو $E'F'H'C'$. ويبدو أنّ الاستغناء عن الساق الرقيقة الموجودة على ظهر HC ممكن.

الملاحظة الثانية: نوقف الحركة عندما يحصل تطابق النقطة H' مع النقطة M'، أي عندما يصبح لدينا $H' = M' = M_1$ [أنظر الشكل، ص.١١٩]؛ وعندها يكون لدينا أيضاً $C' = U_1$.

الملاحظة الثالثة. بما أنّ ضلعَي الزاوية القائمة CDE معلومان، أي $CD = A$ و $DE = B$، فإنّ المسألة ١٧ ترجع إلى تحديد F على امتداد CD المستقيم وإلى تحديد



M على امتداد ED المستقيم، بحيث يكون المثلّث FCM قائم الزاوية في M والمثلّث MFE قائم الزاوية في F.

لقد عالج أفلاطون[٧١] هذه المسألة. والجهاز الذي وصفه هنا بنو موسى مختلف عن الذي وُضِع تحت اسم أفلاطون.

١-٢-٦- أ تثليث الزاوية و"حلزونيّة باسكال (Pascal)"

القضيّة ١٨ - في هذه القضيّة، يعود بنو موسى إلى مسألة تثليث الزاوية، لعرض حلّهم الخاص فقط، ولعرض تركيب آلي يرسم المنحني المثلّث (أي الذي يقسم الزاوية إلى ثلاثة أقسامٍ متساوية). هذا المنحني هو محاريّةُ دائرةٍ، ليست سوى "حلزونيّة باسكال"، كما أسماها روبرفال[٧٢] (Roberval). للحصول على الحلّ نستخدم تقاطع هذه الحلزونيّة مع نصف خطّ مستقيم.

لنتناول أوّلاً نصّ بني موسى.

لتكن لدينا الزاوية الحادّة ABC، ولنرسم دائرة مركزها B تقطع BA على النقطة D وتقطع BC على النقطة E، وليكن BG عموداً على BD، $BG \perp BD$. ليكن GH نصف الخطّ المستقيم الذي يصل بين G و E ولتكن النقطة O على GH بحيث يكون $GO = BD$. نتصوّر أنّ المستقيم GH يتحرّك بحيث يمر دائماً بالنقطة E وبحيث ترسم النقطة G الدائرة باتّجاه L.

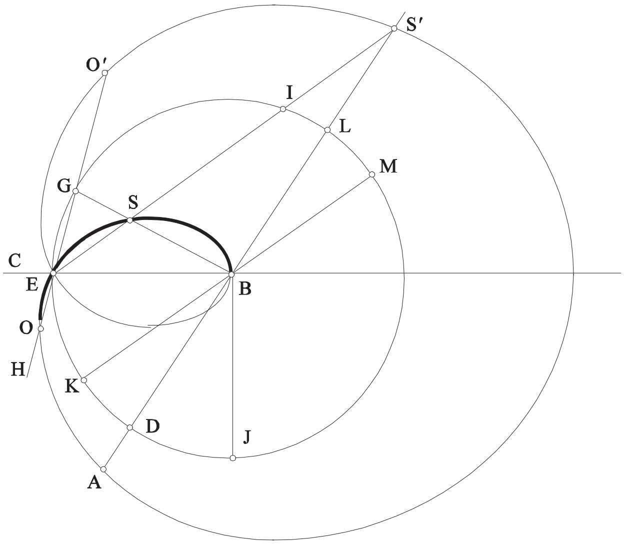
---

[٧١] انظر: *Archmidis Opera Omnia*, pp. 56-59.

[٧٢] انظر روبرفال، "ملاحظات حول تشكيل الحركة ووسائل إيجاد خطوط التماس للخطوط المنحنية":
Roberval, "Observations sur la composition du mouvement et sur les moyens de trouver les touchantes des lignes courbes", in *Mémoires de l'Académie Royale des sciences*, cours de Roberval, rédigé par son élève François de Verdus.

انظر أيضاً ب. دودرون و ج. إيتار، "الرياضيّات والرياضيّون":
P. Dedron *et* J. Itard, *Mathématiques et mathématiciens* (Paris 1959), pp. 400-401

حيث ذُكِر نص روبرفال. لقد تخيّل أ. باسكال (E. Pascal)، حسب ب. تانّيري (P. Tannery)، هذا المنحني على أنّه محاريّةُ الدائرة، وذلك في حدود العامَين ١٦٣٦–١٦٣٧؛ انظر "مذكّرات علميّة" (*Mémoires scientifiques*)، المجلّد الثالث عشر، ص. ٣٣٧–٣٣٨. انظر أيضاً م. كلاجيت (M. Clagett)، "أرشميدس في القرون الوسطى":
M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, Appendice VI, intitulé "Jordanus and Campanus on the Trisection of an Angle", pp. 666-670.



لتكن النقطة I الموضع الذي تبلغه النقطة G عندما تصل O إلى المستقيم BG، فيكون عندئـذ $IS = IB = BE$. وإذا رسـمنا الآن القطـر KM المـوازي لــِ EI، ($KM // EI$)، يكون لدينا $SI // MB$ و $SI = MB$، فيكون $IM // SB$ و $IM \perp BL$، ويكون BL منصّف الزاويـة $\widehat{IBM}$، فيكـون $\widehat{IL} = \widehat{LM} = \widehat{DK}$؛ مـن جهـة أخـرى $\widehat{IM} = \widehat{KE}$، فنحصـل علـى $\widehat{KE} = 2\widehat{KD}$. فيكون المستقيمُ BK المستقيمَ المطلوب: $\widehat{DBK} = \frac{1}{3}\widehat{DBE}$.

إذا كانت الزاويـة $\widehat{ABC}$ منفرجـة، نرسم أوّلاً مُنصِّفها ثم نرسم ثلث النصف. فثلثا هذا النصف هو ثلث الزاوية المنفرجة.

الملاحظة الأولى:

عندما ترسم النقطة G القوسَ GL، ترسم النقطة O المرتبطة بها ($GO = R$) قوساً من مَحاريّة وتكون S نقطة تقاطع هذه القوس مع المستقيم GB.

تنتمي النقطة S، بتعبير آخر، إلى الحلزونيّة وإلى المستقيم BG. تُكتَب معادلة المستقيم BG بالإحداثيّات القطبيّة - حيث تكون النقطة E القطبَ- كالتالي:

$\rho = \frac{a\cos\alpha}{\cos(\theta - \alpha)}$، حيث $a = BE$ و $\alpha = \widehat{DBC}$؛

وتُكتَب معادلة الحلزونيّة $\rho = a(2\cos\theta - 1)$؛ وإحداثيّات النقطة S هي (ρ, θ)، فنحصل على: $\frac{\cos\alpha}{\cos(\theta - \alpha)} = 2\cos\theta - 1$.

ولكنّ $\theta=\frac{2\alpha}{3}$ هي حلٌّ لهذه المعادلة. فتكون الزاوية $\widehat{BES}$ مساوية لـِ $\frac{2\alpha}{3}$، والزاوية $\widehat{BS'E}$ مساوية لـِ $\frac{1}{3}\alpha$ والزاوية $\widehat{DBK}$ مساوية لـِ $\frac{1}{3}\alpha$.

وهكذا يتعلّق الأمر بتثليث الزاوية $\widehat{ABC}$ بواسطة استخدام تقاطع قوس من محاريّة دائرة ($GO=GO'=R$) مع نصف مستقيم BG.

يصف بنو موسى بعد ذلك التركيب الآلي لرسم حلزونيّة باسكال. يستخدمون أنبوباً دائريّاً يضعون فيه، عند النقطة E، رَزّةً مع حلقة. ويُمَرِّرون في هذه الحلقة ساقاً طرفُها G مجهّزٌ برَزّةٍ تنزلق في الأنبوب. وعند النقطة O من هذه الساق حيث $GO=R$، يوضع رأس قلم، فيرسم رأس القلم هذا قوس المَحاريّة. يعطي تقاطعُ هذه القوس مع العمود BG النقطة S المطلوبة.

إذا أردنا المَحاريّة كاملةً، يجب أن تكون الساق ساقاً تُمَدُّ إلى أبعد من G بطولٍ GO' يساوي R، $GO'=R$.

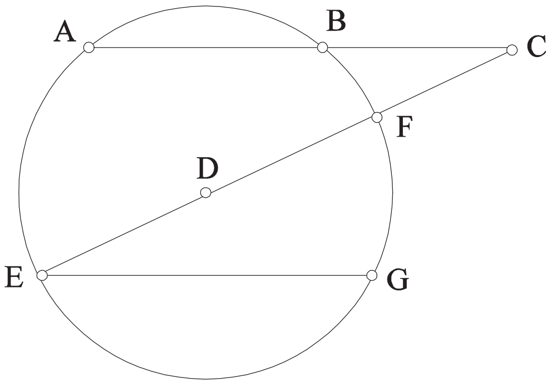
كما يمكننا استخدام هذا الجزء من المَحاريّة لتثليث الزاوية $\widehat{DBE}$. فعندما نَمدِّد IS على استقامة حتى S' على المَحاريّة، يُصبح لدينا: $IS=IS'=IB=R$، فيكون المثلّث SBS' قائم الزاوية في B، وتكونا S' نقطة تقاطع المَحاريّة مع المستقيم BD.

الملاحظة الثانية:

في القضيّة ٨ من كتاب "المقدّمات"[٧٣] المنسوب إلى أرشميدس، يقوم المؤلّف انطلاقاً من النقطة A من الدائرة ذات المركز D، برسم الوتر الاختياريّ AB، ويُمَدِّد هذا الوترَ على استقامة حتّى النقطة C بحيث يكون $BC=AD=R$. يقطع المستقيمُ CD الدائرة على النقطتين E و F، فيكون لدينا $\widehat{AE}=3\widehat{BF}$، وهكذا تكتمل مناقشة مسألة تثليث الزاوية.

---

[٧٣] انظر المرجعين التاليين:
Archmidis Opera Omnia, Liber assumptorum, t. 3, p. 518; *Archimède*, trad. Mugler, t. 3, pp. 148-149.



هذه القضيّة، التي ربّما تعود إلى أرشميدس، تعطي فكرة المَحاريّة: إذا رسمت B قوس الدائرة المعلومة، ترسم النقطة C قوساً من المَحاريّة خارجَ الدائرة.

فهل استوحى بنو موسى هذا النصَّ الذي كان مترجماً إلى العربيّة؟ ليس لدينا إجابة أكيدة عن هذا السؤال في الوضع الراهن لمعرفتنا بالموضوع. وهناك فرقٌ بين المناقشتين إذ إنَّ بني موسى لا يستخدمون قوس المَحاريّة الواقعة (أي القوس) خارج الدائرة، كما في النصّ المنسوب إلى أرشميدس، إنّما يستخدمون القوسَ الواقعة في داخل الدائرة، كما رأينا.

الملاحظة الثالثة:

في الوقت الذي تبقى فيه مصادر الحلّ المقدّم من قِبَل بني موسى لهذه المسألة غامضة نوعاً ما، فإنّ دوام انتقال هذا الحلّ يبقى، في المقابل، أقلّ غموضاً. فقد اقتُبِس هذا الحلّ في الـ *Liber de triangulis*[٧٤]. وتجدر الإشارة إلى أنّ إيتيان باسكال (Etienne Pascal) – ودائماً وفق أقوال روبرفال- قد تصوّر هذا المنحني بنفس الطريقة، أي كمَحاريّة دائرة، وطبّقها، هو أيضاً، على تثليث الزاوية.

---

[٧٤] راجع: M. Clagett, *Archimedes in the Middle Ages*, vol. V (Philadelphia, 1984)، ص.١٤٦.١٤٧، ص. ٢٩٧ وما يليها، وخاصّة ص. ٣٢٤.٣٢٥.

١-٢-٦- ب تقريب الجذر التكعيبي

ينهي بنو موسى أخيراً كتابهم بتقريب الجذر التكعيبي لعدد طبيعي N ويعطون عبارة مكافئة للعلاقة: $\sqrt[3]{N} = \frac{1}{60^k} \sqrt[3]{N.60^{3k}}$ ،

ومنها يخرج الجذر التكعيبي لـِ N بدقّة من المرتبة k.

١-٣ النص

"كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكريّة"

لبني موسى: محمد والحسن وأحمد

ثمانية عشر شكلاً

صدر الكتاب

الطول أول الأقدار التي تحدّ الأشكال وهو ما امتدّ على استقامة في الجهتين جميعًا، فإنه لا يكون منه إلا طول فقط. فإذا امتدّ السطح اعتراضًا في غير جهة الطول، فذلك الامتداد هو العرض. وليس العرض كما يظن كثير من الناس أنه الخط الذي يحيط بالسطح في غير جهة الطول. ولو كان كذلك لما كان السطح ذا طول وعرض فقط ولكان العرض طولاً أيضًا، لأن العرض عندهم خط والخط طول.

وقد أحكم ذلك أقليدس حيث قال: الخط طول فقط، والسطح طول وعرض فقط. وأما السمك فهو امتداد في غير جهتي الطول والعرض. والذين يظنون أن العرض خط، يظنون أيضًا

1 ناقصة [ا، ت، ث، جـ، ح، ض، ف، ک، ن، م، ي]، نجد قبلها «كتاب معرفة الأشكال البسيطة» [ر]، نجد بعدها «وبه نستعين» [ع، ط] «ربّ تمم بالخير» [ب] – 2 كتاب: رسالة [ق] هذا كتاب [ر] / معرفة ... والكرية: ناقصة [ق] / مساحة: ناقصة [ر] مساحسة [ش] / البسيطة والكرية: الكرية والبسيطة [ف] – 3 لبني: بني [ق] ناقصة [ي] / والحسن: ولحسن [ي] – 4 ثمانية: وثمانية [ب، ش] / ثمانية عشر شكلاً: وهي مقالة واحدة وثمانية عشر شكلاً [ق] يح شكلاً [ي] ب ح شكلاً [خ] – 5 صدر: ناقصة [خ، س] / الكتاب: ناقصة [خ، س، ق] – 6 الطول: اطول [ط] / أول: اقل [ت] او [ب، ح، خ، ش] / تحد: يجد [ب، ش، ط، م] تجد [ل] بعد [ي] / وهو: فهو [و] / ما: اما [خ] / على: علا [و] – 7 منه: فيه [ق] / اعتراضًا: اعراضًا [ح، د، ذ، س، ع، ط، ف، ق، ي] / غير: ناقصة [هـ] / الامتداد: لامتداد [ص] / هو: ناقصة [خ] وهو [ش] – 8 وليس: ليس [ح] / كثير: كثيرا [و] / أنه: أن [و، ق] / يحيط: تحيط [خ] – 7-9 فذلك ... الطول: ناقصة [جـ، ت، ر] – 9 ذا: اذا [ر، م] / ذا طول: واطول [و] / فقط: نجد التعليق التالي في هامش [ب، د، ش] «أي (يعني [د]) بل كان ذا اطول (اطوال [د]) وعروض» – 11 أحكم: حكم [و] / ذلك: ناقصة [ح] / أقليدس: اوقليدس [ث، ص] / حيث: من حيث [ا] – 12 امتداد: امتدادا [خ] / أن العرض خط يظنون: أن الخط عرض يظنون، وأثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] ناقصة [خ].

أن السمك خط، وبيان خطأهم في ذلك سواء. وهذه الأقدار الثلاثة تحدّ عظم كل جسم وانبساط كل سطح. والعمل في تقدير كمياتها إنما يتبيّن بالقياس إلى الواحد المسطح والواحد المجسم.

والواحد المسطح الذي به يقاس السطح هو سطح طوله واحد وعرضه / واحد / وزواياه قائمة، ذ – ٣٧٣ – و
س – ٥ – و
والواحد المجسم الذي به يقاس المجسم هو جسم طوله واحد وعرضه واحد وسمكه واحد، وقيام بعض
سطوحه على بعض على زوايا قائمة. فإن المقدار الذي به تقدر السطوح / والأجسام يحتاج/ إلى أن ر – ٣٤
ت – ٢٧٣
يلتئم بعضه إلى بعض عند التضعيف / التئامًا لا يترك في خلله شيئًا إلا أتى عليه، ويحتاج مع ذلك ص – ١٢٤
إلى أن يكون تمييز ما أتى عليه التقدير مما لم يأت/ عليه سهلاً. ولا شيء أبلغ في سهولة ذلك التمييز ل – ٢ – و
من أن يكون حكم الواحد الذي به يُقدر، في أفراده وفي تضاعيفه، حكمًا / واحدًا، ليكون المؤنة ك – ٢١٥ – و
في تمييز ما قدر مما لم يقدر في جميع الأحوال واحدة. وليس هذا بموجود/ في شيء من / الأشكال ي – ٥٩ – و
ع – ٧٨ – ظ
إلا في المربع، فإنه إذا ضوعف إنما / يتغير كميته ويكون تربيعه باقيًا. وأعظم الأشكال المربعة / و – ١٦٤ – و
خ – ١٨٤ – و
إحاطة هو القائم / الزوايا. فهذا هو العلة في جعل ذلك معيارًا دون غيره. ط – ٢٥٧ – و

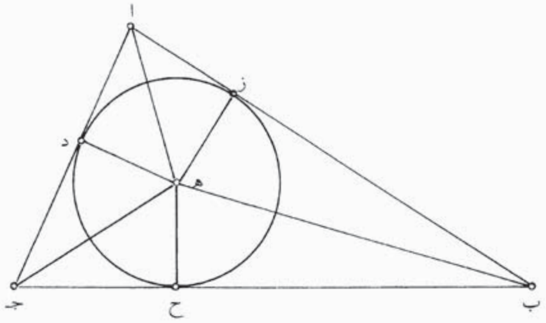
1 خطاهم: خطابهم [و] ناقصة [هـ] / في: ناقصة [هـ] / وهذه: هذه [ا] / الاقدار: الافراد [ا] / تحد: تجد [ب، ح، د، ش، ط، ل] يحد [ق] – 2 كمياتها: كمياتها [ث، د، ض، ک، ل، ن، و] / إنما: بما [ذ، ط، ع] انها [س] / يتبين: تبين [خ، ذ، ر، ط] نتبين [ل] / والواحد: او الواحد [ق] – 3 المجسم: المتجسم [خ] – 2-4 المسطح ... واحد (الثانية): ناقصة [و] – 4 والواحد ... قائمة: ناقصة [ح] / به: ناقصة [ع] / به يقاس: يقاس به [هـ] ناقصة [ي] / السطح: ناقصة [ي] / وزواياه: وزواياة [خ] وزاويتاه [ث] – 5-4 وزواياه ... وعرضه واحد: ناقصة [ق] – 5 المجسم: المتجسم [خ] / به: ناقصة [ت] / المجسم: ناقصة [ت] الجسم [ا، ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / هو: وهو [ح، س] / وسمكه واحد: ناقصة [م] – 6 به: أثبتها فوق السطر [س] / تقدر: بقدر [و] / إلى: ناقصة [ب، ث، جـ، ح، خ، د، هـ، ر، س، ش، ص، ض، ف، ق، ک، ل، ن، و، ي] – 7 يلتئم: المسم [خ] / يترك: تترك [ل] / شيئًا: شعيا [خ]؛ نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص، هـ] «أما أن المربع أعظم الأشكال إحاطة، أعني القائم الزوايا، فلما دلّنا برهان هـ من ب من الاسطقسات (الاسطقيليات [ب، ش]) وأما كون قائم الزوايا غير المربع أعظم من الشكل الذي زواياه غير قائمة فلكون عمود الأول (لاول [ص]) أطول من عمود الثاني، ومحيطاهما (ومحيطاها [ص]) متساويان»؛ ونجد في [ا] تعليق آخر / أتى: لقى [ق] / عليه: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] – 8 إلى: ناقصة [ع] / تمييز: يمين [ذ، ط] تميز [ا، ب، خ، ش، م] يمس [ي] / أتى: أثبتها فوق السطر [ت] / يأت: باب [خ] / عليه: على [خ] / في: من [ا] / ذلك: وذلك [ق] / التمييز: التميز [ب، خ، ذ، م، ش] اليمين [ط] القمر [ي] – 9 من: أثبتها في الهامش [ف] / الواحد: ناقصة [ت، جـ، ر، س] / به: ناقصة [ع] / تضاعيفه: يضاعيفه [خ] / المؤنة: للمونه [ع] الموبة [خ] – 10 تمييز: يمين [ذ، ط] تميز [ب، خ، ش، م] غير [ي] / واحدة: ناقصة [ا] / بموجود: الموجود [هـ] / من: الا من [ب، ش] ناقصة [و] – 11 إنما: فانما [خ، ف، ق، م، ي] / يتغير: تغير [ث] / كميته: كيفيته [م] نكسه [ذ، ط، ع] / ويكون: يكون [ر] / تربيعه: بربيعة [خ] / باقيًا: ناقصة [هـ] / المربعة: المربع [ق] – 12 معيارًا: معارا [ل] معياف آ [خ].

الأشكال

– آ – كل مضلّع يحيط بدائرة فسطح نصف قطر تلك الدائرة في نصف جميع أضلاع ذلك المضلع هو مساحته.

فليحط شكل ا ب ج بدائرة د ح ز التي مركزها هـ ونصف/ قطرها هـ ح، ونصل هـ ا هـ ب هـ ج. فظاهر أن هـ ح عمود لمثلث هـ ب ج، وأن سطح هـ ح في نصف ب ج هو مساحة مثلث هـ ب ج. وكذلك الحكم في مثلثي ا هـ ب ا هـ ج. فإذن نصف قطر/ الدائرة // في نصف جميع الأضلاع هو مساحة مثلث ا ب ج.

ض – ٧٢ – و
ث – ١٧٧ – ظ
ق – ٢٧ – و
ذ – ٣٧٣ – ظ



ونعلم من مثل ذلك أن كل مجسم يحيط بكرة، فإن تضعيف/ نصف قطر الكرة بثلث مساحة سطح المجسم المحيط بها هو تكسير المجسم وهو أعظم من تكسير الكرة.

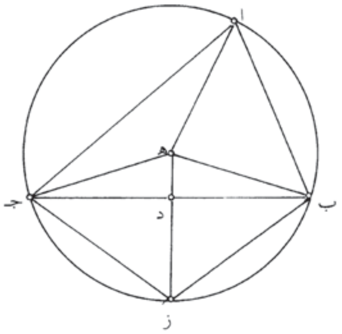
ش – ١٦٣ – و

2 آ : ناقصة [خ، س، ش، ض، ق، ي] / كل: ناقصة [م] / فسطح: لمسطح [ي] / تلك: أثبتها في الهامش [ت] / أضلاع: أثبتها في الهامش [م] – 4 فليحط : فليخط [ث، ح] فوق السطر [ض] / شكل: ناقصة [خ، ي] / ا ب ج: كتب الجيم حاءً ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ب، ش] / ونصف: نصف [و] / قطرها هـ ح: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ب] – 5 هـ ج: ج [ع] هـ ح، كثيرًا ما كتب الجيم حاءً ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [خ، ي] / فظاهر: وظاهر [ب، ش، ح] فظ [ت] / هـ ح: هـ ح [ض] / لمثلث: تملث [ع] / مساحة: مساحسة [ش] – 5-4 ونصل... سطح هـ ح: أثبتها في الهامش [م] – 6 هـ ب ج: ب ح [خ] / وكذلك: وكذا [ع] / ا هـ ب: ا د ب [ا، ت] – 7 الأضلاع: اضلاع [ط] / هو: وهو [و] – 8 ونعلم: ويعلم [ذ، خ، ر، س، ض] / مثل: مثلث [ا، خ] / مجسم: جسم [خ] / يحيط : ناقصة [ع] محيط [س] / فإن: فاذن [ع] / قطر: ناقصة [جـ، ت، س] / بثلث: مثلث [ذ، ط] في ثلث [ر] – 9 بها: ناقصة [ق] أثبتها فوق السطر [ض] / تكسير: بكسر [ط، و] / المجسم: ناقصة [و] / وهو: هو [ي] / تكسير: بكسر [و].

أقول هذا إنما يتبين بتوهم قسمة المجسم بمخروطات / رؤوسها مركز الكرة وقواعدها قواعد المجسم، ويكون نصف قطر الكرة أعمدة على قواعدها، فتكون / مساحته / مساحة تلك المخروطات. ف – ١٢٩ – ظ / س – ٥ – ظ / ت – ٢٧٤

– بَ – كل مضلّع في دائرة تحيط به، فسطح // نصف قطر الدائرة في نصف جميع الأضلاع أقل من مساحة/ الدائرة. ر – ٣٥ / ب – ١٥٧ – و / ا – ٩٨ – و

فلتحط دائرة ا ب جـ بمثلثه، وليكن المركز هـ، ونصل هـ ب هـ جـ وليكن هـ د عمودًا على ب جـ، ونخرجه إلى ز ونصل/ ب ز جـ ز.// فسطح هـ ز في نصف ب جـ يكون مساحة مثلثي/ هـ ب جـ ز ب جـ، وهو أقل من مساحة قطاع هـ ب ز جـ، وأعظم من مساحة مثلث هـ ب جـ. وبمثله نبيّن في باقي الشكل ونبيّن أن مساحة الدائرة أعظم كثيرًا من مساحة / مثلث ا ب جـ. ل – ٢ – ظ / ن – ١١٦ – ظ / م – ١٩ / ک – ٢١٥ – ظ / ع – ٧٩ – و



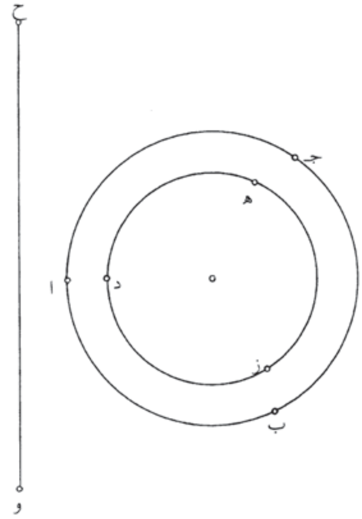
1 إنما: لنا [ي] / يتبين: س [ي] تبين [ر، ط] / بتوهم: يتوهم [ط] ناقصة [س] / قسمة: قسم [ق] / بمخروطات: المخروطات [ش]، نجد التعليق التالي في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص] «هي إنما تكون زاويات ويكون ضرب قطر الكرة في ثلث (ثلثه [ا]) قاعدة كل منها (منها [ا]) تكسيره»، ونجد في [ا] تعليق آخر/ رؤوسها: رأسها [ق] / وقواعدها: وقواعد [خ] – 2 قطر: قطره [ع] قطرة [خ] / نصف قطر الكرة: كتب «انصاف اقطار الكرة»، ثم رجع وكتب تحتها العبارة نفسها [ت] / مساحته: ناقصة [جـ، ر، ي] / مساحة: ساحه [ض] – 4 ب: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / في دائرة: أثبتها في الهامش [ر] / تحيط: يحيط [ا] / به: نجد فوق السطر «الدائرة» [ت] ناقصة [جـ] / قطر: قطرة [خ] – 5 الأضلاع: الاوصاع [ذ، ط] – 6-7 هـ ب ... ونصل: ناقصة [ح] – 6 دائرة: أثبتها في الهامش [ث] / بمثلثه: بمثله [ث] / هـ: د [م] / هـ جـ: وجـ [م] – 7 ب جـ: ا ب جـ [ع] / ونخرجه: ونخرج [و] / جـ ز: ناقصة [جـ، ت، ر] / هـ ز: زهـ [ط] / ب جـ: زجـ [س] ب حـ وبمثله [خ] / مساحة: أثبتها في الهامش [ا] مساحة ه [ع] – 8 ز ب جـ: د ب جـ [م] ود ب حـ [ذ، ع، ط] / وهو: هو[خ] / هـ ب زجـ: ب زح [خ] / مساحة: مكررة [ع] – 9 وبمثله: وبمثله [ض، ي] بمثله [ذ] / نبين: يبين [س]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / باقي: ما في [ح] / الشكل: الأشكال [ا، ث، ض، ک، ل، ن، و] / ونبين: وبيّن [س] / كثيرًا: اكثيرا [خ] / ا ب جـ: ب جـ [ذ، خ] – 8-9 قطاع ... من مساحة: أثبتها في الهامش [ث].

ونعلم من مثل ذلك أن المجسم الذي يحيط به كرة يكون تضعيف نصف قطر الكرة بثلث سطح المجسم أقل من مساحة الكرة.

– جـ – / إذا كان خط محدود ودائرة، فإن كان الخط أقصر من محيطها، أمكن أن يعمل في ذ – ٣٧٤ – و
الدائرة شكل مضلع تحيط به الدائرة، ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط. وإن كان الخط أطول من محيطها، أمكن أن يعمل على الدائرة مضلع يحيط بالدائرة ويكون جميع أضلاعه أقصر // من ذلك الخط. خ – ١٨٤ – ظ

ي – ٥٩ – ظ
ط – ٢٥٧ – ظ
و – ١٦٤ – ظ
ض – ٧٢ – ظ

فليكن الدائرة ا ب جـ / والخط / ح و وهو أقصر أولاً / من محيط ا ب جـ. وليكن محيط دائرة د ز هـ مثل خط ح و. فإذا عمل في دائرة ا ب جـ مضلع لا يماس محيط / هـ د ز، كان جميع أضلاعه أطول من محيط هـ د ز، أعني من خط ح و.



1 ونعلم: ويعلم [خ، ر، س، ل] / مثل: ناقصة [س، ض، ك، ل، ن، و] ح [ط] / تضعيف: نصف [ط] / نصف قطر الكرة: فراغ [ذ] / بثلث: بمثلث [م] لثلث [ش] – 3 جـ: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / خط: ا خط [خ] / ودائرة: نجد فوقها «ثاني» [م] ناقصة [خ، ي] / الخط: ناقصة [س، ع] / أقصر: افق [ي] ناقصة [خ] / محيطها: محيط [ع] / يعمل: نعمل [ر، ق، هـ] – 4 ويكون: مكررة [ي] – 5 الخط: أثبتها في الهامش [ع] / يعمل: نعمل [ث، ر، ق] / على: في [خ، ي] / مضلع: شكل مضلع [خ، ي] / يحيط: محيط [ث، خ، ط، ع، ف، ق، م]، كرر بعدها «الدائرة ويكون جميع أضلاعه أطول من ذلك الخط وإن كان الخط أطول» [ي] – 6 ذلك: ناقصة [ذ، ع، ط، م، هـ] – 7 ح و: ح د [ث] ح [ذ، ح، ع، ط، ل، هـ] ناقصة [ي] ح ر ر / من: ناقصة [و] / وليكن: فليكن [ح] – 8 د ز هـ: د هـ ز [ق] د ب هـ [ع، ط] د ز ح [ف] / خط: ناقصة [هـ] / يماس: تماس [ب، ش، ل] / هـ د ز: د هـ ز [جـ، ت، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، ف، ق، م، ي] / كان: وكان [هـ] – 9 هـ د ز: د هـ ز [جـ، ق] د ر [خ].

ثم ليكن الدائرة هـ د ز وخط ح و أطول من محيطها، وليكن محيط ا ب جـ مثل خط ح و. وإذا عمل في دائرة ا ب جـ مضلع لا يماس محيط هـ د ز، كان جميع أضلاعه أقصر/ من محيط ا ب جـ، أعني/ من خط ح و. ثم إذا عمل على دائرة هـ د ز / مضلع/ يماسها ويشبه/ المضلع المذكور، كان جميع أضلاعه أقصر كثيرًا من خط ح و؛ وذلك ما أردناه.

ج – ٤٣ – و
ص – ١٢٥
د – ١٤٨ – ظ
ت – ٢٧٥
ر – ٣٦

أقول: هذا مبنيّ على وجود دائرة يساوي محيطها أي خط محدود يفرض، وهذا مما لم يبيّن / في موضع. /

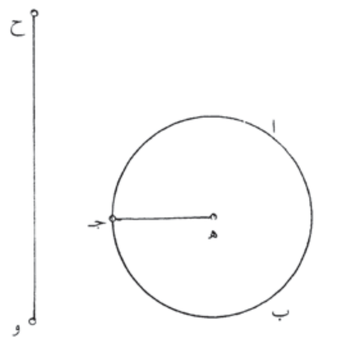
س – ٦ – و
ک – ٢١٦ – و

– دَ – كل دائرة فسطح/ نصف قطرها في نصف محيطها / هو مساحتها.

ل – ٣ – و
ق – ٢٧ – ظ

فليكن الدائرة ا ب جـ والمركز هـ ونصف القطر هـ جـ. فإن لم يكن سطح هـ جـ في نصف محيط ا ب جـ مساويًا / لمساحة الدائرة، كان سطح هـ جـ في خط إما أطول من نصف محيط ا ب جـ /أو أقصر منه مساويًا لمساحتها.

ذ – ٣٧٤ – ظ
ش – ١٦٣ – ظ



1 هـ د ز: د هـ ز [ق] هـ د [ي] هـ هـ د ر [خ] / محيطها: محيط [خ، ي] / محيط: ناقصة [جـ، س] / ا ب جـ: ا ب ح و [خ] / مثل خط ح و: ناقصة [خ] / ح و: ح ر [ض] ح [ي] – 1-3 ثم ... ح و: مكررة [ص] – 2 وإذا: فإذا [ي] إذا [ث] / يماس: يماس على [ا] تماس [ب، ش، و] / هـ د ز: د هـ ز [ق] هـ د هـ [جـ] – 3 ا ب جـ: ا ب ح [س] / خط: ناقصة [ح] / ثم: وثم [و] / على: أثبتها في الهامش [ف] / هـ د ز: د هـ ز [ق] د ر [خ] / يماسها: تماسها [ب، ش] – 4 كان: وكان [خ] / كثيرًا: ناقصة [ک، ل] / ح و: ح [خ، ط، ي] – 5 وجود: وحد [خ] / يساوي: تساوي [خ] / محدود: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / وهذا: هذا [ب، ش، ص] / مما: بما [ذ، ط] / يبين: يتبين [ح، خ، ق] – نجد تعليقًا في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، ص، هـ]؛ انظر Notes complémentaires – 7 دَ: ناقصة [س، ش، ص، ض، ع، ط، ق، ي] / قطرها: قصرها [و] / محيطها: محيط [ع] / هو: وهو [ي] – 8-9 فإن ... هـ جـ: ناقصة [س] – 8 هـ: ناقصة [و] / القطر هـ جـ: القطرة ح [خ] – 9 محيط: محط [ط] / مساويًا لمساحة: وبالمساحة [ي] / هـ جـ: هـ [ت] هـ ح ا [خ] / إما: ا هـ [ي] / من: مكررة [ت] – 10 أو: اذا [و] و [خ] / أقصر: اقطر [خ] / منه: منه او [جـ، س].

وليكن أولاً المساوي لها سطح هـ جـ في خط أقصر من نصف محيط ا ب جـ، وليكن ذلك الخط ح و. فضعف / ح و أقصر من محيط ا ب جـ. وقد يمكن أن يعمل في دائرة ا ب جـ مضلع يكون جميع أضلاعه أطول من ضعف ح و ونصفه أطول من ح و. ويكون نصف قطر هـ جـ في نصف جميع أضلاع ذلك المضلع أصغر من مساحة / الدائرة، فسطح هـ جـ في ح و أقل من مساحة / الدائرة كثيرًا. وكان مثلها، هذا خلف.

ع – ٧٩ – ظ
ب – ١٥٧ – ظ
ف – ١٣٠ – و

ثم ليكن المساوي لمساحتها سطح هـ جـ في خط أطول من نصف محيط ا ب جـ، وليكن ذلك الخط ح و. فضعف ح و أطول من محيط الدائرة. وقد يمكن أن يعمل على دائرة ا ب جـ مضلع يكون جميع أضلاعه أقصر من ضعف ح و، ونصفه أقصر من ح و. ويكون سطح نصف قطر هـ جـ في نصف جميع أضلاعه أعظم من مساحة الدائرة، فسطح هـ جـ في ح و أعظم كثيرًا منها. وكان مثلها، / هذا خلف. فإذن سطح هـ جـ في نصف محيط ا ب جـ مساوٍ لمساحة / دائرة ا ب جـ؛ وذلك / ما أردناه.

وقد بان/ منه أن سطح نصف القطر في نصف أي/ قوس تفرض يكون مساويًا / لمساحة / القطاع الذي تحيط به تلك / القوس ونصفا قطرين / يمرّان / بطرفيها./

ط – ٢٥٨ – و
ر – ٣٧
ت – ٢٧٦
ا – ٩٨ – ظ
خ – ١٨٥ – و
ذ – ٣٧٥ – و
ث – ١٧٨ – و
و – ١٦٥ – و
م – ٢٠
ح – ٨٧ – و
ل – ٣ – ظ
ك – ٢١٦ – ظ
ي – ٦٠ – و

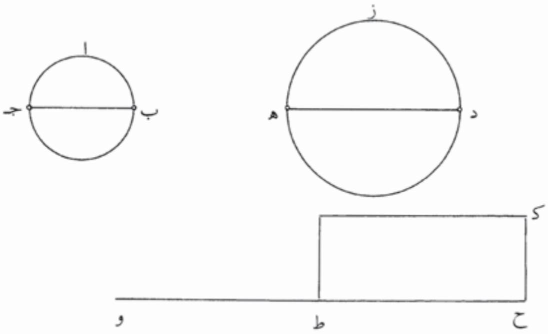
– هـ – نسبة قطر كل دائرة إلى / محيطها واحدة.

فلتختلف/ دائرتا/ ا ب جـ د هـ ز وليكن ب جـ قطر ا ب جـ ود هـ قطر د هـ ز.

---

1 أولاً: ناقصة [ف] / لها: أثبتها في الهامش [ط] – 2 ح و: ح ز [م] ناقصة [ي] / فضعف: وضعف [ا، ک، ض، ق، ل، ن، و] ومضعف [ث] ناقصة [ي] تضعيف [خ] / ح و: ح هـ [م] ا ب جـ [و] / يعمل: نعمل [ر، ق] – 3 يكون: مكررة [ي] / ح و: ح ر [خ] / ونصفه: والصفة [خ] ر نصفه [ض] / ح و: ح [ذ، ط] حـ ر [ض] / ويكون: يكون [و] / قطر: قطره [و] – 3-4 أضلاعه... جميع: ناقصة [م] – 4 جميع: ناقصة [ض] / هـ جـ: ح حـ [هـ] / ح و: ح ر [جـ، ت] / أقل: واقل [ا] / من: ناقصة [خ] – 4-5 فسطح... الدائرة: ناقصة [م] – 5 كثيرًا: كثير [ع] ناقصة [ي] / وكان: اذا كان [ي] / مثلها: قبلها [ي] / هذا خلف: «هف» في كل النص [ب، جـ، ت، ش، ع، ق] – 6 ثم: لنتم [ي] تم [خ] / أطول: ناقصة [ع] / نصف: بعد [ض] – 6-7 ا ب جـ ... محيط: ناقصة [ع] – 7 فضعف: وضعف [ا، ب، ت، ث، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ط، ف، ق، ک، ل، ن، م، و، هـ، ي] ناقصة [جـ] / ح و: ناقصة [جـ] وَ[ض، ل] / من: ناقصة [ذ، ط] / يعمل: نعمل [ت، ث، ق، هـ] – 8 ونصفه: والصفة [خ] / من: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ک، ل، ن، و] / ونصفه ... ح و: ناقصة [س] / ويكون: يكون [خ، ض، ع، ي] / سطح: أثبتها في الهامش [هـ] – 9 أضلاعه: مكررة [ع] / مساحة: محيط [ع] / هـ جـ: ح حـ [هـ] / ح و: ح وح [ع] هـ و [ض] – 10-11 فإذن ... أردناه: ناقصة [خ، ي] – 10-12 دائرة ... لمساحة: ناقصة [م] – 10 هـ جـ: هـ ح [ع] – 11 ا ب جـ: ناقصة [ش] – 12 القطر: أثبتها في الهامش [جـ] القطره [خ] / نصف أي: اي نصف [د، هـ] / تفرض: ناقصة [س] بعرض [خ] / يكون: أثبتها في الهامش [ن] ناقصة [ض] / مساويًا: مساو [ص] فوق السطر [ض] – 13 به: ناقصة [جـ] / القوس: المقوس [ع] / يمران: تمران [و] / بطرفيها: بطرفها [ا، د، ذ، ع، ط] بطرقيها [خ] – 14 هـ: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، و، ي] / قطر: أثبتها في الهامش [ف] / واحدة: واحد [هـ] – 15 فلتختلف: فتختلفا [ذ، ط] / دائرتا: دائرة [ت] ناقصة [س] دائراتا [خ] / د هـ ز: د هـ [م] / د هـ ز: د هـ [خ، ذ، ع].

فإن لم يكن//كما ادّعينا، فلتكن نسبة ب ج إلى محيط ا ب ج كنسبة د هـ إلى ح و وح و إما أطول من محيط د هـ ز أو أقصر منه. ن - ١١٧ - و / ض - ٧٣ - و

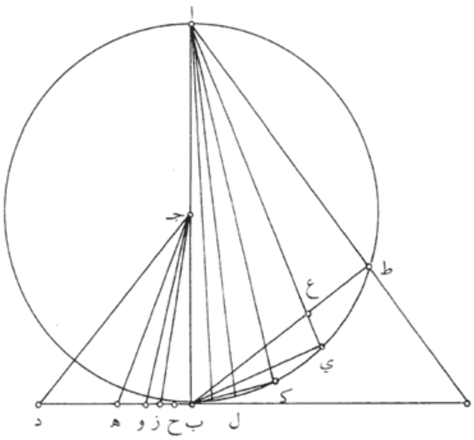


ونجعله أولاً أقصر منه. وننصّف ح و على ط، وليكن عمود/ ح ك على ح و ومساويًا لنصف د هـ. ونتمم سطح ك ط، فسطح ك ط أصغر من مساحة دائرة هـ د ز. ولكن نسبة ك ح إلى ح ط كنسبة نصف ب ج إلى نصف محيط ا ب ج، وسطح ك ح في ح ط هو سطح ك ط، وسطح نصف ب ج في نصف محيط ا ب ج هو سطح دائرة ا ب ج. فنسبة سطح ك ط إلى دائرة ا ب ج كنسبة ك ح،/ أعني نصف د هـ، إلى نصف ب ج مثناة، وهي نسبة د هـ إلى ب ج مثناة. وقد بيّن / أقليدس/ أن نسبة د هـ إلى ب ج مثناة كنسبة دائرة د هـ ز إلى دائرة ا ب ج، فنسبة سطح ك ط إلى دائرة ا ب ج كنسبة دائرة د هـ ز إليها، فسطح ك ط مساوٍ لدائرة د هـ ز. وكان / أصغر منها، هذا خلف./ فليس خط ح و أقصر / من محيط د هـ ز. س - ٦ - ظ / ع - ٨٠ - و / هـ - ٦٢ - و / ق - ٢٨ - و / ش - ١٦٤ - و / ص - ١٢٦ / ذ - ٣٧٥ - ظ

1 د هـ: هـ د [ا] / ح و: حـ و [خ] / وح و: ناقصة [ف] وح هـ [ح] رح و [ي] – 3 ونجعله ... منه: ناقصة [ذ، ع، ط] / وننصف: ونصف [ذ، ع، ط] / عمود: عمودا [ذ، ط] / ح ك: ك ح [ق] ح ط [ذ، ع، ط] / ح و: ح هـ [ا] / مساويًا: مساو [ت] – 4 ونتمم: وتمم [ذ، ع، ط] / ك ط: ط ك [س] ا ط د [خ] / فسطح ك ط: ناقصة [خ، س] / أصغر: وسطح نصف أصغر [ي] / هـ د ز: د هـ ز [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] د ز [ا] هـ ز د [س] / ولكن: وليكن [ت، جـ، ر، ح، س، ق] / ك ح: ط ح [ذ، ع، ط] ا ب ح [خ] – 5 ب ج: ب ح [و] / نصف: أثبتها في الهامش [ف] / محيط: بحيط [و، ي] / وسطح: وسط [ش] / ك ح: ب حـ [خ] / ك ط: ا ط [خ] – 6 وسطح: وسطح و [ح] / ك ط: ا ط [خ] – 7 كنسبة ك ح: ناقصة [ل] / ك ح: ط ح [س] ا ب حـ [خ] / د هـ: رهـ [م] / ب ج: د ج [ج] / وهي: هي [ي] – 8 وقد ... مثناة: مكررة [ذ، ط] / أقليدس: أوقليدس [ص، ض، ك، ل، ن، هـ، و] / نسبة: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / ب ج: ناقصة [ي] – 8-10 إلى دائرة ... د هـ ز (الأولى): ناقصة [م] – 9 ا ب ج: الى ب ج [ع] / فنسبة: ونسبة [ا] / سطح: مكررة [ج] / ك ط: ط ك [ب، ش، ض، ن، ك، ل، و] / د هـ ز: د هـ [د، هـ] / فسطح: سطح [ي] / ك ط: ط ك [ك، ل] – 10 لدائرة: للدائرة [خ] / منها: منها [هـ] / هذا خلف: هف، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [س] / فليس: فليكن [ت]؛ كتبها أولاً «فليكن» ثم ضرب عليها بالقلم [ع] / ح و: و [ع] / محيط: المحيط [ت] / د هـ ز: د هـ [هـ] هـ ز [ي] د هـ هـ ر [خ].

وبمثل هذا التدبير نبيّن أنه ليس أطول منه. فإذن نسبة د هـ إلى محيط د هـ ز كنسبة ب ج إلى محيط ا ب ج، وكذلك في كل دائرتين غيرهما؛ وذلك ما أردناه./

– وَ – ثم لنبيّن نسبة القطر إلى المحيط بالوجه الذي عمل به أرشميدس، فإنه لم يصل / إلينا ر – ٣٨ ت – ٢٧٧
وجه استخرجه أحد إلى زماننا غير ذلك./ وهذا الوجه وإن لم يوصل إلى معرفة قدر أحدهما من ط – ٢٥٨ – ظ
الآخر حتى ينطبق به على الحقيقة، فإنه موصل إلى استخراج قدر أحدهما من الآخر إلى أي غاية أراد الطالب من التقريب./



وليكن/ لبيانه دائرة ا ط ب وقطرها ا ب، ومركزها ج. ونخرج من ج خط ج د يحيط مع ل – ٤ – و
ج ب بثلث قائمة، ونخرج من ب / عمود ب د على ج ب. فالقوس التي توتر زاوية ب ج د ك – ٢١٧ – و
نصف سدس دائرة ا ط ب، / وخط ب د نصف ضلع المسدس المحيط بدائرة ا ط ب. وننصف ب – ١٥٨ – و خ – ١٨٥ – ظ

1 التدبير: المدبر [و] / نبين: بين [ذ، ط] يتبين [ح] / نسبة: ناقصة [م] / محيط: محيطا [م] / د هـ ز: د هـ [ا، ت، ي] / كنسبة: وكنسبة [خ] – 2 في: آ في [خ] / غيرهما: عندهما [ض] غير فيها [خ] / أردناه: من هنا إلى صفحة 91 ناقص في [ر] – 3 وَ: نجدها في بداية الفقرة التالية [ا، ب، ث، ح، ص، ف، ك، ل، ن، م] ناقصة [ت، خ، س، ش، ض، ع، ق، و] / به: ناقصة [ع، ط] / يصل: نصل [و] – 4 استخرجه: استخراج [ق] استخراجه [ا، ث، ج، ح، ص، ض، ك، ل، ن، و] استخراجه من [ت] استخراجه عن [س] / زماننا: هذا الزمان [ت] زمان [ج] / وهذا: ناقصة [ت] / يوصل: يصل [ب، ش، ص] / إلى: من [ع] / قدر: قد [ض] – 4-5 من الآخر: ناقصة [ق] – 5 حتى ... الآخر: ناقصة [ض] / ينطبق: ينطق [ا، ب، ث، هـ، ح، خ، د، س، ش، ع، ط، ف، ق، ك، ن، م، و] ته لحق [ي] / الحقيقة: الحقيقي [ق] الحقيقة ولكن [خ] / قدر: ناقصة [ت] قد [و] قدر احد ر [خ] – 6 الطالب: الطلب [و] / من التقريب: تقريبا [ف] – 7 وقطرها: قطرها [هـ] / ا ب: ناقصة [ذ، ع، ط] – 8 ج ب: ج د [م] / بثلث: ثلث [ق] / ب د: ر د [ت] / فالقوس: والقوس [ق] / التي: الذي [س] – 9 نصف: ناقصة [ض] / المسدس: السدس [س] / ا ط ب: أثبتها فوق السطر [ث] / وننصف: وبنصف [خ، س] ناقصة [ذ، ع، ط].

زاوية ب جـ د بخط جـ هـ، وننصف زاوية ب جـ هـ بخط جـ و،/ وننصف زاوية ب جـ و بخط ف – ١٣٠ – ظ
جـ ز، وننصف زاوية ب جـ ز بخط جـ ح. فبيّن أن القوس/ التي توتر زاوية ب جـ ح جزء من س – ٧ – و
١٩٢ من محيط ا ط ب،/ وأن خط ب ح نصف ضلع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بدائرة جـ – ٤٣ – ظ
ا ط ب. ولنجعل جـ د / ٣٠٦ لسهولة العمل كما تبيّن، فيكون مربعه ٩٣٦٣٦، وكان ب د ١٥٣ ض – ٧٣ – ظ / ذ – ٣٧٦ – و
لأن زاوية ب جـ د ثلث زاوية / جـ ب د القائمة، وكان مربع/ ب د ٢٣٤٠٩ ومربع جـ ب ي – ٦٠ – ظ
٧٠٢٢٧، فخط جـ ب أكثر من ٢٦٥. ولكن نسبة ب جـ جـ د مجموعين إلى ب د كنسبة
جـ ب إلى ب هـ، لأن جـ هـ ينصف زاوية/ ب جـ د؛ وب جـ جـ د مجموعين / أكثر / من م – ٢١
٥٧١، وب د ١٥٣، فنسبة جـ ب إلى ب هـ أعظم من نسبة ٥٧١ إلى ١٥٣. وبالمقدار الذي ع – ٨٠ – ظ / و – ١٦٥ – ظ
يكون ب هـ / ١٥٣، يكون جـ ب أكثر من ٥٧١ ومربعه أكثر من ٣٢٦٠٤١ ومربع ب هـ ت – ٢٧٨
٢٣٤٠٩ ومربع جـ هـ أكثر من ٣٤٩٤٥٠، فخط جـ هـ أكثر من ٥٩١ وثمن.

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة جـ ب إلى ب و أعظم من نسبة/ ١١٦٢ وثمن/ إلى ١٥٣. ا – ٩٩ – و
وإذا كان ب و / ١٥٣، كان جـ ب أكثر من ١١٦٢ وثمن، ومربعه أكثر من ١٣٥٠٥٣٤، ومربع د – ١٤٩ – و / ق – ٢٨ – ظ
ب و ٢٣٤٠٩ ومربع جـ و أكثر من ١٣٧٣٩٤٣، فخط جـ و أكثر من ١١٧٢/ وثمن. ل – ٤ – ظ

1 زاوية ... جـ هـ: ناقصة [ذ، ع، ط] / ب جـ د: رجـ د [س] / جـ هـ: جـ د [م] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ب جـ هـ: ب هـ جـ [ل] ب جـ هـ د [ذ] / بخط: ناقصة [خ] / جـ و: جـ [ذ، ع] و[خ] حـ ر[ض] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / زاوية: ناقصة [ت] / ب جـ و: ب جـ ر [م] ب جـ د [جـ، ت] ب جـ [و] / بخط: وبخط [س] – 1-2 ب جـ و ... زاوية (الأولى): ناقصة [ي] – 2 وننصف: وبنصف [خ، س] / زاوية: أثبتها فوق السطر [ث] / ب جـ ز: ب جـ د [ي] / جـ ح: كرر ناسخ [ط] بعدها «ننصف زاوية ب جـ و»، ثم استدرك فأشار فوقها / فبين: فتبين [ا، ت، ث، خ، ض] / جزء: مرا [ي] ح ر[خ] – 3 من: ناقصة [ص، و] / ا ط ب: ل ط ب [ي] / وأن: فان [ث] / ذي: اي [ي] – 4 جـ د: ح د [ت] / ٣٠٦: ٣٠٩ [ض] ٣٠٤ [ي] / لسهولة: بسهولة [ب، ش] / تبين: يتبين [ا، ب، ت، ث، خ، د، ش، ص، ض، ك، ن، و] / ٩٣٦٣٦: ٩٣٦٣ [ط] ٩٣٦٢٦ [هـ] ٩٣٩٣٩ [ض] / ب د: نجد في هامش [د، ص، هـ] التعليق التالي «فيكون ب د وتر السدس في الدائرة التي قطرها جـ د ف جـ د ضعفه» / ١٥٣: ٥٣ [هـ] – 5 جـ ب د: جـ ر د [جـ، ت] / القائمة: القائمة مربع [ث] / مربع: سطح [ط] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] ٣٣٤٠١ [هـ] ٢٢٤٠٩ [ض] ٢٣٤٥٩ [ذ] / جـ ب: ب جـ [س] ناقصة [و] في ب [خ] – 5-6 زاوية جـ ب د ... جـ ب: ناقصة [ا] – 6 ٧٠٢٢٧: ٧٠٣٢٧ [ت] ٧٠٢٢٠ [خ] / ٢٦٥: ٢٦٩ [ض] / ولكن: وليكن [ح، ي] – 7 جـ ب: ب جـ [و] / ينصف: بنصف [ط] تنصف [س]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «إذ من التنصيف يلزم أن تكون نسبة د جـ إلى جـ ب كنسبة د هـ إلى هـ ب وإذا ركبنا وبدلنا يلزم ما ذكر» / وب جـ: ناقصة [م] / جـ د: جـ هـ [ص] / مجموعين: مجموعان [د] / أكثر، كتبها أكبر، ولن نشير إليها فيما بعد [س] – 6-7 إلى ب د ... مجموعين: مكررة [ط] أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ث] – 8 ٥٧١: ٥٧٠ [ف] / ١٥٣: ١٤١٣ [ي] ١٤٠٣ [خ] / ب هـ: نه [خ] / أعظم: مكررة [ص] / ٥٧١ إلى ١٥٣: ١٥٧١ [د] – 8-9 فنسبة ... ٥٧١: مكررة، ونجد بعدها «وب د ١٥٣»، ثم كرر مرة أخرى «فنسبة ... ٥٧١» [ت] – 9 ب هـ: نه [خ] / يكون ب هـ ١٥٣: مكررة [س] / ١٥٣: ١٤١٣ [ي] / ٥٧١: ٤١٧١ [ي] / ومربعه: ومربعة [ث] / ٣٢٦٠٤١: ٣٢٦٥٤١ [ك، ل] ٣٢٦٠١٦١ [خ] / ب هـ: ناقصة [و] – 9-10 ٣٢٦٠٤١ ... من (الأولى): ناقصة [ع] – 10 ٢٣٤٠٩: ٢٣٤٩ [خ] / ٣٤٩٤٥٠: ٣٤٩٤٥ [هـ] ٣٩٤٥٠ [خ، ي] / ٥٩١: ٩٩١ [م] – 11 ذلك: دكل، ثم أثبت الصواب تحتها [ا] / جـ ب: ب جـ [ك، ل] / ب و: ب ر [ض] / ١٥٣: ٦٥٣ [ت] ١٥٢ [ف] – 11-12 إلى ١٥٣ ... وثمن: ناقصة [ل] – 12 وإذا: فاذا [ث] / وإذا ... ١٥٣: ناقصة [جـ، ت] / وإذا كان: كان وإذا [ح] / ب و: تو [ي] / ١٥٣: ١٠٣ [ع] ١٦٣ [ح] / كان: وكان [ت] / من: ناقصة [ت] / ومربعه: مربعه [ذ، ط، ع] / من: أثبتها في الهامش [ن] / ١٣٥٠٥٣٤: ١٣٠٥٣٤ [د، هـ] ١٣٥٠٠٣٤ [ع] ١٣٥٠٠٣٩٤ [ط] ١٣٥٣٤ [خ، س] ١٣٥٥٣٤ [ي] – 13 ب و: ب د [ت] ناقصة [و] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] ٢٤٠٩ [خ] / جـ و: حـ هـ [ت، جـ، خ، ذ، س، ع، ط، ق، م، ي] / أكثر من: ناقصة [ي] / ١٣٧٣٩٤٣: ١٢٧٣٩٤٣ [ق] ١٧٣٩٤٣ [ح] / جـ و: حـ وهـ [ذ، ع، ط] جـ د [ت].

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة جـ ب إلى ب ز أعظم من نسبة **٢٣٣٤** وربع إلى **١٥٣**. فإذا
كان ب ز / **١٥٣**، كان جـ ب أكثر من **٢٣٣٤** وربع، / ومربعه أكثر من **٥٤٤٨٧٢٣**، / ومربع ث – ١٧٨ – ظ ن – ١١٧ – ظ
ب ز **٢٣٤٠٩**، ومربع جـ ز أكثر من **٥٤٧٢١٣٢**، / فخط جـ ز أكثر من **٢٣٣٩** وربع. ک – ٢١٧ – ظ
وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة جـ ب / إلى ب ح أعظم من نسبة **٤٦٧٣** ونصف إلى **١٥٣**. ط – ٢٥٩ – و ذ – ٣٧٦ – ظ
فإذا كان خط ب ح **١٥٣**، كان جـ ب أكثر من / **٤٦٧٣** ونصف. وهذا / هو قدر ضلع ذي ستة س – ٧ – ظ ش – ١٦٤ – ظ
وتسعين ضلعًا/ عند القطر. فقدر القطر عند جميع أضلاع ذي ستة وتسعين ضلعًا يحيط بالدائرة ت – ٢٧٩
أعظم / من قدر **٤٦٧٣** ونصف عند **١٤٦٨٨** وهو أقل من ثلاثة وسبع من الواحد. خ – ١٨٦ – و

ثم نخرج في دائرة ا ط ب وتر السدس، وهو ط ب، ونخرج ا ط، وننصف زاوية ط ا ب بخط
ا ي ونصل ي ب، / وننصف زاوية ي ا ب بخط ا ک ونصل ک ب، وننصف زاوية ک ا ب بخط ب – ١٥٨ – ظ
ا ل ونصل ل ب، وننصف زاوية ل ا ب بخط ا م ونصل م ب، فيكون م ب ضلع ذي ستة
وتسعين ضلعًا يحيط به الدائرة. ثم نجعل ا ب **١٥٦٠** لسهولة/ هذا العمل، / فيكون وتر ب ط ض – ٧٤ – و ع – ٨١ – و
٧٨٠/، ويكون مربع ا ب **٢٤٣٣٦٠٠** ومربع ب ط **٦٠٨٤٠٠** ومربع ط ا **١٨٢٥٢٠٠**، فخط ص – ١٢٧
ط ا أقل من **١٣٥١**. ولكن نسبة ط ا ا ب معًا إلى ط ب كنسبة ا ط إلى ط ع وهي كنسبة ا ي

1 وعلى: على [خ] / ب ز: ب و [س] / ٢٣٣٤: ٢٣٢٤ [م] ٢٣٣٢ [ض] / ١٥٣: ١٣٣ [جـ] ٥٣ [ع] ١٥٢ [م] – 2 كان ب ز: كانت ز [م] / ب ز: ب و [س] / ١٥٣: ٥٣ [جـ] ٤٣ [خ] / ٢٣٣٤: ٣٣٤ [جـ] ٢٣٢٤ [هـ] / ومربعه: مربع [ذ، ع، ط] ومربعة [ث] / ٥٤٤٨٧٢٣: ٤١٤٧٧٢٣ [خ] – 2-3 ٥٤٤٨٧٢٣ ... من (الأولى): ناقصة [ط] / ومربع ب ز ٢٣٤٠٩: ناقصة [ع] – 3 ب ز: ب د [جـ، ت، ذ] / ٢٣٤٠٩: حـ ٢٣٤٠ [ت] / جـ ز: أثبتها فوق السطر [و] / من: ناقصة [ا، ع] / ٥٤٧٢١٣٢: ٥٤٧١٣٢ [ي] / من: ناقصة [ص، ض، ن، ک، ل، و] / وربع: ومربع [خ، و] – 4 نبين: بين [ي] / نسبة: ناقصة [ع] / ب ح: ب حـ [س، ض، ع] / ٤٦٧٣: ٤٦٧٢٣ [ذ، ع، ط] ٤٦٧٢ [م] ٤٩٧٣ [ض] / إلى: ناقصة [ذ، ع، ط] / ١٥٣: ١٢٣ [خ] – 5 فإذا: وإذا [خ] / خط: ناقصة [ت، جـ، س] / ب ح: ب حـ [س، ص] / ١٥٣: ١١٥٣ [ط] كتب بعدها «وكان وح ١٥٣» [جـ، ت] / جـ ب: جـ ا [ا] ب جـ [ل] / ٤٦٧٣: ٤٩٧٣ [س] – 6 فقدر: بقدر [س] / عند القطر ... ضلعًا: ناقصة [ا] / أضلاع: ناقصة [خ] / يحيط: يحيطها [ي] محيطها [خ] / بالدائرة: الدائرة [خ، ي] – 7 من: ناقصة [ي] / ٤٦٧٣: ٤٦٧٢ [ع، م] ٤٢٧٢ [ذ، ط] / عند: ناقصة [خ، ف، م، ي] / ١٤٦٨٨: ٤٦٨٨ [ا، خ] ١٢٦٨٨ [س] / نجد في هامش مخطوطات [ا، ب، د، ش، هـ] التعليق التالي «فما بإزاء جميع الأضلاع أطول من ثلاثة أمثال ما (ناقصة في [ا]) بإزاء القطر ستمائة وسبعة وستين ونصف التي (الى في [د]) نسبتها إلى أجزاء القطر أقل من السبع» / وهو أقل من ثلاثة: مكررة [م] – 8 ا ط ب: ط ب [ع] ل ط ب [ي] / ط ب: ط ا [و] / ونخرج: نخرج [و] / ونخرج ا ط: ناقصة [م] / وننصف: وبنصف [س، ط] ونصف [و] – 8-9 وننصف ... ي ب: ناقصة [ا] / ط ا ب ... ک ب: مكررة [د] – 9 ا ي: ا ح [ت] ا ب [ف] / ي ب: ح ب [ت] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط، م] ونصف [ا، و] / ي ا ب: ح ا ب [ت] / ک ب: ک [ذ، ط، ع] ا ب [خ] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ک ا ب بخط: ا ب ک ط [خ] / وننصف زاوية ي ا ب ... ک ب: مكررة [ي] – 9-10 وننصف ... ل ب: مكررة [ا] – 10 ل ب: ا ب [ب، ش] ک ب [خ] / وننصف: وبنصف [خ، س، ط] / ل ا ب بخط: ا ب ک ط [خ] / فيكون م ب: ناقصة [ذ، ع، ط] / م ب: من ب [ب، ش] – 11 يحيط: محيط [ي] / به: أثبتها فوق السطر [ن] / ثم: ناقصة [ي] / ١٥٦٠: ١٥٦ [ذ، ع، ط] ١٠٦٠ [خ] / لسهولة: السهولة [ا] / ب ط: نجد في [ا، ب، د] التعليق التالي «لأن النسبة بينهما نسبة الاثنين إلى الواحد» – 12 ٧٨٠: ١٧٨٠ [د] ١١٨٠ [ض] / مربع ا ب ... ٢٤٣٣٦: فراغ [ذ] / ا ب: ناقصة [و] / ٢٤٣٣٦٠٠: ٢٤٣٣٦٠ [خ، م] / ب ط: رط [م] ل ط [خ] / ٦٠٨٤٠٠: ٦٨٤٠٠ [ذ، ع، ط، م] / ١٨٢٥٢٠٠: ١٧٢٥٢٠٠ [س] ١٨٢٩٢٠٠ [هـ] ٨٢٥٢٠ [خ] – 11-12 ١٥٦٠ ... مربع ا ب: ناقصة [م] – 13 ط ا: ا ط [م] / من: ناقصة [ت] / ١٣٥١: ١٣٥ [خ، ي] / ولكن: وليكن [ب، جـ، ح، ذ، ش، ط] / ط ا ا ب: ط ا ب [خ] / ا ط: ط ب [و] / ا ي: ا ح [ت].

إلى ي ب./ وخطا ط ا ا ب معًا أقل من ٢٩١١ وط ب ٧٨٠. فإذا كان ي ب ٧٨٠، كان ا ي ي – ٦١ – و
أقل من ٢٩١١، // ومربع ا ي أقل من ٨٤٧٣٩٢١ ومربع ي ب ٦٠٨٤٠٠، ومربع ا ب أقل ذ – ٣٧٧ – و ف – ١٣١ – و
من ٩٠٨٢٣٢١؛/ فخط ا ب أقل من ٣٠١٣ وثلاثة أرباع واحد. ل – ٥ – و

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ا ك إلى ك ب أقل من نسبة ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع واحد إلى
٧٨٠. فإذا كان خط ك ب ٧٨٠، كان ا ك أقل من ٥٩٢٤ وثلاثة أرباع / واحد. وقدر ٥٩٢٤ ت – ٢٨٠
وثلاثة أرباع واحد عند ٧٨٠ كقدر/ ١٨٢٣ عند ٢٤٠. فإذا كان ك ب ٢٤٠، كان ا ك أقل من و – ١٦٦ – و
١٨٢٣، ومربع ا ك أقل من ٣٣٢٣٣٢٩، ومربع ك ب ٥٧٦٠٠، فمربع ا ب أقل من
٣٣٨٠٩٢٩، فخط ا ب أقل من ١٨٣٨ / وتسعة أجزاء من أحد / عشر من واحد./ ك – ٢١٨ – و

وعلى ذلك المثال نبيّن أن / نسبة ا ل إلى ل ب أقل من نسبة ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر إلى ق – ٢٩ – و س – ٨ – و
٢٤٠، وقدر ٣٦٦١ وتسعة من أحد عشر عند ٢٤٠ كقدر ١٠٠٧ عند ٦٦. وإذا كان/ ل ب ط – ٢٥٩ – ظ ا – ٩٩ – ظ
٦٦، كان ا ل أقل من ١٠٠٧، ومربع ا ل أقل من ١٠١٤٠٤٩، ومربع ل ب ٤٣٥٦، ومربع
ا ب أقل من ١٠١٨٤٠٥، فخط ا ب أقل من ١٠٠٩ وسدس واحد.

1 ي ب: ا ي ب [خ] / وخطا: وخط [ب، ث، ذ، ش، ص، ض، ع، ط] ناقصة [ج] / ط ا: ا ط [ث] / وط ب: ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / .٧٨: ٧٨ [خ، م] ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / فإذا: فاذن ان [ج، ت] / ي ب: ح ب [ت] / كان: وكان [ع] ناقصة [ي] / ا ي: ا ح [ت] – 2 من: قد تقرأ «لكن» ونجد «دون» فوقها [ا] / ا ي: ا ح [ت] أثبتها في الهامش [ث] / ٢٩١١ ... من: مكررة [ي] / ومربع ا ي أقل: ناقصة [ك، ل] / من: ناقصة [ل] / ٨٤٧٣٩٢١: ٨٢٧٣٩٢ [و] ٨٢٧٣٩٢١ [ض] / ي ب: ح ب [ت] / ٦٠٨٤٠٠: ٢٠٨٤٠٠ [ذ، ط] أقل من ٦٠٨٤٠٠ [ل] ٦٠٧٤٠٠ [ح] ٦٨٤٠٠ [خ] – 3-2 من ٨٤٧٣٩٢١ ... فخط ا ب أقل: أثبتها في الهامش [ك] – 3 ٩٠٨٢٣٢١: ٩٠٨٢٣٣٢١ [ذ، ع، ط] ٩٠٧٢٣٢١ [ح، د] ٩٠٨٣٣٢١ [م] / أقل: قل [ل] / من ٣٠١٣: ناقصة [ك، ل] / ٣٠١٣: ٣٠١٢ [م] ٣١٣ [خ] / واحد: ناقصة [س] – 4 ك ب: ك ر [ع] ا ب [خ] / ٥٩٢٤: ٩٢٤ [ي] ٦٩٢٤ [خ] / واحد: كتب بعدها «وعلى ذلك المثال نبين أن نسبة»، ثم ضرب عليها بالقلم [ع] – 5-4 أقل ... خط: ناقصة [ل] / إلى ٧٨٠ ... واحد: ناقصة [ح، ذ، ع، ط، م] – 5 خط: ناقصة [و] / ك ب ٧٨٠: لب ٧٨ [ي] / ا ك: أثبتها في الهامش [ن] / وثلاثة: ثلثه [ي] / ٥٩٢٤: ٤٢٤ [خ] – 6-5 وقدر ... واحد: ناقصة [ت، ف] – 6 عند: عنده [س، ع] وعند [خ] / ٧٨٠ ... عند: مكررة [ح] / كقدر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «لأن نسبة كل واحد من العددين الأولين إلى نظيره من هذين العددين نسبة (كنسبة [ص]) ثلاثة وربع إلى الواحد» / فإذا ... ٢٤٠: ناقصة [س] / ك ب: ل ب [خ] / ٢٤٠، كان ا ك: ناقصة [ج، ت] / ا ك: أثبتها في الهامش [ع] – 7 ١٨٢٣: ١٨٢٢ [ا] / ومربع: مربع [و] / ٣٣٢٣٣٢٩: ٣٣٢٣٣٩ [ع] ٣٣٢٣٣٣٢٩ [ص] ٣٣٣٣٣٢٩ [ت] ٣٣٢٣٢٩ [ح] / ك ب: ك ر [ع] / ومربع ك ب: مكررة [ث] غير واضحة [خ] / ٥٧٦٠٠: ٧٧٦٠٠ [ج، ت، س] ٥٧٢٠٠ [ك، ل] – 8-7 ٥٧٦٠٠ ... ٣٣٨٠٩٢٩: مكررة [ث] – 8 ٣٣٨٠٩٢٩: ٣٣٨٠٢٩ [خ] / من: ناقصة [ع] / وتسعة: وستة [ي] نسبة [خ] / أحد عشر: ١١ [ت، ج، ذ، ع، ط، م] – 9-8 من واحد ... عشر: أثبتها في الهامش [ث] – 9 المثال: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ل، ك، ن، م، و] / نبين: ناقصة [و] / نسبة (الأولى): ناقصة [ي] / ٣٦٦١: ٣٢٦١ [ك، ل] – 10-9 إلى ٢٤٠ ... عشر: مكررة [خ] – 10 ٣٦٦١: ٣٦ [ت] ٦٦١ [خ] / أحد عشر: ١١ [ج، ت] / عند: ناقصة [ذ، ط] / كقدر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «إذ (أي [ا]) نسبة كل منها إلى نظيره من هذين العددين (ناقصة في [ا، د، ص، هـ]) نسبة أربعين إلى أحد عشر» / عند ٦٦: ناقصة [ف] / ١٠٠٧ عند ٦٦: ٦٦٠٠٧ [ع] / وإذا: فاذا [د] / كان: كانت [ي] / ل ب: ا ب [ض، و] – 11 من: ناقصة [ث، خ، ي] / ١٠٠٧ ومربع ا ل أقل: أثبتها في الهامش [ث] / من: ناقصة [ض، ك، ل، ن، و] / ١٠١٤٠٤٩: ٠١٤٠٤٩ [خ] ١٥١٤٠٤٩ [ذ] / ٤٣٥٦: ٤٣٥٤ [ذ، ط، ع] ٤٣٥٩ [ب، ش] – 12 من: ناقصة [ع] / ١٠١٨٤٠٥: ٠١٨٤٠٥ [ط] ١٠١٨٤٠ [خ] / ١٠١٨٤٠٥ ... أقل من: مكررة [ي] ناقصة [م].

وعلى ذلك المثال نبيّن أن نسبة ام إلى م ب أقل من ٢٠١٦ وسدس واحد عند ٦٦. فإذاكان م ب ٦٦، كان ام أقل من ٢٠١٦ وسدس،/ ومربع ام أقل من ٤٠٦٤٩٢٨، ومربع م ب ٤٣٥٦ ومربع اب أقل من / ٤٠٦٩٢٨٤،/ فخط اب أقل من ٢٠١٧ وربع واحد. ولكن خط م ب / بهذا القدر ٦٦ وخط م ب ضلع ذي ستة / وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة. فنسبة القطر إلى أضلاع / ذي ستة وتسعين ضلعًا الذي / تحيط به الدائرة أقل من نسبة ٢٠١٧ وربع واحد إلى ٦٣٣٦.

خ – ١٨٦ – ظ / ذ – ٣٧٧ – ظ / ش – ١٦٥ – و / م – ٢٢ / ع – ٨١ – ظ / ض – ٧٤ – ظ / جـ – ٤٤ – و

فقد / تبيّن أن نسبة جملة / أضلاع ذي / ستة وتسعين ضلعًا الذي تحيط به الدائرة إلى القطر أعظم من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد. ومحيط الدائرة أطول من جملة أضلاع ذي ستة وتسعين / ضلعًا الذي تحيط به الدائرة وأقصر/ من جملة أضلاع / ذي ستة وتسعين ضلعًا الذي يحيط بالدائرة. فقد صحّ مما وصفنا أن نسبة محيط الدائرة إلى / قطرها أعظم من نسبة ثلاثة وعشرة أجزاء من واحد وسبعين إلى الواحد وأصغر من نسبة ثلاثة وسبع إلى الواحد؛ وذلك ما أردناه.

ل – ٥ – ظ / ذ – ٣٨٨ – و / ث – ١٧٩ – و / ن – ١١٨ – و / ت – ٢٨١ / ي – ٦١ – ظ / ب – ١٥٩ – و

ومن الممكن أن يوصل بهذا / الوجه بعينه إلى أي غاية يراد من التدقيق في هذا العمل./

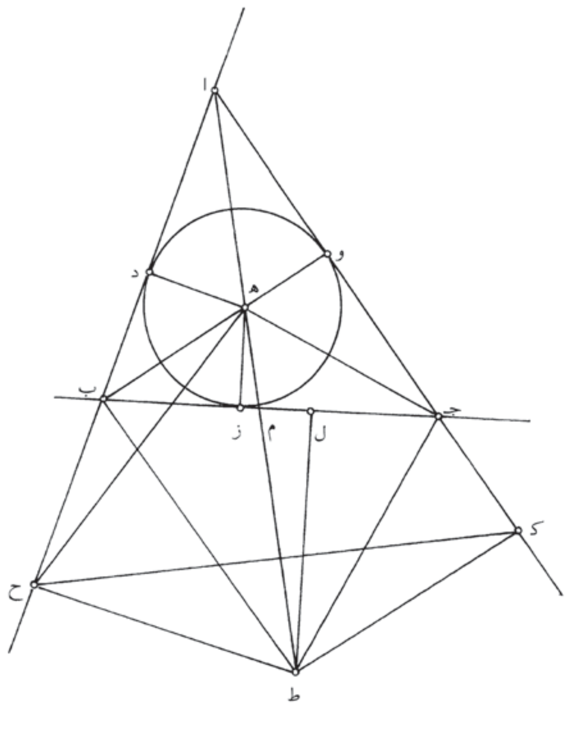
ک – ٢١٨ – ظ / ح – ٨٧ – ظ

/ – زَ – كل مثلث إذا ضرب نصف جميع أضلاعه في فضله على كل/ ضلع من أضلاعه بأن يضرب في فضله على أحد أضلاعه، ثم في ثانيها ثم في ثالثها، كان / الحاصل مساويًا لضرب تكسيره في نفسه.

ز – ٣٧ – و / س – ٨ – ظ / ق – ٢٩ – ظ

1-2 وعلى ... كان ام أقل من: ناقصة [م] – 1 المثال: ناقصة [و] / ٢٠١٦: ٤٠١٦ [ل] ٢٠١٧ [هـ] ٢١٤ [خ] ٦٠١٦ [ض] – 2 ٢٠١٦ ... أقل: أثبتها في الهامش [ن] / ٢٠١٦ ... أقل من: ناقصة [س] / ٢٠١٦ وسدس: سدس و٢٠١٦ [ک، ل] / وسدس: سدس [و] / ومربع: مربع [و] / ام: ناقصة [خ] / من: ناقصة [ض، ک، ل، ن، و] / ٤٠٦٤٩٢٨: ٤٠٨٤٩٢٨ [ص] ٤٠٤٩٢٨ [ا] ٤٠٦٩٢٨ [خ] – 3 ٤٣٥٦: ٤٢٥٦ [م] / ٤٠٦٩٢٨٤: ٤٠٦٩٢٨٢ [جـ، ت] ٤٠٦٩٣٨٤ [ک، ل] / من: ناقصة [ض، ک، ل، ن، و] / ٢٠١٧: ٢١٧ [خ] ٢٥١٧ [ذ] / وربع: ومربع [م] ربع [خ] / ولكن: وكل [هـ] – 4 بهذا: هذا [ب، ش] / القدر: القد [ل] / وخط: فخط من [ب، ش] / تحيط: تحيطه [ض] / به: ناقصة [جـ، س] أثبتها فوق السطر [ت] / فنسبة: ونسبة [س] – 4-5 فنسبة ... الدائرة: مكررة [ا] – 5 تحيط: ناقصة [س] / به: ناقصة [ص، ي] / ٢٠١٧: ٣٠١٧ [ت] ٢٩١٧ [م] – 5-7 ضلعًا ... جملة: مكررة [م] – 6 إلى: ناقصة [جـ] / ٦٣٣٦: ٩٣٣٦ [ض] ٦١٣٣٦ [خ] – 7 تبين: يتبين [ض] / أضلاع: اوضاع [خ] / ستة: تسعة [ض، ک، ل، ن، و] / القطر: القدر [ح] – 8 وعشرة: عشرة [ا] وعشر [ي] / واحد: احد، ثم أثبت الصواب فوقها مع «نحـ» [ت] / ومحيط: ويحيط [خ] / جملة: جميع [ع، ق] – 9 أضلاع: اضلا [خ] – 9-10 به ... يحيط: ناقصة [ط، م] / وأقصر ... بالدائرة: ناقصة [ض، ن، ل، ک، و] – 10 يحيط بالدائرة: يحيط به الدائرة [خ] / صحّ: وضح [ا، ف] / مما: ما [جـ، ت، س] / وصفنا: وضعنا [خ، س، ک، ل، و] / إلى: التي [ق] – 11 نسبة (الثانية): نسبة الى [خ] / إلى: ال فى [ي] – 12 أردناه: أردنا [ل] – 13 يوصل: نوصل [د، ک] يفصل [هـ] ويوصل [ي] / بعينه: نفسه [ط] / إلى: ناقصة [د، ف، هـ] / أي: ناقصة [م] / يراد: ناقصة [ع] تراد [س] – 14 زَ: ناقصة [ا، ت، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] الشكل السابع من كتاب بني موسى [ز] / كل: وكل [ع، ط] / نصف: فوق السطر [ن] / على: على ما [ع] / ضلع: ناقصة [ع] – 15 في (الثانية): ناقصة [ط] / ثم في ثانيها: ناقصة [ل] / ثانيها: بينها [خ] / الحاصل: الخاصل [و] / مساويًا: مساو [ز] / لضرب: ناقصة [ز، ع] يضرب [ل] – 16 تكسيره: بكسره [ذ، ط] بكسيرة [خ] لتكسيره [ز].

فليكن المثلث ا ب جـ، ونرسم أعظم دائرة / يحيط بها وهي دائرة د ز و، وليكن مركزها هـ، ذ – ٣٨٨ – ظ ونخرج هـ د هـ و هـ ز / إلى نقط التماس، ونخرج ا هـ. ونبين أن ا د ا و متساويان، وكذلك ب د ص – ١٢٨ ب ز وجـ و وجـ ز. / وظاهر أن أحد خطي ا د ا و فضل نصف / جميع الأضلاع / على ب جـ، وأن و – ١٦٦ – ظ أحد خطي ب د ب ز فضل نصفه على ا جـ، وأن أحد خطي جـ و وجـ ز فضل نصفه على ا ب. ثم ط – ٢٦٠ – و ز – ٣٧ – ظ نخرج ا هـ إلى ط وا ب إلى أن يصير ب ح مثل جـ ز وا جـ / إلى أن يصير جـ ك مثل ب ز. فيكون د – ١٤٩ – ظ كل واحد من ا ح ا ك مثل / نصف / جميع الأضلاع. ونخرج من نقطتي ح ك عمودي ح ط ف – ١٣١ – ظ خ – ١٨٧ – و



1 د ز و: ور و[ذ، ع، ط] د زهـ [ا] د ز[د، هـ] / هـ: ناقصة [ي] – 2 هـ و هـ ز: وهـ ز[م] هـ و[هـ] رهـ ر[ي] هـ ر[خ] / نقط: نقطة [ا، ت، ح، ز، س، ط، ع، ف، ق، ل، م، هـ، و، ي] الفاظ [خ] / ا هـ: هـ ا [ل] / ونبين: ويتبين [ش] وتبين [ا، ب، و] / وكذلك: فكذلك [ي] – 3 ب ز: ر [ذ] / جـ و: حـ ر[ي] ناقصة [ض] / وظاهر: وظ [ت] فظاهر[ل، هـ] / أحد: ناقصة [جـ، ت] / ا د: د ا [ح] / ا و: و[ذ، ي] / فضل: يصل [خ، ي] / نصف: أثبتها فوق السطر[ت] / ب جـ: ا ب جـ [ع] – 3-4 وجـ و... ب ز: ناقصة [ف] / جميع ... نصفه (الثانية): ناقصة [خ] – 4 أحد: ناقصة [ت] واحد [ذ] / ب د: ب د د [ع] ب ز[س] / ب ز: ب د [س] / نصفه: نصف [و] / ا جـ: جـ [ي] / جـ و: هـ و[ع] / ثم: و[ذ] – 5 ط وا ب: أثبتها في الهامش [و] / وا ب: وت [خ] / أن: ناقصة [ذ، ط] / ب ح: ب حـ [و] / ب ز: ب [ت] / فيكون: ويكون [ب، ش] – 6 ا ك: ا ط [م] ك [ذ] / ونخرج: نخرج [ع، ط] / ح ط: ح ك، ثم أثبت الطاء في الهامش [ع] ط ح [ق].

ك ط ، فيلتقيان ضرورة على نقطة واحدة من ا ط وهي نقطة ط / مثلاً، ويكون ط ح ط ك ع - ٨٢ - و
متساويين. وإن أردنا أخرجنا عمود ح ط ووصلنا ط ك وبيّنا أنه أيضًا عمود لتساوي / ضلعي ل - ٦ - و
ا ك ا ح ، وكون ا ط مشتركًا وتساوي زاويتي ح ا ط ك ا ط . ونصل ب ط ط ج ، ونفصل ب ل
من ب ج مثل / ب ح ونصل ط ل ، فهو عمود على ب ج ، لأن الفضل بين مربعي خطي ت - ٢٨٢
ب ط ط ج / كالفضل بين مربعي خطي ب ح ج ك ، وب ح مساوٍ ل ب ل وج ك مساوٍ هـ - ٦٢ - ظ
ل ج ل ، فالفضل بين مربعي خطي ب ط ط ج كالفضل / بين مربعي خطي ب ل ل ج ، ذ - ٣٨٩ - و
فلذلك/ ط ل عمود على ب ج . وهو مساوٍ ل ط ح لكون ب ح مساويًا ل ب ل وب ط ش - ١٦٥ - ظ
مشتركًا، وزاويتا ح ل قائمتين،/ فتكون / زاويتا ل ب ط ح ب ط متساويتين. ونصل هـ ب ، ز - ٣٨ - و
فزاويتا ز ب هـ د ب هـ متساويتان. ولكون زاوية ل ب ح / مع زاوية ل ط ح كقائمتين، يكون / ض - ٧٥ - و م - ٢٣
زاوية ز ب د مساوية لزاوية ل ط ح ، ونصفها / لنصفها. فزاوية هـ ب د من مثلث ب د هـ / ك - ٢١٩ - و ا - ١٠٠ - و
مساوية لزاوية ب ط ح من مثلث ب ح ط . وزاويتا ب د هـ ب ح ط قائمتان، فمثلثا / ب د هـ س - ٩ - و ي - ٦٢ - و
ب ح ط متشابهان: نسبة هـ د إلى د ب كنسبة ب ح إلى ح ط . ود ب مثل ز ب وب ح مثل

1 ك ط : ك د [ج، ت] / فيلتقيان: فراغ [ذ] فللتقان [ط] فالملتقيان [خ] فيلقيان [ض]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «وليكن على ط فيكونان متساويتين لتساوي زاويتي ط ح ك ط ك ح لتساوي باقيتها، أعني ا ح ك ا ك ح ، إلى قائمتين لتساوي ا ح ا ك ونخرج ا هـ إلى م (ا ل م ا [ا]) ونصل ط م (ط م ا [ا])، ف ط م ا خط (ناقصة في [ا، د، ص، هـ]) مستقيم لكون زوايا م قوائم، من كلام ابن الهيثم (من ... الهيثم: ناقصة [ا، ب، ش])» / ضرورة: ض [ت] / نقطة (الأولى): نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «لأن لو رسمنا (لأنا إذا توهمنا [ا]) على ا ط دائرة لمرت بنقطتي ح ك ويلزم تلاقي العمودين على ط ضرورة (ناقصة في [ا، ب، ش، ص]) وإلا (ولا [ا]) يلزم الخلف» / واحدة: واحد [ي] / ط : ناقصة [ي] / مثلاً: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / ويكون: فيكون [ث] يكون [ذ] / ط ح : ح ط [ج، ت، ق] ط ب ح [خ] — 2 متساويين: متساويان [ز] / ط ك : ا ك [ذ] / وبينا أنه أيضًا: وبينا أيضًا أنه [ث] / لتساوي: يساوي [خ] تساوي [ز] / ضلعي: ناقصة [خ، ز، ي] — 3 وتساوي: تساوي [خ] / ك ا ط : ناقصة [ض] / ط ج : ط ب ح [خ] ط ح [ز] / ونفصل ب ل : نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «هذا على تقدير كون ب ز أطول من ز ج فإن (وان [هـ]) كان أقصر منه يقع ل بين ز ج وإن (ناقصة [هـ]) كان مساويًا له فلا نحتاج إلى هذا العمل» — 3-4 ب ل ... الفضل: ناقصة [ط] — 4 ب ح : ا ب ح [خ] / ط ل فهو عمود: ناقصة [خ] — 5 ب ط ... خطي: ناقصة [ق] / ط ج : ط ب ح [خ] / بين: من [و] / ج ك : ناقصة [ج] / وب ح : ب ح [ا] ناقصة [ج] رب ح [ي] — 6 ل ج ل : ب ح ل [ي، خ] / ب ط ... خطي: ناقصة [ز] / ط ج : ط ب ح [خ] / خطي: ناقصة [ذ، ط] / ل ج : ب ح [ي، خ] — 5-6 ب ح ... خطي (الثانية): ناقصة [ف] — 7 عمود: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «وإلا فليكن ط ي عمودًا عليه ويلزم أن يكون الفضل بين مربعي ب ط ط ج كالفضل بين مربعي (ب ط ... مربعي: ناقصة [هـ]) ب ي ي ج واستحالته ظاهرة» / ل ط ح : ل ط ب ح [خ] / مساويًا: مساو [ص] / ب ل : ب د [س] — 8 قائمتين: قائمين [ي، خ] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد / زاويتا: ناقصة [ز] / ل ب ط : ل ط [ز] / ح ب ط : ح رط [ج، ف] ح ط [ز] / متساويتين: متساويين [ث، ع، ط] متساويان [خ] / ونصل: وفصل [س] / هـ ب : هـ ح ب [ذ، ط] — 9 ز ب هـ : د ب هـ [ش] / د ب هـ : وب هـ [ذ، ع، ط] / متساويتان: متساويتا [ط] / ولكون: لكون [ع] ولكن [ب، ش] / ل ب ح : ب ح [خ] ا ب ح [ض] / زاوية: اويه [خ] — 10 مساوية: متساوية [خ، ط] / لزاوية: ناقصة [خ، س] / ونصفها: ونصفها [ع، ط] / لنصفها: لنصفها [ذ، ع] كنصفها [ج] ناقصة [ي] / فزاوية: لزاوية [ع] / هـ ب د : ب هـ د [ف] / مثلث: ناقصة [ص] / ب د هـ : ب ج هـ [ط] — 11 لزاوية: ناقصة [ي] / ب ط ح : ع ط [ع، ط] ط ب ح [خ] / ب ح ط : ب ط ح [ذ، س، و] / فمثلثا: فثلثا [ي] — 11-12 ب د هـ ... مثل (الثانية): ناقصة [ي] / ب د هـ ب ح ط : ب حـ ه ع [ط، ع] — 12 ح ط : ط ح [س] / ود ب : ونسبة د ب [و] / ز ب : ناقصة [ع، ط] ب ز [ب، ث، د، ز، خ، س، ش، ص، ض، ف، ل، ك، ن، م، هـ، و] ب و [ح] / وب ح مثل: ناقصة [ع، ط] / مثل: ناقصة [ذ].

زجـ، ونسبة هـ د إلى زب كنسبة زجـ إلى ح ط، وضرب هـ د في ح ط مساوٍ لضرب ب ز في
زجـ. وأيضًا، / نسبة مربع هـ د إلى ضرب هـ د في ح ط، أعني إلى ضرب ب ز في زجـ، كنسبة ب – ١٥٩ – ظ
هـ د إلى ح ط، أعني كنسبة ا د إلى ا ح، فنسبة مربع هـ د إلى ضرب ب ز في زجـ كنسبة ا د
إلى ا ح. فضرب مربع هـ د في ا ح كضرب ب ز في زجـ في / ا د. وإذا ضربناهما/ في ا ح، صار ق – ٣٠ – و / ت – ٢٨٣
مربع هـ د في مربع ا ح كضرب / ب ز في زجـ في ا د في ا ح، ولكون هـ د في ا ح / كتكسير ث – ١٧٩ – ظ / ل – ٦ – ظ
المثلث، يكون مربع هـ د / في مربع ا ح مربع تكسير المثلث. فإذن مربع تكسير المثلث مساوٍ ز – ٣٨ – ظ
لضرب / ب ز في زجـ في/ ا د في ا ح، أعني الفضول الثلاثة / في / نصف جميع الأضلاع؛ و – ١٦٧ – و / ط – ٢٦٠ – ظ
وذلك ما أردناه. ن – ١١٨ – ظ / ذ – ٣٨٩ – ظ

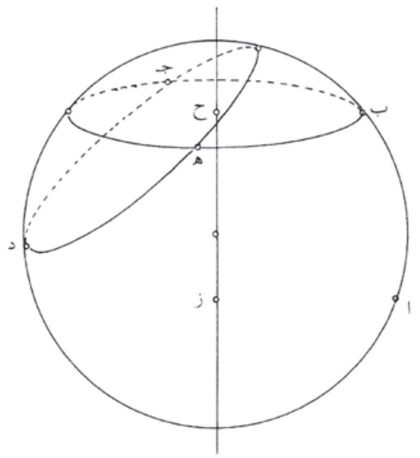
وأيضًا، بوجه آخر بعد أن ثبت أن نسبة هـ د إلى د ب كنسبة ب ح إلى ح ط، أنا إذا جعلنا
الثاني وسطًا بين الأول / والرابع، كانت نسبة الأول إلى الرابع مؤلفة من نسبة الأول إلى الثاني ع – ٨٢ – ظ
ومن نسبة الثاني إلى الرابع، أعني من نسبة الأول إلى الثالث./ فنسبة هـ د إلى ح ط مؤلفة من خ – ١٨٧ – ظ
نسبة هـ د إلى د ب ومن نسبة هـ د إلى ب ح. ود ب مثل/ ب ز وب ح مثل زجـ، فنسبة هـ د ک – ٢١٩ – ظ

1 زجـ ... وضرب هـ د: ناقصة [ي] / زجـ: رح [ز، ع] ب ح [خ] / ونسبة: فنسبة [ت، ث، جـ، ح، خ، ذ، ز، س، ع، ط، ف، ق، م، هـ] / هـ د: د هـ [ذ، ع، ط] / وضرب: وحرب [خ] / هـ د: د هـ [ث، ذ، ض، ع، ط] ح د [ق] / في: وفي [خ] / مساوٍ لضرب: واحرب [ي] / ب ز: د [خ] – 2 وأيضًا: أيضًا [و] ناقصة [ذ] / هـ د (الأولى): د هـ [د، هـ] / وأيضًا ... زجـ: ناقصة [ع، ط] / إلى ضرب هـ د ... زجـ: ناقصة [ذ] / هـ د في ... ضرب: ناقصة [خ] – 3 ح ط: ح [خ] / كنسبة: نجد في هامش [ا، ب، د، ش؛ ص، هـ] التعليق التالي «ولنمثل لذلك مثلاً (لهذا العمل [ص]) فليكن (مثل [ا]) زاوية ا قائمة وب جـ هـ ا وا ب ٦ (حـ [ا]) وا جـ ٨ (حـ ر [ا]) ومساحته (مساحته [ا]) الحاصلة (الخاصة [ب، ش؛ هـ]) هي ضرب أحد ضلعي القائمة في نصف الآخر وهي ٢٤ وكذا إذا ضربنا {١٢ (حـ ا [ا]) في ٢ ثم في ٤ ثم في ٦ [ا؛ ب، د، ش] = نصف جميع الأضلاع الذي هو ١٢ في فضله على ضلع ب جـ الذي هو ٢ ثم في فضله على ا جـ الذي هو ٤ ثم في فضله على ا ب الذي هو ٦... [ص]} ونأخذ جذر الحاصل أعني (ا ب و[ا]) ٥٧٦ وهو ٢٤ أيضًا (ناقصة في [ا؛ ب، د، ش]) كما ذكرنا أولاً (ناقصة في [ا، ب، د، ش] وعلى هذا في المثلث الحادّ الزاوية (الزوايا [ا]) ومنفرجتها (منفرجها [ا]) إذ هو (وهو [ا]) عام في الجميع؛ ونجد أيضًا في هامش [ب] «لبيان مثلثي ا د هـ ا ح ط» / زجـ: رح [ع] – 3-4 فنسبة ... ا ح (الأولى): ناقصة [ق] – 4 هـ د: د [ي] / ا ح: الف ح [ز] / زجـ: ب جـ [ت] زح [هـ] / في: و[خ] / ضربناهما: ضربناها [ز] – 5 هـ د في مربع: ناقصة [م] / ا ح: ا هـ [خ] / ب ز: هـ ز [ط] ب د [ق] / زجـ: زح [هـ] / ا ح: هـ ح [خ، ي] / هـ د: د هـ [ث] / ولكون هـ د في ا ح: ناقصة [جـ، ت، س] / كتكسير: لتكسير [جـ، ح، س، ي] – 4-5 وإذا ... ا د: ناقصة [ح] – 6 المثلث: ا المثلث [هـ] / يكون: ايكون [ط] / يكون ... المثلث (الثانية): ناقصة [هـ] / ا ح: ا هـ [ذ، ع، ط] / مربع (الثالثة): ناقصة [د] / فإذن ... المثلث: ناقصة [ف] / تكسير (الثانية): بكسر [ط] / مساوٍ: و[خ] مساوو [ي] – 7 زجـ: د حـ [ي] / في: إلى [ق] ناقصة [و] / ا د: ناقصة [و] / ا ح: ا ح ا [و] / في: مع [ق] / نصف: أثبتها في الهامش [ع] / جميع: مجموع [جـ] / الأضلاع: للأضلاع [و] – 9 أيضًا: ناقصة [جـ، ت] / ثبت: ىث [ط] يثبت [ا، ب، ش، ص، ض، ک، م، ن، و] / أن: ناقصة [م] / هـ د: د ط هـ [ز] / أنا: امّا [ق] لانا [د] – 10 وسطًا: وسط [و] وسطًا في النسبة [ز] / كانت: ان كانت [خ] كان [ث] وكانت [ذ] / الأول (الثانية): الأولى [ق] / إلى: ناقصة [ي] / إلى: ناقصة [و] – 10-11 الثاني (الثانية) ... الأول إلى: ناقصة [ع، ط] – 11 من نسبة الثاني ... أعني من: ناقصة [ذ] / الثالث: الثاني، ولكن نجد «لث» في بداية الصفحة التالية [خ] / هـ د: د هـ [و] / ح ط: ح د [هـ] – 11-12 من نسبة ... ومن: أثبتها في الهامش [ث] – 12 هـ د: د هـ [و] / نسبة: نجد بعدها «د ب إلى ح ط التي هي بقاعدة الابدال كنسبة» [ل] ونجد هذه الجملة في هامش [ک] / ومن نسبة: كنسبة [ل] / ود ب: أثبتها تحت السطر [ک] ورب [خ] و [ض] / ود ب ... هـ د: ناقصة [جـ] / ب ز: ب د [ط].

إلى ح ط، أعني/ نسبة ا د إلى ا ح مؤلفة من نسبة هـ د إلى ب ز ومن نسبة هـ د إلى ز جـ، ز - ٣٩ - و
فضرب ا د في ب ز في ز جـ /كضرب مربع هـ د في ا ح، ونتمم البرهان بالوجه المتقدم./ ص - ١٢٩ نهاية [ز]

- ح - كل نقطة في داخل/كرة يخرج منها أربعة خطوط متساوية إلى سطح الكرة فوقعت ر - ٣٨
على نقط ليست في سطح واحد مستقيم فهي مركز الكرة.

فليكن الكرة / ا ب جـ د هـ والنقطة الداخلة // ز والخطوط الخارجة منها إلى سطح الكرة ش - ١٦٦ - و
خطوط ز ب ز جـ ز د ز هـ وهي متساوية/ وليست في سطح واحد، وذلك لأن كل ثلاث نقط جـ - ٤٤ - ظ ف - ١٣٢ - و ض - ٧٥ - ظ



فهي في سطح واحد لما تقرر في كتاب أقليدس. فندير على نقط / ب جـ هـ دائرة ب جـ هـ، س - ٩ - ظ
وعلى نقط هـ جـ د دائرة هـ جـ د، ونخرج من ز على سطح دائرة ب جـ هـ عمود ز ح، فيقع على

1 إلى ح ط ... ب ز: ناقصة [جـ] / ح ط: حـ ط [م] / ا د إلى ا ح: ناقصة [ك، ل] / هـ د: د هـ [ع] / ب ز: ب د [ق] بح ودبر [ف] / ب ز ... إلى: مكررة [ذ] - 2 ب ز: ب د [ذ، ط، ق] ب ح [ش] / ز جـ: رح [ع] ب جـ [س] / ونتمم: ويتمم [ط، ق] / بالوجه المتقدم: بالمتقدم [ز، خ] / المتقدم: المقدم [ذ، س] ناقصة [هـ] - 3 ح: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / في: ا في [خ] - 3-4 إلى ... نقط: ناقصة [ث، ح] - 4 نقط: نقطة [ا، جـ، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، ف، ق، هـ، ي] / ليست: ناقصة [ذ، ع، ط] / واحد: واحدة [ط] / فهي: وهي [ذ، ع، ط] / فهي ... الكرة: مكررة [ي] - 5 ا ب جـ د هـ: ا ب جـ د [ع، و، ي] الحدة [خ] / والنقطة: والنقطة و[ع] / ز: ب [س] / سطح: السطح [و] - 6 خطوط: ناقصة [ث] / ز جـ: ز ح [و] / ز هـ: هـ [س] / وهي: ناقصة [ي] / متساوية: مساوية [خ، ط، ع] متساو[و] / وليست: ليست [و] / ثلاث: مثلث [م] /نقط: نقطة [ا، ذ، ع، ط] فقط [ض] - 7 كتاب: كتا [ا] / أقليدس: أوقليدس [ص] / نقط: نقطة [ا، خ، ذ، ض، ع، ط، م، و، ي] / جـ هـ: هـ جـ [س] / دائرة ب جـ هـ: ناقصة [ض] / ب جـ هـ: لبح [خ] - 8 وعلى ... هـ جـ د: ناقصة [ذ، ط] / نقط: أثبتها في الهامش [ع] نقطة [خ، م، و، ي] / هـ جـ د: جـ د هـ [جـ، ت، ر، و] / هـ جـ د: حـ د هـ [ا، ب، ث، جـ، ح، ت، د، ر، س، ش، ص، ض، ع، ك، ل، ن، هـ] ب جـ د [و] / ز ح: وزح [ي].

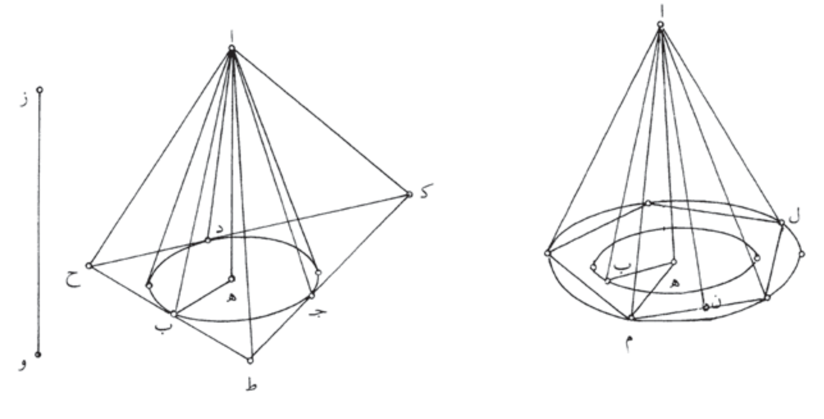
مركز دائرة ب ج هـ لأنا إذا وصلنا خطوط ب ح ج ح هـ ح، كانت متساوية // لتساوي خطوط ز ب ز ج ز هـ واشتراك ز ح،/ وكون الزوايا التي عند ح قائمة./ ولأن دائرة ب ج هـ على سطح كرة ا ب ج د هـ، وخرج من مركزها عمود ح ز، فهو يمرّ بمركز الكرة على ما تبيّن في ثاني أشكال كتاب الأكر لثاوذوسيوس. وبمثل ذلك / نبيّن أن العمود الخارج من مركز دائرة هـ ج د يمرّ بمركز الكرة. والعمودان لا يتلاقيان إلا عند ز، فـ ز مركز الكرة؛ وذلك ما أردناه./

ذ – ٣٩٠ – و / ت – ٢٨٤ / ب – ١٦٠ – و / ل – ٧ – و / ي – ٦٢ – ظ

– ط – كل مخروط مستدير قائم، فسطح الخط الواصل بين رأسه وأي نقطة فرضت على محيط قاعدته في نصف محيط قاعدته/ يساوي سطحه المستدير.

فليكن المخروط ا ب ج د / ورأسه ا ودائرة قاعدته / ب ج د ومركزها هـ / ومحوره ا هـ، / وهو عمود على سطح القاعدة حتى يكون المخروط قائمًا. ونصل ا ب، فسطح ا ب في / نصف محيط ب ج د هو مساحة / السطح المستدير المحيط بالمخروط.

ق – ٣٠ – ظ / ا – ١٠٠ – ظ / ط – ٢٦١ – و / م – ٢٤ / ك – ٢٢٠ – و / خ – ١٨٨ – و / ع – ٨٣ – و / ر – ٣٩



1 لأنا: لا [ث] / ب ح: ب حـ [م] – 2 خطوط: خط ط [ي] / ز ج: ز ح [س] د ح [خ] / واشتراك: واشترك [س، و] / ز ح: د رح [خ] / وكون: وكعب [ط] ويكون [ي] / التي: ناقصة [خ] / ب ج هـ: ب حـ حـ هـ [ع] ب ح هـ [س] – 3 ا ب ج د هـ: ا ب ج د [هـ] / مركزها: مركز [خ] / ح ز: هـ ز [ذ، ع، ط] حـ ز [ا] / بمركز الكرة: بمركزها لكرة [خ] / على: ناقصة [س] / ما: مكررة [ا] لما [س] / تبين: يتبين [ا، ش] بين [خ، س] سبق [م] / ثاني: ثماني [ا] أثبتها فوق السطر [ت] – 4 الأكر: الكرة [ذ] لأكر [ص] الا [ض] / لثاوذوسيوس: لثاووسيوس [ذ] لثاودسوس [ط] وذوسيوس [ب، ش] لثاوذاوسيوس [خ] / وبمثل: ومثل [ذ، ع، ط] / من: بين [ع] / هـ ج د: هـ حـ و [ع] – 3-5 على ... الكرة (الأولى): أثبتها في الهامش [هـ] – 5 يمر: ناقصة [هـ] / والعمودان: والعمودات [ا] / عند: ناقصة [ع] / ز: ناقصة [خ، ذ، ع، ط] نقطة ز [س] / فـ ز: في [س] / الكرة: ناقصة [ل] – 6 ط: ناقصة [خ، س، ض، ع، ق، ي] / وأي: وا د [م] – 7 محيط (الأولى): محيطه [ا] / يساوي: تساوى [ي] / سطحه: سطح [خ، د، هـ] / المستدير: المستديرة [ض، و] – 8 ورأسه ا: د ر ا ب د ا [خ] وواله ا [ي] / هـ: ناقصة [ذ، ع، ط] / ومحوره: ويحوزه [م] ويحوزاه [خ] – 9 المخروط: ناقصة [و] / قائمًا: قائما [ط، و] / فسطح: لسطح [خ] – 10 هو: وهو [ب، ذ، ش، ط، م] / السطح: المسطح [ج].

وإلا فلتكن ا ب في خط أطول من نصف المحيط أولاً، وليكن ذلك الخط و ز. ونعمل على
محيط ب ج د مضلعًا يكون جميع أضلاعه أقصر / من ضعف و ز، وهو مضلع ح ط ک، وليماس و – ١٦٧ – ظ
الدائرة على نقط ب ج د. ونخرج خطوط ا ح ا ط ا ک ونصل / ا ج ا د، فتكون خطوط ا ب ذ – ٣٩٠ – ظ
ا ج ا د المتساوية أعمدة على أضلاع ح ط ط ک ک ح، لأن ا ه عمود على سطح دائرة
ب ج د، والخطوط / الواصلة بين مركزها ونقط التماس أعمدة على الأضلاع، ولذلك يكون د – ١٥٠ – و
سطح ا ب في نصف جميع الأضلاع / مساويًا / لسطح المضلع / المحيط بالمخروط المستدير وهو ل – ٧ – ظ
أعظم من سطح المخروط المستدير. ونصف جميع الأضلاع أقصر من خط و ز، وكان سطح ا ب ت – ٢٨٥ ش – ١٦٦ – ظ
في و ز هو سطح المخروط / المستدير، فسطح ⟨المخروط⟩ المستدير / أعظم مما هو محيط به؛ هذا ض – ٧٦ – و ن – ١١٩ – و
خلف.

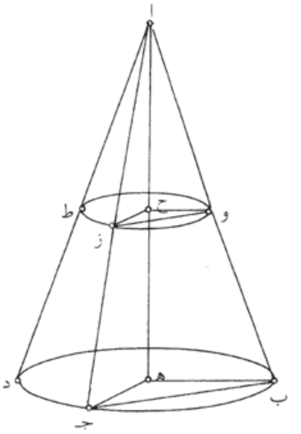
ثم ليكن و ز أقصر من نصف المحيط، وا ب في و ز هو سطح// المخروط المستدير، وليكن ا ب س – ١٠ – و ث – ١٨٠ – و
في نصف محيط ب ج د الذي هو أعظم منه مساويًا لسطح مخروط مستدير قاعدته دائرة م ل
ورأسه ا. ونعمل في دائرة م ل ذا أضلاع وزوايا متساوية غير مماسة لدائرة ب ج د، ونخرج من
زواياه إلى ا خطوطًا، فيكون السطح المحيط بالمجسم الحادث / أقل من سطح المخروط المستدير ف – ١٣٢ – ظ
الذي // قاعدته م ل لكون المخروط محيطًا به. ولكن سطح خط يخرج من ا إلى منتصف أحد ص – ١٣٠ ذ – ٣٩١ – و
أضلاع الشكل الذي لا يماس دائرة / ب ج د في نصف/ ⟨جميع⟩ أضلاعه هو مثل سطح ک – ٢٢٠ – ظ ر – ٤٠
ذلك المجسم. والخط الخارج من ا إلى منتصف // ذلك الضلع أطول من خط ا ب ونصفُ ط – ٢٦١ – ظ ذ – ٣٧٩ – و

1 وليكن: فليكن [ي] / ونعمل: ويعمل [س] – 2 و ز: ا ز [ت] / مضلع: ضلع [ح] / وليماس: ولتمام [ل] ولتماس [ب، س، ش، ک، و] – 3 نقط: نقطة [ا، ت، ذ، ط، ق، م] / ا ط ا ک: ا ک ا ط [س] / ا ج: ا ح [س] ا ب ا ج [ذ] – 3-4 ا ب ا ج: ا ج ا ب [ا، ف] – 4 ا ج: ناقصة [خ] / المتساوية: المساوية [ث] / ک ح: ک [ذ، ط] ا ب ح [خ] / عمود: ناقصة [د] – 5 ب ج د: ناقصة [ت] / الواصلة: المواصلة [ط] / مركزها: مركز [ت] / ونقط: ونقطة [ا، ت، ث، ض، ع، ط، ق، ک، ل، ن، ه، و] / أعمدة: أعني أعمدة [ب، ش] – 6 ا ب في نصف: ناقصة [س] ا ب في سطح، ثم ضرب على «سطح» بالقلم [ع] / مساويًا: مساو [ث، ج، ح، ر] / المحيط: بالمحيط [ب، ش] / بالمخروط: المخروط [ب، ش] – 6-7 وهو ... المستدير: ناقصة [س] – 7 المخروط: ناقصة [خ، ف، ق، م، ي] / ا ب: ب [خ] – 6-8 وهو ... المستدير (الأولى): أثبتها في الهامش [ه] – 7-8 وكان ... و ز: مكررة [ع، ط] كررها مرتين [ذ] – 8 و ز: و ل [ت] / هو: وهو [ع] / فسطح ... المستدير: ناقصة [ي] / هو: ناقصة [ي] – 10 وا ب في: وا ب د [ا] / في: مكررة [ي] / و ز: ه ر [م] / سطح: السطح [ع، ط] / ا ب: ان [خ] – 11 محيط: ناقصة [س] يحيط [م] / مخروط مستدير: المخروط المستدير [س] / م ل: بل [م] – 12 ورأسه ا: ورا [خ] / ا: ناقصة [ع] / م ل: ه م ل [ا] ناقصة [م] / ذا: ناقصة [خ، ق، م] / أضلاع: أربعة أضلاع [ع] وأضلاع [خ] / وزوايا: زواياه [ج] وزاويا [خ] / غير: ناقصة [ي] – 13 زواياه: زاواياه [ا] / ا: ناقصة [ي] / خطوطًا: خطوط [ا] / السطح: سطح [ض] / بالمجسم: بالجسم [خ، ض، ع، ط، ف، ک، ل، ن، م، و، ي] المجسم [ا] / سطح: سخط [ش] – 14 م ل: بل [م] / لكون: فيكون [ج، ت، ر] / المخروط محيطًا: المحيط مخروطا [ع] المحيط مخروط محيطًا [ذ، ط] / ولكن: ولكون [ذ، ع، ط، م] وليكن [ج، ت] / خط: ناقصة [خ، ي] / ا إلى: ناقصة [خ] / أحد: واحد [ذ، ع، ط] احدى [ا، ب، ت، ث، ج، ح، د، ر، ش، ص، ض، ق، ک، ل، ن، م، ه، و، ي] – 15 أضلاع: أضلاعه [خ] / الشكل: ناقصة [ع] الأشكال [ه] / يماس: تماس [ط، و] / ب ج د: ا ب ج [خ] / أضلاعه هو: أضلاع ه و [ق] / سطح: ر سطح [ه] أثبتها فوق السطر [ر] – 16 ذلك: تلك [ي] / المجسم: للجسم [و] الجسم [ي] / ذلك: وذلك [ي].

〈جميع〉 أضلاع الشكل أطول من نصف محيط دائرة ب ج د، / فسطح المخروط / المستدير ق - ٣١ - و
الذي / قاعدته م ل أصغر من سطح المجسم الذي في داخله؛ هذا خلف. ع - ٨٣ - ظ / ي - ٦٣ - و

فإذن سطح ا ب في نصف 〈محيط〉 دائرة ب ج د مساوٍ لسطح مخروط ا ب ج د؛ / ب - ١٦٠ - ظ
وذلك ما أردناه./

– يَ – كل مخروط مستدير〈قائم〉 قاعدته دائرة وقد فصله سطح موازٍ لقاعدته، كان ذلك ح - ٨٨ - و
الفصل دائرة والمحور يمرّ بمركزها.

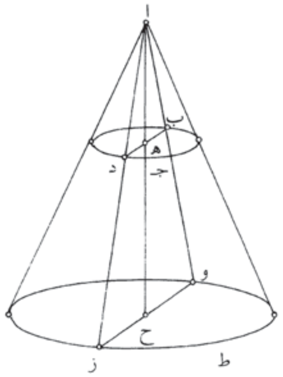


فليكن المخروط رأسه ا وقاعدته ب ج د ومركزها هـ والسطح الفاصل و ط ز / والمحور ا هـ، خ - ١٨٨ - ظ
وقد مرّ بنقطة ح / من السطح الفاصل. فنعلم على ب ج د نقطتي ب ج على أن قوس ب ج ل - ٨ - و
أقل من نصف دائرة. ونخرج هـ ب هـ ج ب ا ج ا ب ج، / فيمرّ مثلث ا ب هـ بفصل و ح من ت - ٢٨٦
السطح الفاصل ومثلث ا هـ ج بفصل / ز ح ومثلث ا ب ج بفصل و ز، ويحدث مثلث و ح ز ذ - ٣٧٩ - ظ

1 أطول: ناقصة [س] / نصف: أثبتها في الهامش [ا، ع، ق] – 2 م ل: ب د [ي] / الذي: ناقصة [س] – 3 ا ب ج د: ا ب ج [ض، ك، ل، ن، و] الحدود [خ] – 5 يَ: ناقصة [ا، خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] يا [د] / ذلك: وذلك [ض] – 6 الفصل: الفضل [ب، ت، ذ، ش] / والمحور: والمجور [خ] والمخروط [ل] / والمحور يمرّ بمركزها: ناقصة [م] – 7 الفاصل: الفاضل [ب، ث، ذ، ش، ط] / وط ز: وط ب، ثم أثبت الصواب تحتها [ا] زط و[ق] وح ز[ر] وط [ي] / والمحور: المحور[و] / ا هـ: له [ا] – 8 ح: ناقصة [خ] / الفاصل: الفاضل [ب، ذ، ش، ط] / فنعلم: فلنعلم [س] فليعلم [جـ، ت، ر] فيعلم [ذ، ط] / نقطتي ب ج: ناقصة [د] / ب ج: ب ح [س] – 9 هـ ب: هـ ر[ت] / ب ج: رحـ [ض] / ا ب هـ: انه [خ] / بفصل: بفضل [ت] نفصل [ل] ونفصل [هـ] / وح: زح [ق] – 10 الفاصل: الفصل، ثم كتب في الهامش «الفاضل» [ط] / ومثلث: ومثل [ا] / ا هـ ج: كرر بعدها «من السطح الفاصل» ولكن أشار إليها [ي] / زح: مطموسة [ص] زحـ [و] ب ح [خ] / ا هـ ج ... ومثلث: ناقصة [ق] / زح ... بفصل: ناقصة [ح] / بفصل: بفضل [ت، ر، ط] بفصل [خ] / وز: زو[ق] ا ر[ت] / ويحدث: يحدث [ع، ي] وب حـ د ب [خ] / مثلث: مثل [ا] / وح ز: رح ر[ع] زح و[ق] وزح [ف].

ويكون / أضلاعه موازية لأضلاع مثلث ب هـ جـ كل لنظيره؛ فيكونان متشابهين،/ ونسبة ب هـ إلى هـ جـ كنسبة وح إلى ح ز، وب هـ هـ جـ متساويان، فلذلك وح ح ز متساويان، وكل خط / يخرج من ح إلى محيط وزط، فـ وزط دائرة مركزها ح؛ وذلك ما أردناه./ و - ١٦٨ - و / جـ - ٤٥ - و / م - ٢٥

– يا – كل قطعة من مخروط مستدير قائم فيما بين دائرتين / متوازيتين،/ فإذا أخرج فيهما قطران متوازيان ووصل بين أطرافهما بخطين متقابلين، كان سطح أحد الخطين في نصفي محيطي الدائرتين مساويًا لسطح / القطعة / المستدير. ا - ١٠١ - و / ش - ١٦٨ - و / س - ١٠ - ظ / ض - ٧٦ - ظ / ر - ٤١



فليكن القطع ب جـ د وط ز، قاعدتها وط ز والأخرى التي تلي رأس المخروط / ب جـ د وهـ ح من المحور ما يقع بينهما وهو عمود على الدائرتين، وليخرج قطرا ب د وز متوازيين، ولنوصل بينهما ب و د ز. ک - ٢٢١ - و

1 موازية: موازيا [ع] موازين [س] موزنة [خ] / لأضلاع: الأضلاع [خ، ذ، ع، ط، ي] أضلاع [م] / ب هـ حـ: ب هـ ح [ض] / لنظيره: النظيره [خ] / فيكونان: فيكون [ف، ق] / متشابهين: مشابهين [و] متشا [خ] / ونسبة: فنسبة [ا، ض، ل، ک، ن، و] نسبة [ت] – 2 وح: زح [ق] / ح ز: ح و [ذ، ع، ط] / هـ جـ: هـ م [ي] / فلذلك: وكذلك [ث، س، ذ، ع، ط، م] فكذلك [خ، ق] / فلذلك ... متساويان: ناقصة [جـ، ت، ر] / وح: زح [ق] / ح ز: ح [ص، ع] ح و [ذ، ط، ق] – 3 يخرج: ويخرج [ي] / من ح: ناقصة [خ، ک، ل] / وذلك: وكذلك [خ] – 4 يا: ناقصة [ا، خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] يب [د] / كل قطعة: ناقصة [خ] / مخروط: المخروط [ذ، ع، ط] / قائم: قائما [خ] / متوازيتين: أثبتها في الهامش [ن] كتب بعدها «لا بد من فيه التوارين (هكذا) شرح» [و] ناقصة [خ] متوازيين [ض] / فإذا: فاذ [خ] / فيهما: فيها [جـ، ت، ر] – 5 قطران: ناقصة [ي] / ووصل: وصل [ط] وفصل، ثم أثبت الصواب فوقها [ت] / أطرافهما: أطرافها [ف] / بخطين: بخطى [خ، ي] / كان: ناقصة [ي] / أحد: احدى [ي] / نصفي: نصف [خ، ي] / محيطي: محيط [خ، ش، م، ي] – 6 القطعة: قطعة [د، هـ] / المستدير: المستديرة [س] – 7 القطع: القطعة [س، ق] ناقصة [خ، ي] / ب جـ د وط ز: ب جـ د وط [خ] / قاعدتها: وقاعدتها [ق] / وط ز: وط زحـ [ت] وط [خ] / والأخرى: ولأخرى [ص] الأخرى [ت] والاخر [م] / تلي: على [س] ناقصة [ع] يلي [ص] / رأس: الرأس [و] / المخروط: المخروط في [هـ] / ب جـ د: ح د [خ، ي] – 7-8 ب جـ د وهـ ح من: مكررة [ل] – 8 بينهما: بينها [ا، ض، ل، ک، ن، و] / وليخرج: ولنخرج [ا، ر، س، ق، ل] / قطرا: قطر [ب، ش، ل، و] وطرا [ي] / ب د: ا ب د [ب، ش، ل] / وز: ناقصة [ي] / ولنوصل: وليوصل [ر] – 8-9 متوازيين ... د ز: ناقصة [م] – 9 ب و د ز: ود ر [ع] ب و د ک [ت].

نقول: فسطح ب و في نصفي ⟨محيطي⟩ دائرتي ب جـ د وط ز هو السطح المستدير المحيط بالقطعة.

فلنتمم المخروط إلى الرأس / وهو آ، ونخرج ح هـ إلى آ، وكذلك وب ز د. ومعلوم أن سطح ع - ٨٤ - و
آ و في نصف محيط / وط ز هو سطح جميع المخروط وسطحَ آ ب في نصف محيط ب جـ د هو ذ - ٣٨٠ - و
سطح مخروط آ ب جـ د./ وفضل الأول على الآخر هو السطح المستدير المحيط بالقطعة وذلك هو ط - نهاية ٢٦١ - ظ
سطح ب و في نصف محيط وط ز مع سطح / آ ب في فضل نصف محيط وط ز على نصف / ل - ٨ - ظ
محيط ب جـ د./ وسطح آ ب في فضل نصف محيط وط ز على نصف محيط ب جـ د مساوٍ ي - ٦٣ - ظ هـ - ٦٣ - و
لسطح / ب و في نصف محيط / ب جـ د لأن / نسبة آ ب إلى ب و كنسبة نصف دائرة ب جـ د ق - ٣١ - ظ خ - ١٨٩ - و
إلى فضل نصف دائرة وط ز على نصف دائرة ب جـ د؛ وذلك ما أردناه. ت - ٢٨٧

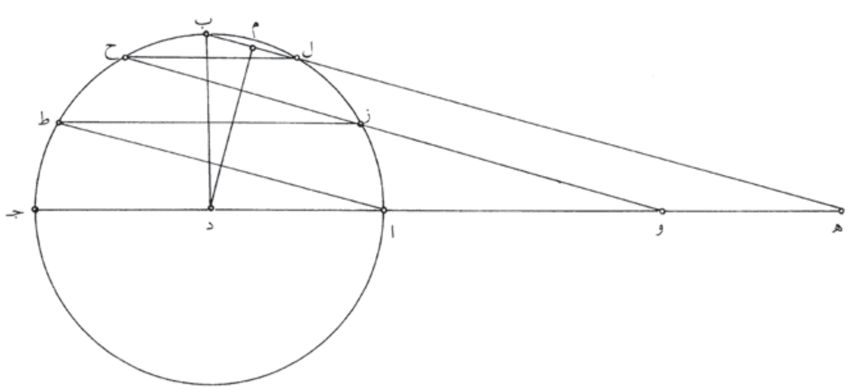
وقد نعلم من ذلك أن / خطي وب ب آ إن كانا متساويين كيف/كان اتصالهما على استقامة أو ف - ١٣٣ - و
غير استقامة، فإن / تضعيف أحدهما بنصف دائرة وط ز وبدائرة ب جـ د هو مساحة سطح ث - ١٨٠ - ظ ن - ١١٩ - ظ
المجسم الذي رأسه / آ وقاعدته دائرة وط ز. ب - ١٦١ - و

ومن هاهنا نعلم أيضًا أنه إن كانت قطع كثيرة / من مخروطات الأساطين مركب بعضها على ص - ١٣١
بعض وكان أعلى سطح القطعة السفلى هو قاعدة / القطعة التي فوقها، وكان رأس القطعة العليا ر - ٤٢
من القطع نقطة، وكانت جميع القواعد متوازية والخطوط الخارجة في جميع القطع من قواعدها

1 نصفي: نصف [خ] / وط ز: وط د [ذ، ط] – 2 بالقطعة: بالقطع [ق] – 3 فلنتمم: فلنتم [ب، ش، ك، ل] فليتم [جـ، ر، س] / ح هـ: هـ ح [ذ، ع، ط] ح آ [م] هـ آ [هـ] / آ: ناقصة [ع] / وكذلك: ولذلك [ح] / وب: ب [و] رب [خ، ي] / ز د: ب و [ذ، ع، ط] و د [ت، ض، م] / ومعلوم: معلوم [ب، ش] ومعلو [ك] – 4 وط ز: وط و [ي] / هو: وهو [ث] / وسطح: سطح [خ، ي] / هو: وهو [ح، خ، ي] – 5 وفضل: ففضل [ح] / الأول: لأول [ص] / الآخر: لآخر [ص] / هو: من [ي] – 6 سطح: السطح [خ] / ب و: ب ز [هـ] / وط ز: وط و [ي]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «وذلك لأنه لما كان آ و في نصف وط ز هو سطح المخروط (المخروطات [د، ص]) فـ ا ب وب و فيه (ناقصة [هـ]) هو سطحه أيضًا وليكن فضل نصف وط ز على نصف ب جـ د هو وط (ز ط [ا] وط ز [ص]) فـ ط ز كنصف ب جـ د فإذن ب و في نصف وط ز وا ب في وط الفضل وفي ط ز (وا ب .. ط ز: ناقصة [ا]) أي نصف ب جـ د (ب جـ [د، هـ]) هو مساحة جميع المخروط لكن ا ب في نصف ب جـ د هو مساحة ا ب جـ د يبقى (ويبق [ا]) ا ب في وط الفضل وب و في نصف وط ز مساحة القطعة» – 7 ب جـ د: جـ د [ت، جـ، ر] / سطح ا ب في: ناقصة [ذ] / وسطح ... ب جـ د: ناقصة [خ، م، ع] / نصف (الثانية): ناقصة [ذ] – 8 ب و: ب جـ [ت] / ب جـ د: ب جـ [ث] / كنسبة: نجد في هامش [ا، د، ش، ص] التعليق التالي «وذلك لأن نسبة ا ب إلى ا و كنسبة ب د إلى و ز بل كنسبة نصف ب جـ د إلى نصف وط ز، وبالتفصيل نسبة ا ب إلى ب و كنسبة نصف ب جـ د إلى فضل (ناقصة في [ص]) نصف وط ز على نصف ب جـ د». – 9 فضل: أثبتها في الهامش [ن] / ب جـ د: ف ب حـ د [خ] – 10 قد: ناقصة [د] / نعلم: يعلم [ب، جـ، خ، د، ذ، ر، س] تعلم [و] / وب: ا ب [ت] هـ ب [ل] / كانا: كان [و] كانا و [خ] / كان: كانا [ذ] / اتصالهما: ايضا لهما [خ] – 11 بنصف: تنصيف [م] بتضعيف [خ] / وط ز: وط رحـ [ت] وهـ ط ز [و] / وبدائرة: بدائرة [ت] / ب جـ د: ب جـ هـ [س] – 11-12 ب جـ د ... دائرة: ناقصة [ا] – 12 وط ز: وط هـ [جـ] – 13 نعلم: يعلم [جـ، خ، د، ذ، ر، س، ق] ناقصة [ض، ل، ك، ن، و] / إن: ناقصة [ع] إذا [ب، ش] / كانت: كان [خ، و، ي] / قطع: ناقصة [ذ، ع] / كثيرة: كره [ت] / الأساطين: لأساطين [ص] الاساطر [ي] – 14 سطح: سطحى [خ، ذ، ع، ف، م، ي] – 15 القطع: القطعة [س] / نقطة: بقطعة [ف] قطعة [س] / وكانت: وكان [جـ، د، ع، هـ] / القطع: القطعة [ذ].

إلى أعاليها مستقيمات/ متساويات، / فإن سطح أحد تلك الخطوط في نصف محيط / قاعدة س - ١١ - و
القطعة السفلى وفي جميع محيطات قواعد / سائر القطع التي فوقها هو مساحة سطح المجسم المركب ك - ٢٢١ - ظ
منها جميعًا سواء، كانت سطوح القطع متصلة على استقامة أو على غير استقامة. و - ١٦٨ - ظ
ذ - ٣٨٠ - ظ

ش - ١٦٧ - ظ
- يب - ليكن ا ب جـ دائرة قطرها ا جـ ومركزها د، وقد قام عمود د ب / منه على القطر، ع - ٨٤ - ظ
ولنقسم ربع ا ب بأقسام متساوية كم كانت، وهي ا ز ز ل / ل ب، ولنخرج / وتر ب ل وننفذه، ض - ٧٧ - و
وننفذ قطر جـ ا إلى أن يلتقيا على هـ، ونخرج من نقطتي ز ل / وتري ز ط ل ح موازيين لقطر جـ ا. ذ - ٣٨٥ - و
فأقول: إن خط د هـ يساوي نصف قطر جـ ا ووتري / ز ط ل ح جميعًا. ل - ٩ - و



فنخرج ط ا ح ز وننفذ ح ز إلى أن يلقى جـ هـ على و، وبمثل ذلك ندبر إن كانت الأقسام
أكثر. فخطوط جـ هـ ط ز ح ل متوازية، وخطوط ط ا / ح و ب هـ متوازية، لأن قوسي ط ح ت - ٢٨٨

1 مستقيمات: مستقيما [و] / فإن: ناقصة [م] — 2 القطعة: ناقصة [ت، جـ، ر، س، م] / وفي: في [خ، م] / محيطات: مخروطات [س] محيطان [خ] المحيطات [ذ، ع] / هو: ناقصة [ا] / المركب: ناقصة [ا] لاركب [ض، و] — 2-6 سائر... ل: ناقصة [ذ] — 3 أو على غير استقامة: ناقصة [ذ] / على (الثانية): ناقصة [م] — 4 يب: ناقصة [خ، د، س، ض، ع، ق، ي] / ليكن ا ب جـ: ناقصة [خ] / ا ب جـ: ا ب جـ د [ت] / دائرة: أثبتها في الهامش [ك] / قطرها: وقطرها [س، م] قطعها [ي] / ا جـ: ناقصة [جـ] / وقد قام: وقدم [ل] فقد قام [م] ووقد قام [خ] / على: مكررة [ل] — 5 ولنقسم: ولنتمم، وكتب فوقها «ولنتم» [ت] ولنتم [جـ] ولنرسم [ح] / ربع: مربع [ح] لربع [خ] ولنقسم ربع: فراغ [ذ] / وهي: ناقصة [م] / ا ز: ا ب [ذ، ح] ا و [م] / ل ب: ناقصة [ي] / وتر: وب ر [خ] ه د [ذ] / ب ل: ل ب [ب، ش، ص] ب ك [س] ب ل د [ذ] / وننفذه: وبيعده [ا، خ] ننفذه [ذ] ناقصة [ف، م] — 6 وننفذ: وترقد [ا] فنفد [ع] ويبعد [خ] ناقصة [ذ] / جـ ا: ا جـ [ا، ف] / إلى أن: لان [ع] / يلتقيا: ملتقا [ع] / ز: ب [خ] / وتري: وتر [س] / ل ح: ب ح [خ] ل [ذ] / موازيين: متوازيين [ض] / جـ ا: ح ا [ض] — 6-7 موازيين ... ل ح: ناقصة [ق] — 7 يساوي: تساوي [خ] / ووتري: د و ب ر ي [خ] / ز ط: أثبتها في الهامش [ث] / ل ح: ل حـ [ع، هـ] ب ح [خ] ا ح [ت] / جميعًا: ناقصة [ل] — 8 وننفذ ح ز: ناقصة [د] / ح ز: ز [و] / أن: ناقصة [ي] / يلقى: بقى [ي] / ذلك: أثبتها فوق السطر [ر] / ندبر: ب د ب ر [خ] — 9 جـ هـ ط ز: ناقصة [خ] / ح ل: ح ك [ت] / متوازية: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / وخطوط: وخط [ع] / ط ا: ح ا [خ، ف، م، ي] / ب هـ: ب ا [ك، ل] / ط ح: ح ط [س] ط ب حـ [خ، ي].

ح ب مساويتان / لقوسي ا ز ز ل، فسطح ط ا و ز متوازي الأضلاع وط ز مثل ا و. وبمثل ذلك ح ل مثل و هـ، ف د هـ مثل د ا ط ز ح ل جميعًا؛ وذلك ما أردناه. د – ١٥٠ – ظ

وإن أخرجنا / د م عمودًا على وتر ب ل، كان سطح نصف ب ل في د هـ أصغر من مربع نصف القطر / وأكثر من مربع د م، وذلك لأن مثلثي د ب م ب هـ د متشابهان لكون زاويتي د م ب هـ د ب قائمتين وزاوية ب مشتركة، فنسبة ب م / إلى م د / كنسبة ب د إلى د هـ، ف ب م – أعني نصف ب ل –/ في د هـ مساوٍ ل ب د في م د. وب د في م د أصغر من مربع ب د وأعظم من مربع / م د. فإذن نصف ب ل في نصف القطر وفي وتري ط ز ح ل جميعًا أصغر من مربع نصف القطر وأعظم من مربع / د م. م – ٢٦ خ – ١٨٩ – ظ ي – ٦٤ – و ر – ٤٣ ا – ١٠١ – ظ ذ – ٣٨٥ – ظ ق – ٣٢ – و

فكل دائرة يخرج قطر فيها وينصف نصفها ويقسم أحد الربعين بأقسام متساوية كم كانت، ويخرج / من نقط الأقسام أوتار في الدائرة موازية للقطر، كان سطح / نصف وتر أحد تلك الأقسام في نصف القطر وفي جميع الأوتار أصغر من مربع نصف / القطر وأعظم من مربع العمود الخارج من المركز الواقع على أحد أوتار تلك الأقسام، وذلك هو المطلوب. ک – ٢٢٢ – و س – ١١ – ظ جـ – ٤٥ – ظ

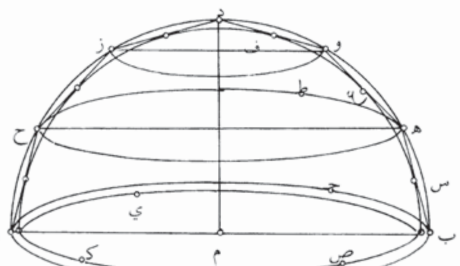
– يجـ – إذا وقع في نصف كرة مجسم يحيط به نصف الكرة، وكان المجسم مركبًا من قطع مخروطات / مستديرة كم كانت، وكان أعلى / سطح كل قطعة قاعدة للقطعة التي فوقها،/ وقاعدة القطعة السفلى هو قاعدة نصف الكرة / ورأس 〈قطعة〉 المخروط الأعلى نقطة هي قطب ع – ٨٥ – و ف – ١٣٣ – ظ ل – ٩ – ظ ب – ١٦١ – ظ

1 مساويتان: متساويتان [خ، ر، ض، ع، ق، و، ي] / لقوسي: كقوسي [خ] / ا ز: ا ب [ا] لز [هـ] / فسطح: وسحح [ي] / ط ا و ز: ط و ر [خ] / ا و: ا ر [و] / وبمثل: مثل [ع] – 2 و هـ: حـ هـ [ت] هـ و [ف] ر هـ [م] / ف د هـ: ور هـ [خ] / مثل: ناقصة [ذ، ع] / مثل د ا ط ز ح ل: أثبتها فوق السطر [و] – 3 إن: ناقصة [ل] اب [خ] / د م: ناقصة [جـ] أثبتها في الهامش [ک] / نصف: ناقصة [ع] / ب ل: ر ل [س] / ب ل: ر ل [ع] / د هـ: ر هـ [م] / مربع: ربع [م] – 4 مثلثي: مبنى [خ] / د ب م: د م ب [ذ، ع] / ب هـ د: ب هـ م [ذ] / لكون: يكون [ع، م] – 5 د م ب: د هـ ب [هـ] / هـ د ب: د ب [ع] / ب: ز، ثم صححها في الهامش [هـ] / فنسبة: ونسبة [ا، ب، ت، ث، جـ، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ق، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] / إلى: ناقصة [خ] / م د: ب د [ذ] / كنسبة ب د: ناقصة [خ] – 6 ب ل: ر ل [ع] / في: ناقصة [ا] / د هـ: ر هـ [ع] / م د: م ب [ع] د م [د، س] م ب د [خ] / وب د في م د: ناقصة [جـ، خ، ت، ر، هـ] / م د: د م [س] / أصغر: وأصغر [ر] / مربع: ربع [ب] – 6-8 ب د (الثالثة) ... مربع (الأولى): ناقصة [ت] – 7 ب د: ناقصة [خ] / في (الثانية): أثبتها في الهامش [ف] / ح ل: ح [خ] / جميعًا: ناقصة [خ، ي] – 8 مربع: مربعي بع [ع] / مربع: مربع نصف القطر [س] – 9 فكل: وكل [ب، ش، و، ي] ک ل [خ] / قطر فيها: بطرفها [ق] قطرها [ي] / فيها: منها [ا، ب، ث، خ، ش، ص] / الربعين: الرابعين [خ] / متساوية: مساوية [ض، و] / كم: ل م كما [خ] – 10 نقط: نقطة [ا، خ، ذ، ص، ض، ع، ق، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] / أوتار: اوتا [م] – 11-12 في نصف ... الأقسام: ناقصة [ص] – 11 وفي: في [ع] / الأوتار: الاوتان [خ] – 12 المركز: مركز [ذ] أوتار: ناقصة [س] / وذلك: في ذلك [ت] ذلك [خ] / هو: ناقصة [ع] / المطلوب: المط [جـ، ت، س] – 13 يجـ: ناقصة [خ، ذ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / إذا وقع: ناقصة [خ، ي] / في: ناقصة [ي] / يحيط: محيط [ع، ي] / به نصف: بنصف [ق] / وكان: كان [ت] وكانت [ن] / قطع: أثبتها تحت السطر [ر] – 14 مستديرة: مستدير [ل، ک، ن، و] مستديرات [هـ] / سطح: سطحي [د، خ، ع، ف، ق، هـ، م، ي] / قطعة: قطع [ق] أثبتها في الهامش [هـ] / قاعدة للقطعة: أثبتها في الهامش [ث] / للقطعة: القطعة [هـ] – 15 القطعة: ناقصة [م] / نقطة: أثبتها فوق السطر [ر] / ورأس ... قطب: مكررة [هـ].

نصف الكرة، / وكانت القواعد متوازية، والخطوط الخارجة من / قواعد القطع إلى / أعاليها على و – ١٦٩ – و
استقامة متساوية، ثم وقع في المجسم نصف كرة يحيط به المجسم قاعدتها دائرة / في سطح قاعدة ت – ٢٨٩ ذ – ٣٨٦ – و
النصف // الأول، كان السطح المحيط بالمجسم أصغر من ضعف/ قاعدة نصف الكرة الأول ن – ١٢٠ – و ش – ١٦٨ – و
وأعظم من ضعف قاعدة نصف الكرة الثاني. ض – ٧٧ – ظ ص – ١٣٢

فليكن نصف الكرة ا ب جـ د قاعدتها عظيمة ا ب جـ وقطبها د، وليكن فيه مجسم على ما وصفنا مركب من ثلاث قطع، أولاها ترتفع من دائرة ا ب جـ إلى دائرة هـ ط ح / والثانية ترتفع / ر – ٤٤
منها إلى دائرة ول ز والثالثة ترتفع منها / إلى نقطة د. ث – ١٨١ – و خ – ١٩٠ – و

نقول: فالسطوح المستديرة المحيطة بهذا المجسم جميعًا أصغر من ضعف سطح دائرة ا ب جـ.



فلنخرج في نصف كرة ا ب جـ د نصف عظيمة يمرّ بالقطب وهو ا د ب، ونخرج قطر ا ب للكرة وننصفه على م. ونخرج ح هـ زو، فهما موازيان لـ ا ب، لأنها فصول مشتركة بين عظيمة ا د ب والدوائر الثلاثة، وهما قطرا دائرتي هـ ح ط وزل. / ونخرج خطوط ب هـ هـ و و د من ذ – ٣٨٦ – ظ
القواعد إلى الأعالي، وهي متساوية بالفرض، وسطح نصف واحد منها في نصف ا ب وفي هـ ح / ك – ٢٢٢ – ظ

1 نصف الكرة: مكررة [هـ] / والخطوط: فالخطوط [م] / القطع: للقطع [خ] – 2 متساوية: مساوية [و] / يحيط: محيط [ع] / المجسم: مكررة [ا] الجسم [ع] – 3 النصف: لنصف [ص] / بالمجسم: بالجسم [ق] – 4 ضعف: نصف [جـ، ت، ر] اضعف [و] / نصف: ننصف [ع] أثبتها في الهامش [ك] – 5 د: و [س] – 6 وصفنا: وضعنا [خ، ر، ك، ل، و] / مركب: مركبا [ت] / ثلاث: ثلثه [ب، ش] / أولاها: اولها [ت] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل، ك] منه يقع [ث] مرتفع [س] / ا ب جـ: ا ب جـ د [ت، خ، ي] / هـ ط ح: هـ ط [س] ط ب ح [خ] ط ح [ذ] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] ناقصة [ي] – 7 دائرة ول ز... إلى: ناقصة [س] / ول ز: ول [ي] وك ر [خ] / والثالثة: الثالثة [ف] والثانية [و] / ترتفع: يرتفع [ر، ق، ل] منه يقع [ث] / منها: مكررة [ق] / د: و [ع] – 8 فالسطوح: فال سحوح [ي] فاالسطوح [خ] / المحيطة: المحيط [ب، خ، ر] / المجسم: المجسم ر [ع] / أصغر: ناقصة [ذ، ع] / سطح: أثبتها فوق السطر [ت] – 9 كرة: كـ ره [خ] / نصف: ناقصة [ع] / قطر: قطب [خ] – 10 وننصفه: وبنصفه [س] / ح هـ: هـ ح [س] / زو: ور [ع، م] / فهما: فيها [و] فها [ع] فهو [جـ] / موازيان: متوازيان [ت، ر] ولكن صححها ناسخ [ت] فوقها / لـ ا ب: ناقصة [ت] ب [و] ا ب [ض] / عظيمة: عظمه [س] – 11 قطرا: قطر [ع] / هـ ح ط وزل: ا هـ ح ط وزل [خ] هـ ح ط ول ر [ع] هـ ح ط د رل [خ] / خطوط: قطرط [ي] / ب هـ: هـ ب [س] ب ر [خ] – 12 إلى: ناقصة [ا، ف] / الأعالي: الاعلي [ي] / متساوية: مساوية [ع] / واحد: ناقصة [ب، ش، ص، ض، ك، ل، ن، و] / نصف: ناقصة [ب، ش، ص] / هـ ح: ح هـ [ت].

وز جميعًا أصغر من مربع نصف اب لما مرّ. وأيضًا / سطح واحد منها / في نصف محيط دائرة ي – ٦٤ – ظ
اب ج وفي محيطي دائرتي ح ه ط / زو ل جميعًا مثل السطح المحيط / بالمجسم لما مرّ. وسطح م – ٢٧ س – ١٢ – و
واحد منها في نصف اب وفي ه ح وز جميعًا، ثم الحاصل فيما إذا ضرب/ فيه / القطر حصل ذ – ٣٨٢ – و ق – ٣٢ – ظ
المحيط ، / مساوٍ لسطح واحد منها في نصف محيط دائرة اب ج وفي محيطي دائرتي ح ه ط زو ل ع – ٨٥ – ظ ل – ١٠ – و
جميعًا، أعني للسطح المحيط بالمجسم وهو أقل من ضعف الحاصل من ضرب مربع نصف اب فيما
إذا ضرب/ فيه القطر حصل المحيط. ومربع نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو ت – ٢٩٠
مساوٍ لسطح الدائرة، لأن ضرب نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر / حصل المحيط هو نصف و – ١٦٩ – ظ
المحيط وضربه مرة أخرى في نصف اب هو سطح الدائرة. فالسطح المحيط بالمجسم أقل من ضعف
سطح دائرة / اب ج./ ض – ٧٨ – و

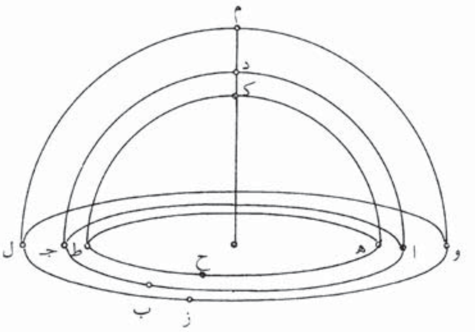
ثم نرسم في مجسم اب ج د نصف كرة يحيط به المجسم. ولكون سطح قاعدته/ دائرة في ح – ٨٨ – ظ ش – ١٦٨ – ظ
سطح / دائرة اب ج يكون أصغر منها. وننصف خطوط ب ه ه و و د على نقط س ع ف، ر – ٤٥
ونصل م س م ع م ف وهي // متساوية لأنها أعمدة من المركز على أوتار متساوية. ونرسم على مركز ا – ١٠٢ – و ب – ١٦٢ – و
م وببعد م س في سطح دائرة اب ج دائرة ك ص ي، ونخرج / في سطح هذه الدائرة خط ف – ١٣٤ – و ك – ٢٢٣ – و
م ص وليس هو / في سطح دائرة ا د ب. ولأن خطوط م س م ع م ف م ص الأربعة المتساوية

1 أصغر: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، ه] التعليق التالي «فسطح واحد منها (منها [ا]) فيما ذكر أصغر من ضعف مربع نصف اب وكذا (ولذا [ا]) إذا ضربناها فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط» / وأيضًا: أيضًا [ح] / سطح: ناقصة [ق] / دائرة: ناقصة [ب، ش، ص] – 2 محيطي: محيط [و] / ح ه ط: ه ح ط [ض] / المحيط: المجسم [ع] فراغ [ذ] – 3 نصف: كرر بعدها الجملة السابقة «محيط دائرة ... جميعًا مثل» [خ] / ه ح: ح ه [ح] / فيه: و [ي] ناقصة [خ] مثله [ذ] – 3-4 اب ... نصف: ناقصة [ج، ت، ر] – 4 المحيط: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص] التعليق التالي« لأن نصف اب فيما إذا ضرب فيه القطر حصل المحيط هو نصف اب ج وه ح (ره ح [ا]) منه محيط ح ه ط وو ز فيه محيط وز ل (زو ل [ص، د، ه])» / مساوٍ: مكررة [ف] / اب ج: اب د [ع] / وفي: في [س] / ح ه ط: ح ه ل [ا] ح ه [س] ح ه ط ا [ي] / زو ل: و ل [ي] – 5 للسطح: السطح [ت، خ، د، ز، ض، ط، ق، ه، م، و، ي] / من (الأولى): ناقصة [خ] – 6 فيه: فيها [س] / حصل: حطل، ثم أثبت الصواب في الهامش [ع] / ومربع ... المحيط: ناقصة [ذ، ق] / حصل المحيط: ناقصة [ج، ت، ر، س] / هو: ناقصة [س] وهو [خ] – 6-7 ومربع ... حصل المحيط: أثبتها في الهامش [ه] / هو ... المحيط: ناقصة [د] / مساوٍ ... حصل المحيط: ناقصة [ح] – 7 لأن: ولأن [ض] / نصف ... ضرب: ناقصة [م] / فيما: مما [ق] / هو: وهو [خ، ذ، س] – 8 وضربه: وضرب [خ] وحربه [ض]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ص] التعليق التالي «ومنه يحصل مربع نصف اب»، وكتبه ناسخ [ه] فوق السطر / وضربه ... المحيط: مكررة [ل] / هو: وهو [ذ، ع] / سطح: نصف [ي] / الدائرة: ناقصة [خ] / فالسطح: والسطح [ه] ناقصة [خ] بالسطح [ض] / أقل: اقول [خ] / ضعف: نصف [س، و] – 9 اب ج: اب ه [ع] – 10 مجسم: المحيط [ا] / يحيط: محيط [ه، ع] / ولكون: ويكون [ص، ك، ل، م] لكون [ح] / قاعدته: قاعدة [س، و] – 11 دائرة: ناقصة [خ، ل] / يكون: ويكون [خ] / وننصف: وننصف [ع] وبنصف [و] / ه و: وه [ث] / نقط: نقطة [ث، خ، س، ذ، ع، ي] – 12 ونصل: ولنصل [ت] / م س: مصه [ي] منه [خ] / متساوية (الأولى): مساوية [ا، ذ، ع، و] / مركز: مر [ي] – 13 وببعد: ونتفذ [ك، ل] / م س: س [ع] / اب ج: اب ج د [ا، ف] ناقصة [ي] / دائرة: ناقصة [ع، ي] / ك ص ي: د ص ي [ه] ك ص ري [خ] / ونخرج: يخرج [خ] / هذه: هذا [خ، ع] / الدائرة: الدوائر [ق] – 14 خطوط: خطر [و] / م ف: م ص [ك] م ب [ض] / م ص: م ف [ك، ل] / م س ... المتساوية: ناقصة [ا].

التي / ليست في سطح واحد خرجت من نقطة مَ إلى محيط الكرة الداخلة، يكون مَ مركزًا لها ذ – ٣٨٢ – ظ
ومَ سَ نصفَ قطرٍ لها ودائرةُ كَ صَ يَ قاعدةً لها. ومربع مَ سَ أصغر / من سطح نصف بَ هَ في خ – ١٩٠ – ظ
نصف اَ بَ وفي هَ حَ وزَ جميعًا، فمربع مَ سَ في المقدار / الذي إذا ضرب فيه القطر حصل ل – ١٠ – ظ
المحيط، أعني سطح دائرة كَ صَ يَ، أصغر من سطح نصف بَ هَ / في نصف اَ بَ وفي هَ حَ ن – ١٢٠ – ظ
وزَ جميعًا ثم الحاصل في المقدار الذي إذا / ضرب فيه القطر حصل المحيط، أعني نصف سطح س – ١٢ – ظ
المجسم المحيط بنصف الكرة الداخلة. فجميع سطح المجسم أعظم من ضعف سطح دائرة
كَ صَ يَ؛ وذلك ما أردناه.

– **يَدَ** – سطح نصف الكرة المستدير ضعف سطح الدائرة العظيمة التي هي/ قاعدتها. ت – ٢٩١
فليكن اَ بَ جَ دَ نصف كرة، ودائرة اَ بَ جَ عظيمة تقع فيها وهي قاعدتها، ودَ قطبها. فإن
لم يكن ضعف سطح / دائرة اَ بَ جَ / مساويًا لسطح نصف الكرة، فليكن أولاً أصغر منه، ع – ٨٦ – و
وليكن مساويًا لسطح نصف كرة / أصغر من نصف كرة اَ بَ جَ دَ، وهو نصف / كرة د – ١٥١ – و هـ – ٦٣ – ظ
هَ حَ طَ كَ./ فإذا عمل في / نصف كرة / اَ بَ جَ دَ مجسم – كما وصفنا – قاعدته دائرة اَ بَ جَ ر – ٤٦ ص – ١٣٣
ورأسه نقطة دَ بحيث لا يماس / نصف كرة هَ حَ طَ كَ، كان سطحه/ أصغرَ من ضعف سطح ذ – ٣٨٣ – و ي – ٦٥ – و
دائرة اَ بَ جَ وأعظمَ من سطح نصف كرة هَ حَ طَ كَ. فضعف سطح دائرة اَ بَ جَ المساوي ث – ١٨١ – ظ ق – ٣٣ – و
لسطح نصف كرة هَ حَ طَ كَ أعظم كثيرًا منه؛ هذا خلف.

1 التي ... يكون: ناقصة [ا] / التي: ناقصة [ف] / ليست: ناقصة [ب، ش، ص] أثبتها في الهامش [ن] / نقطة: نقط [خ] / مركزًا: مركز[ع] مركزها [ذ، م] / لها: ناقصة [خ] – 1-3 لها وم س ... إذا: ناقصة [ي] – 2 وم س: وم ص [ذ] / وم س نصف قطر لها: مكررة [ح] / قطر لها: قطرها [ت، جـ، د، ر، ز، ط، ع، ل، ق] / ومربع: اومربع [خ] / سطح: مسطح [ع] / نصف ب هـ في: مكررة [ذ] – 3 نصف: ناقصة [ل] / ا ب: ب ا [ذ، ع] / هـ ح: ح هـ [جـ، ذ، ع، م] / وز: هـ ر[ت] / فيه: ناقصة [ذ، ع] / حصل: خصل [و] – 3-5 فمربع ... جميعًا: ناقصة [خ] أثبتها في الهامش [ث] – 4 سطح (الأولى): ناقصة [ذ، ع] / نصف (الثانية): ناقصة [ح] / ا ب: ا ي [م] / وفي: وفي نصف [و] – 5 إذا: أثبتها فوق السطر [ن] / القطر: ناقصة [ي] / سطح: ناقصة [و] – 6 المحيط: ناقصة [ذ، ع] / الداخلة: ناقصة [ا] / ضعف: ناقصة [م] نصف [ذ] / دائرة: الدائرة [ض] – 8 يد: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] / سطح: ناقصة [خ، ض، ع] / نصف الكرة: ناقصة [خ] / المستدير: المستديرة [جـ، س، ق] / قاعدتها: قاعدته [ا، ب، ت، ث، جـ، ح، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ک، ل، ن، م، و، هـ، ي] – 9 اب جـ د: اب د حـ [ع] اب جـ [م] / اب جـ: ا جـ [جـ] / تقع: يقع [ر، س، ک، ل، ن، و] / قاعدتها: قاعدته [ا، ب، ت، ث، جـ، خ، د، ذ، ر، س، ش، ص، ض، ع، ف، ک، ل، ن، م، هـ، و، ي] – 10 يكن: ناقصة [ذ] / ضعف: ضعيف [س] / الكرة: ناقصة [م] – 10-11 الكرة ... نصف (الأولى): ناقصة، لكن نجد في الهامش «لسطح نصف كرة اب جـ د فليكن مساويًا» مع «ظ» فوقها، يعني «الظاهر» [جـ] مكررة [خ] – 11 كرة (الثانية): ناقصة [م] / وهو: و[خ] / كرة: ناقصة [ت، جـ، ر، س] – 12 هـ ح ط ک: ح ط ک [ب، خ، ذ، ش، ص] هـ ح [جـ] / كرة: ناقصة [ا، ب، ض، ل، ک، ن، ش، ص، و] / اب جـ د: اب جـ [جـ، ت، ر] / مجسم: ناقصة [ف] / وصفنا: وضعنا [ل، ک] / دائرة: ناقصة [ع] – 13 بحيث: حيث [خ، ي] / كرة: ناقصة [جـ، ت، ر، س] / هـ ح ط ک: ح ط ک [خ] / ضعف: ناقصة [ف] – 13-14 كان ... هـ ح ط ک: أثبتها في الهامش [ک] ناقصة [م] – 14 وأعظم ... اب جـ: ناقصة [س] / هـ ح ط ک: ح ط ک [خ] / فضعف: وضعف [ا، ب، ح، ش، ص، ض، ق، ک، ل، ن، و] ضعف [جـ، ت، ر] نصف [خ] / فضعف سطح دائرة: مكررة [و] – 15 هـ ح ط ک: ح [خ] ح ط ک [ث] / منه: من [س].



ثم ليكن ضعف سطح دائرة اب ج أعظم من سطح نصف كرة / اب ج د، وليكن مساويًا لسطح نصف كرة وزل م. ونعمل فيه مجسمًا – كما وصفنا – غير مماس لنصف كرة اب ج د./ فيكون سطح المجسم / أعظم من ضعف // سطح دائرة اب ج / لما مرّ، وسطح نصف كرة وزل م أعظم من سطح المجسم لكونه محيطًا به. فسطح نصف كرة وزل م أعظم كثيرًا من ⟨ضعف⟩ سطح دائرة اب ج، وكان / مثله؛ هذا خلف. فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه./ و – ١٧٠ – و / ض – ٧٨ – ظ / ج – ٤٦ – و / ط – ٢٦٤ – و / م – ٢٨ / ك – ٢٢٣ – ظ / ش – ١٦٩ – و

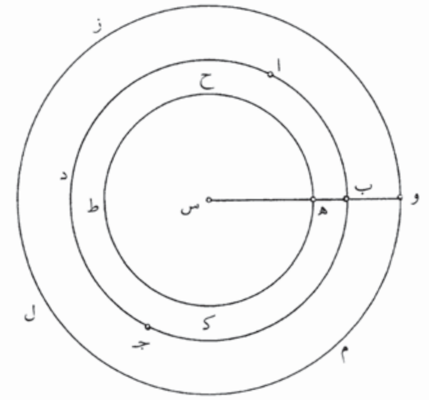
وقد بان منه أن سطح الكرة أربعة أمثال سطح أعظم دائرة تقع فيها./ ل – ١١ – و

– يه – كل كرة فإن الحاصل من ضرب نصف قطرها في ثلث السطح المحيط بها مساوٍ لعظمها. خ – ١٩١ – و

فليكن الكرة اب ج د ونصف قطرها س ب. فإن لم / يكن س ب في ثلث سطح كرة اب ج د عظمها، فليكن أولاً أصغر من عظمها، وليكن س ب في ثلث سطح / كرة أعظم من ب – ١٦٢ – ظ / ذ – ٣٨٣ – ظ

2 وزل م: وول م [خ] / ونعمل: ويعمل [س] / ونعمل فيه مجسمًا: ناقصة [ي] / مجسمًا: مجسم [ع] / وصفنا: وضعنا [ل، ك، و] – 3 فيكون: فليكون [و] / المجسم: المجسمة [ي] / أعظم: الأعظم [خ] – 4 أعظم ... وزل م: مكررة [ع] / من: ناقصة [ع] / به: ناقصة [ج، ت، ر، س] / فسطح: بسطح [ت] – 5 خلف: هو خلف [ع] / ثابت: الثابت [خ] – 7 وقد ... فيها: ناقصة [س] أثبتها في الهامش [ث] / تقع: ناقصة [ض، ك، ل، ن، و] يرتفع [هـ] / فيها: ناقصة [ب، ش، ص، ي] – 8 يه: ناقصة [ا، خ، د، س، ش، ض، ع، ق، ي] ١٥ [ط] / كل كرة: ناقصة [خ] / ضرب: الضرب [ع]؛ نجد في هامش [ا، ش] التعليق التالي «ويلزم منه أن سطح قطر الكرة في محيط (يحيط [ا]) أعظم دائرة يقع فيها مساو (مساويًا [ا]) لسطح الكرة لما تبين أن نصف قطر الدائرة (الكرة [ا]) في نصف محيطها هو مساحة الدائرة» / المحيط: ناقصة [ف] – 10 س ب: س ف ب ل [س] بب [م] ب أعظم [خ] / س ب: م س ب [خ] / ثلث: ناقصة [س] – 11 اب ج د: اح د [ذ، ع، ط] / اب ج د ... سطح كرة: أثبتها في الهامش [ف] / عظمها (الثانية): ناقصة [ع] / وليكن ... أعظم من: ناقصة [ي] / كرة أعظم من: فراغ [ذ] / أعظم من: ناقصة [خ].

كرة ا ب ج د مساويًا لعظم كرة ا ب ج د، مثلاً ككرة وزل م. وليكن / مركزاهما واحدًا، / ع – ٨٦ – ظ
ونعمل على كرة ا ب ج د مجسمًا – كما وصفنا – لا يماس كرة وزل م. فيلزم مما مرّ أن س ب في س – ١٣ – و
ثلث/ سطح المجسم يساوي 〈عظم〉 المجسم ويكون أكثر / من كرة ا ب ج د. ويلزم منه أن يكون ت – ٢٩٢
ثلث سطح المجسم أعظم من ثلث 〈سطح〉 كرة وزل م المحيط به؛ هذا خلف. ر – ٤٧



ثم ليكن س ب في ثلث / سطح كرة ا ب ج د أعظم من عظمها، وليكن س ب في ثلث ف – ١٣٤ – ظ
سطح كرة أصغر من كرة ا ب ج د – ككرة ه ح ط ك – مساويًا لعظم كرة ا ب ج د. ونعمل في كرة ا ب ج د مجسمًا كما وصفنا بحيث لا يماس كرة ه ح ط ك. ويجب مما مرّ أن س ب في ثلث مساحة سطح المجسم أصغر من مساحة كرة ا ب ج د، فثلث سطح ه ح ط ك أعظم من ثلث سطح المجسم المحيط به؛ هذا خلف.

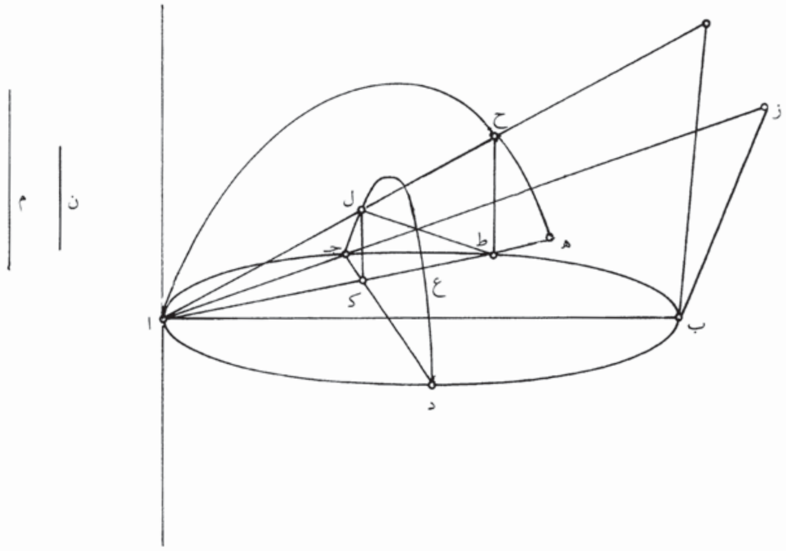
فإذن الحكم ثابت؛ وذلك ما أردناه.

1 كرة ... وزل م: ناقصة [ي] فراغ [ذ] / كرة: ناقصة [خ] / مساويًا ... ا ب ج د: مكررة [ع] / لعظم: اعظم [ع] لعظيم [و] / ككرة: لكرة [ب، ش، ص] الكرة [خ] / وليكن: فليكن [ب، ش] / مركزاهما: مركزهما [خ] مراكزهما [ث] موازاهما [و] – 2 ونعمل: ويعمل [س] / على: ناقصة [خ] / وصفنا: وضعنا [ذ، ط، ل، ك، و] / يماس: تماس [ب، ش، ط، و] / س ب: س ب ا [ع] – 3 سطح: السطح [ق] كتب فوقها «مساحة» [ا] / يساوي: تساوى [ب، ش] يتساوي [ا] / ويكون: مكررة [ف] / أكثر: أكبر [ت، ر، ف، ق] / ا ب ج د: ا ب ط د [ع] / منه: ناقصة [ت] – 3-8 المجسم ويكون ... المجسم: ناقصة [ا] – 4 ثلث: ناقصة [ع] أثبتها في الهامش [ت] / المجسم: ناقصة [ث] / المحيط: المحيطة [ب، ش] / به: ناقصة [ق] – 4-5 وزل م ... كرة: ناقصة [خ، ي] – 5 ثم ليكن: ثم لم يكن [ذ، ع، ط] / ثلث: ناقصة [و] / س ب: س ت [م] – 5-6 ا ب ج د ... سطح كرة: ناقصة [ث، س] – 6 سطح: أثبتها فوق السطر [م] / ا ب ج د: ناقصة [ب، ش، ص] أثبتها في الهامش [ن] فوق السطر [و] / ككرة: لكرة [ي] / ه ح ط ك: ح ط ك [خ] / مساويًا: مساو [ق] أثبتها في الهامش [ث] / لعظم: ناقصة [ح] / ونعمل: ويعمل [س] – 7 وصفنا: وضعنا [ذ، ط، ل، ك، و] / بحيث: ب حـ د ب [خ] / يماس: تماس [ب، ش] / كرة: ناقصة [ع] / ه ح ط ك: ح ط ك [ت] / ويجب: وتحت [و] وبحيث [خ] ويلزم [ذ، ع، ط] / مما: بما [ت] / أن: من ان [خ] / س ب: حـ ب [ت] / في: مكررة [ف] – 8 سطح (الثانية): ناقصة [ت، و] / ه ح ط ك: وح في ط ك ل [ت] – 9 ثلث: ناقصة [ت] ل ب [خ] / المجسم: ناقصة [ث] – 10 فإذن: بان [ي] ل ب [خ] / ثابت: الثابت [خ].

/ – يو – نريد أن نجد مقدارين يقعان بين مقدارين مفروضين / لتتوالى الأربعة على نسبة ز – ٥٠ – و
واحدة. ا – ١٠٢ – ظ

وعلم ذلك نافع لطالب الهندسة، وبه يَعرفُ ضلع المكعب./ وذلك أنا إذا عرفنا مقدارين ن – ١٢١ – و ك – ٢٢٤ – و
يقعان / بين / الواحد والمكعب على نسبة واحدة يكون ثانيها من جانب الواحد ضلعًا للمكعب. ق – ٣٣ – ظ ط – ٢٦٤ – ظ
وهذا العمل / لرجل من القدماء / اسمه مانالاوس / أورده في كتاب له في الهندسة / ونحن نصفه. خ – ١٩١ – ظ

ليكن المقداران خطي / م ن، وليكن م أعظم من ن؛/ ونرسم دائرة/ ا ب جـ ونجعل قطرها ل – ١١ – ظ ذ – ٣٨٤ – و
وهو ا ب مساويًا ل م، ونخرج فيها وترا جـ مساويًا لمقدار ن، / ونخرج من ب عمودًا على ا ب، ي – ٦٥ – ظ ض – ٧٩ – و
ونخرج ا جـ حتى يلقاه على ز، ونقيم على / قوس / ا جـ ب نصف أسطوانة مستديرة قائمة، أعني و – ١٧٠ – ظ
تكون أضلاعها أعمدة على سطح دائرة ا جـ ب. وندير على خط ا ب نصف دائرة يقوم سطحها نهاية – ق ص – ١٣٤ ز – ٥٠ – ظ



1 يو: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ق، ي] الشكل السادس عشر من كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرية لبني موسى محمد والحسن وأحمد [ز] / نريد: ناقصة [خ] / نجد: ب ح د [خ] / مفروضين: مفروضتين [ز] / لتتوالى: تتوالى [ع] لتوالى [خ، ش] ليستولى [ح] / الأربعة: لأربعة [ص] – 2 واحدة: واحد [ع] – 3 لطالب: لطلب [م] / يعرف: نعرف [و] نقدر [ک، ل] / ضلع: سطح ضلع [ع] ضلعب [ش] / أنا: أثبتها فوق السطر [ث] – 4 ثانيها: مالها [س] / للمكعب: لمكعب [ت] – 5 العمل: لعمل [خ] / لرجل: لزحل [ل] الرجل [خ] / القدماء: العلماء [جـ، ت، ر، س] / نصفه: ونصفه [جـ] نضفه [خ] – 6 ليكن: ليكون [ا، ز] / خطي: أثبتها في الهامش [ف] / ونجعل: ويجعل [س] – 7 مساويًا: مساو [جـ، ز، ض، ل، ک، ن، و] / ونخرج: ويخرج [س] / وتر: وترا [م] / مساويًا لمقدار: مساو بالمقدار [ز، ک] / ونخرج: ويخرج [س] / من ب: فراغ [ذ] – 8 حتى: على [ذ، ع، ط] / ونقيم: ونقيم ه [خ] / نصف: فراغ [ذ] / مستديرة: مستدير [ي] – 9 سطح دائرة: فراغ [ذ] / ا جـ ب: ا ب حـ [ذ، ع، ط] ا جـ [س] / ا ب: ب [خ] / يقوم: تقوم [ذ، س، ل] / سطحها: سطحا [ا].

على سطح ا ب جـ / على / زوايا / قوائم وهي قوس ا ح هـ. ونثبت نقطة آ من قوس/ ا ح هـ في ش – ١٦٩ – ظ
موضعها كالمركز ونديرقوس ا ح هـ على مركز آ بحيث يكون سطحها / في جميع دورانها قائمًا على م – ٢٩ ت – ٢٩٣
سطح ا ب جـ على قوائم ليكون قوس ا ح هـ يفصل سطح نصف الأسطوانة القائم على قوس ر – ٤٨ س – ١٣ – ظ
ا جـ ب. ونثبت / خط ا ب / كالمحور ونديرمثلث ا ز ب على محور/ ا ب حتى يلقى خط ا ز فصل ب – ١٦٣ – و ع – ٨٧ – و
سطح نصف الأسطوانة وترسم نقطة جـ من خط ا ز في دورانه نصف دائرة جـ ع د قائمًا على ذ – ٣٨٤ – ظ
سطح ا ب جـ على قوائم. ونرسم على الموضع الذي يلقى فيه خط ا ز فصل سطح نصف الأسطوانة
نقطة ح. ونثبت قوس ا ح هـ من مدارها عند نقطة ح ونخرج خطي ا ح ح هـ ونرسم حيث يلقى
خط ا ح قوس جـ ع د نقطة ل، ونخرج من نقطة ح عمودًا على سطح دائرة ا ب جـ وهو
خط ح ط، / ونخرج ل ک وهو عمود على سطح دائرة ا ب جـ لأنه فصل مشترك لسطح مثلث ک – ٢٢٤ – ظ
ا ح هـ / ولنصف دائرة / جـ ع د القائمين على سطح ا ب جـ، ونخرج خط ل ط ونبيّن أنه عمود ث – ١٨٢ – و
على ا ل لأن سطح جـ ک في ک د مثل مربع ل ک./ ولكن ضرب جـ ک في ک د مثل ضرب ط ک ط – ٢٦٥ – و ل – ١٢ – و
في ک ا، فضرب ط ک في ک ا مثل مربع ل ک، فزاوية ط ل ا قائمة. وقد تبيّن أن زاوية ا ح هـ
قائمة لأنها مركبة على نصف دائرة ا ح هـ، وأن زاوية / ا ط ح قائمة لأن ح ط عمود على سطح د – ١٥١ – ظ
دائرة / ا ب جـ وخط ط ا في سطح دائرة ا ب جـ، وأن / زاوية ا ل ط قائمة لما مرّ. فمثلثات ض – ٧٩ – ظ ف – ١٣٥ – و

1 سطح ... زوايا: فراغ [ذ] / ا ب جـ: ا حـ [ع] / زوايا: زاويا [ت، ي] / قوائم: قائم [ک، ل] / ا ح هـ: ا حـ هـ [س] ا ح ه و[خ] / ونثبت: وثبت [ا، ط، و] / آ: ام [ي] / آ من قوس: ناقصة [خ] / ا ح هـ: ا حـ هـ [ط] ا هـ ح [ب، ش، ص] – 1-2 في موضعها كالمركز: فراغ [ذ] – 2 موضعها: مواضعها [ش] / ونديز: وندوير [ذ، ع، ط] / ا ح هـ: ا ح حـ [س] / آ: ناقصة [و] / دورانها: دوراتها [ص، ط] دورانا [ز] / قائمًا: قائما [و] – 3 سطح: ناقصة [ذ، ع، ط] / ليكون: فيكون [ت، ع، ط] / قوس: ناقصة [جـ، ت، ر] / يفصل: مكررة [ط] بفصل [س] ناقصة [ر] تفصيل [ز] / سطح نصف الأسطوانة: ناقصة [جـ، ر] – 4 ا جـ ب: ا جـ ل [س] / ونثبت: ويبت [ط، و] / كالمحور: كالمركز [جـ، ت، ر، س] كالمحوره [م] كالمجور [خ] / ونديز: نديز [م] / حتى: على [ص] / يلقى: تلقى [خ] / يلقى خط ا ز: ناقصة [جـ، ر] / خط: مكررة [ذ، ط] / فصل: ونصل [ت] فضل [ب، ش] يفصل، وكتب فوقها «نصل» [ر]؛ نجد في هامش [ا، ب، د، ص، هـ] التعليق التالي «هو خط منحنٍ يحدث على سطح الأسطوانة من حركة نصف دائرة ا ح هـ» – 5 في: ناقصة [ي] / جـ ع د: حـ ع و[ع] جـ د ع [س] ونجد في هامش [ا، ب، د، ص] التعليق التالي «جـ ع منها يكون داخل الأسطوانة» / قائمًا: قائما [و] – 6-5 نقطة ... قوائم: أثبتها في الهامش [هـ] – 6 فيه: منه [خ] / ا ز: ناقصة [ي] ا ب [ث] / فصل: فضل [ب، ش] / سطح نصف: نصف سطح. وكتب «خ» فوق نصف و«م» فوق سطح [ر] – 7 ونثبت: وثبت [ط، ع] / ا ح هـ: ا هـ ح [ب، ش، ص] / مدارها: مركزها [س] / ونخرج: ويخرج [س] / ونرسم: وترسم [س] / حيث: ناقصة [خ] / يلقى: تلقى [س] – 8 ا ح: ا حـ [س] / جـ ع د: ح ع د [ض] / ل: د [ذ، ع، ط] / ونخرج: ويخرج [خ، س، ي] / ح: ناقصة [خ] – 8-9 وهو خط ... ا ب جـ: ناقصة [ذ، ط] – 10 ا ح هـ: ا هـ ح [س] / ولنصف: ونصف [ت] / القائمين: القائمتين [ا، ب، ث، ز، ش، ض، و] / ا ب جـ: ا جـ [ف] / ل ط: ب ط [خ، ز] – 11 سطح: ناقصة [جـ] / جـ ک: ک [ا] ناقصة [هـ] / ک د: بد [خ] / ضرب (الأولى): ضر [ز] / ط ک: ک ط [ک، ل] ط ل [جـ، س] – 11-12 ولكن ... ل ک: ناقصة [م] / ک د مثل ضرب ط ک في: ناقصة [خ] – 12 ک ا: نا [خ] / فضرب: فضر [ا] / ط ک: ک ط [ک، ل] / ک ا: با [خ] / فضرب ط ک في ک ا: مكررة [ا] ناقصة [ذ، ي] / ل ک: ک ل [ز] / ط ل ا: ط ل [ب، ش] كل [ي] / تبين: بين [س] – 13 دائرة: ناقصة [ع] / ا ح هـ: ا حـ هـ [س] ناقصة [و] / ا ط ح: ل ط ح [ا] ل ح ط [ض، ک، ل، ن، و] ا ط ب ح [خ] – 14 وخط ... ا ب جـ: ناقصة [هـ] / ا ل ط: ا ر ط، وأثبت الصواب في الهامش [ز] / فمثلثات: مثلثات [ت].

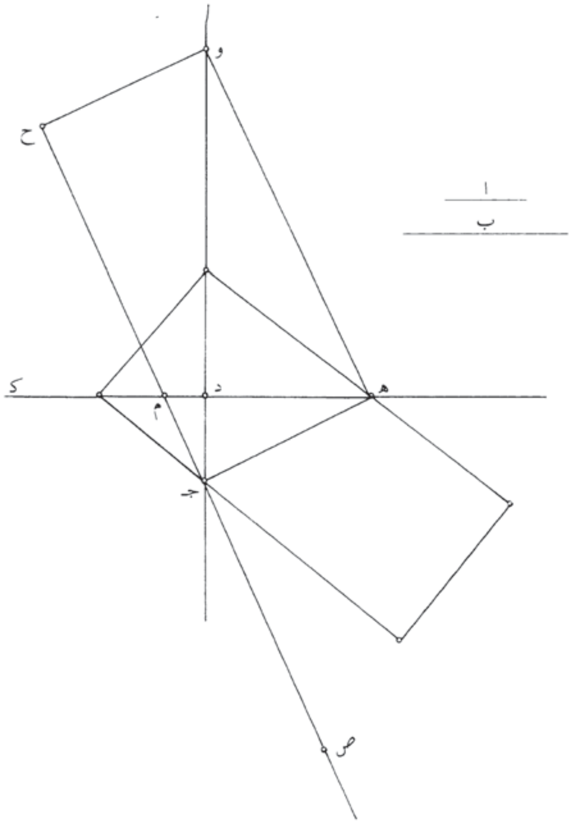
اح هـ اط ح / ال ط في كل واحد منها زاوية قائمة وزاوية حادّة مشتركة،/ فهي متشابهة: ر – ٤٩
نسبة هـ ا إلى اح كنسبة اح إلى اط وكنسبة اط إلى ال. ولكن خط / اهـ مثل مقدار م / ز – ٥١ – و ذ – ٣٨٥ – و
وخط ال مثل مقدار ن./ فقد وقع بينها مقدارا / اح اط وتوالت على نسبة؛ وذلك / ما أردناه./ ت – ٢٩٤ خ – ١٩٢ – و جـ – ٤٦ – ظ

– يز – ولأن الأشياء / التي استعملها مانالاوس وإن كانت صحيحة / فهي إما ألا يمكن أن و – ١٧١ – و ح – ٨٩ – و
تفعل وإما أن / تكون عسرة جدًا، طلبنا / لذلك وجهًا أسهل. ي – ٦٦ – و ذ – ٣٨٠ – ظ

فليكن المقداران ا ب ونخط جـ د مثل ا ونخرج عليه عمود د هـ مثل ب ونصل هـ جـ س – ١٤ – و ع – ٨٧ – ظ
ونخرج / جـ د هـ د لا إلى حدّ، ونخرج من هـ عمودًا / على هـ جـ إلى أن يلقى جـ د على و، ونخرج ش – ١٧٠ – و
من جـ خطًا موازيًا له وإلى أن يلقى هـ د على م وهو م جـ، ونخرجه إلى أن يصير م ص مثل هـ و. ا – ١٠٣ – و
ونتوهم أن خط و هـ يتحرك من ناحية نقطة و إلى ناحية / نقطة د ويكون طرفه الذي عند و غير ن – ١٢١ – ظ
مفارق في حركته لخط و د ويكون الخط في حركته لا يزال يمرّ على نقطة هـ من خط جـ هـ كما
إذا تحرك خط و هـ كما وصفنا، فحيث كان طرفه من خط و د فإن خط و هـ في تلك الحال
يمتدّ على استقامة ما بين نقطة طرفه وبين نقطة هـ من خط هـ جـ. ثم نرسم على / الممدود على ب – ١٦٣ – ظ ك – ٢٢٥ – و
استقامة / خط هـ د ك،/ ونتوهم/ أن خط م ص يتحرك من ناحية نقطة م / إلى ناحية / نقطة ل – ١٢ – ظ ط – ٢٦٥ – ظ
ك ويكون طرفه الذي عند م غير مفارق في حركته لخط م ك ويكون خط م ص في حركته لا ص – ١٣٥ ذ – ٣٨١ – و

1 اح هـ: احـ هـ [س] / اط ح: ناقصة [ص] ط ح [س] / ال ط: ناقصة [ع] اك ط [خ] / واحد: ناقصة [م] / قائمة وزاوية: ناقصة [ي] / وزاوية: وزاوية ط [خ] وزاوية ا [ز] – 2 هـ ا: هـ [خ] اهـ [ز] / اح (الثانية): ح [خ] / وكنسبة: كنسبة [د، س] ونسبة [ز] / ولكن: وليكن [ذ] / اهـ: اح [ر] – 3 مقدارا: ار[خ] مقدار[ع] / ن: ر [ذ] / اح اط: اط اح [ا، ف] / وذلك: ذلك وذلك [ذ، ط، ع] / ما: وما [خ] / أردناه: كتب بعدها «تم» [ز] – 4 يز: ناقصة [خ، ر، ز، و، س، ش، ض، ط، ع، ي] / ولأن الأشياء: ناقصة [خ] / التي: ناقصة [ث] / استعملها: يستعملها [ص] / مانالاوس: منالاوس [ح، س] / وإن: فان [ك] / كانت صحيحة: كان [ذ] كان صحيحا [ا، ب، ث، جـ، ح، خ، د، ر، ز، س، ش، ص، ض، ع، ط، ف، ك، ل، م، ن، و، هـ، ي] / ألا: ان [ع] – 5-4 ألا ... وإما: ناقصة [م] – 5 تفعل: يفعل [ا، خ، ر، س، ط، ل] / تكون: يكون [ا، خ، س، ط، ل] لا يكون [ب، ش] / عسرة: عشره [ا، ح، ض، ط، و، ي] / لذلك: كذلك [خ] – 6 المقداران: المقدار [ي] / ونخط: ويخط [ا، ب، خ، ش، ط] وخط [ث، ر] / ا: او[ذ، ع، ط] اهـ [س] / ب: ب جـ [ث] – 7 جـ د: ح د [ذ، ع، ط] / هـ د: هـ [ط] / لا: ناقصة [ك، ل] / حد: احد [ث] / ونخرج: ويخرج [س] / على (الثانية): ناقصة [ي] / ونخرج: ويخرج [س] – 8 وهو م جـ: ناقصة [ح، خ] / م جـ: حـحـ [ي] / ونخرجه: نخرجه [خ] / أن: ناقصة [ث] – 9 ونتوهم: نتوهم [ح، هـ] وهوهم [ي] / ناحية: أثبتها فوق السطر [ح] / و: ناقصة [خ] / وإلى ناحية نقطة: ناقصة [ذ، ع، ط] / طرفه: نحرفه [ي] / و: ر [ت، ر] – 10 مفارق: معارن [ي] / حركته: حركة [م] / لخط: خط [خ، ز، ف، م، ي] / ويكون: ولكون [س] مكررة [ر] / حركته: الحركة [جـ، ت، ر] / لا: الا [ذ، ع، ط] / خط: خطة [س] ناقصة [جـ] / كما: كما [خ، ذ، ض، ع، ط، ي] ناقصة [ز] – 11 إذا: فاذا [ز] / خط: ناقصة [ز] / و هـ: وح [ح] / وصفنا: وضعنا [خ، ك، ل] / فحيث: بحيث [خ] / خط: ناقصة [جـ] / فإن: فان كان [ت، جـ، ر، س] / الحال: الحالة [ب، ث، ش] – 12 يمتد: ممتدا [ع] ويمتد [ب، ش، ص] تمتد [ل] عند [ي] / وبين: و[ك، ل] / هـ جـ: ح هـ [ب، ش] /على: ناقصة [ط] / الممدود: الممتدد [ع] المحدود [ا، ز] – 13 خط: ناقصة [س] / ونتوهم: وسوحه [ي] / م ص: ب حـ [ي] / يتحرك: متحركة [ب، ش] – 14-13 إلى ناحية ... مفارق في: ناقصة [م] – 14 طرفه ... ويكون: أثبتها في الهامش [ن] / م: ناقصة [و] / مفارق: مقارن [ي] / حركته: حركه [ط] / لخط: الخط [ع] / م ص: م س [ك، ل] / في حركته: ناقصة [جـ].

يزال مارًّا على نقطة جـ من خط هـ جـ كما وصفنا من حركة / خط وهـ. ونتوهم أن خطي وهـ ر - ٥٠
م ص في حركتها متوازيان. ونتوهم على طرف خط وهـ على نقطة هـ خطًا قائمًا على خط وهـ
على زاوية قائمة مثبتًا/ معه في حركته، ولا نجعل لهذا الخط غاية محدودة ليكون // هذا الخط لا م - ٣٠
يزال يقطع خط م ص عند تحرك خطي وهـ م ص. فإذا تحرك خطا وهـ م ص، وكانا في حركتها ت - ٢٩٥ ز - ٥١ - ظ
متوازيين، ولزم طرفاهما خطي ود م ك كما وصفنا، فلا محالة أن الخط القائم على خط وهـ على



1 مارًّا: مار [ح] / هـ جـ: حـ هـ [ب، ذ، ش، ع، ط، و] / وصفنا: وضعنا [خ، ك، ل، و] / من: ناقصة [و] ومن [جـ] / حركة: حركته [و] / خط: ناقصة [د، ي] / وهـ: ور [جـ] رهـ [ي] / أن: الى [ط] – 2 حركتها: حركتها [ب، ش، ص، ع، هـ، و] / ونتوهم: ويتوهم [س] ويتوهم أن [ت، ث، جـ، خ، ذ، ر، ص، ع، ط، م، ي] / على: ناقصة [خ، ف، م، ي] من [ز] / على: ناقصة [ز] / نقطة: نقط [ك] / هـ: ناقصة [ل] – 1-2 ونتوهم ... وهـ (الأولى): ناقصة [ح] – 3 زاوية: زوايا [جـ، ت، ر] / مثبتًا معه: مثلها معه [ا] متتابعة [خ، ز، س، ل] مسانه [ي] / نجعل: يحصل [ذ، ط] / غاية: فانه، ونجدها فوقها السطر مع «صح» [م] / محدودة: ممدودة [ش] بحدوده [خ] / ليكون: فيكون [ت] – 4 يقطع: نقطع [س] يقع [خ] / خط: بخط [س] ناقصة [م] / م ص: م م [ع] / خطي: خط [ز، خ، ي] / م ص: م س [ع] / فإذا ... م ص: ناقصة [ا، ب، ش، ص، ض، ل، ك، ن، و] / خطا: فراغ [ذ] / م ص: ناقصة [ي] / كانا: كان [و] / حركتها: حركتها [ع] – 5 متوازيين: متوازتين [و] / خطي: خطين [ز] / ود م ك: فراغ [ذ] / وصفنا: وضفنا [ل] / محالة: لى الر [ي] محـ [ت] / أن الخط: مكررة [ا] / وهـ على: وهـ م ص [م] / خط وهـ على: ناقصة [د].

زاوية قائمة الذي يتحرك معه ويقطع خط م ص سينتهي إلى نقطة ص. فإذا انتهى / الخط القائم خ – ١٩٢ – ظ
على وهـ إلى ص أثبتنا هناك خطي وهـ م ص / وخططنا خطي هـ ص وم. ومعلوم أن خط ض – ٨٠ – و ث – ١٨٢ – ظ
هـ ص يقوم / من كل واحد من خطي وهـ م ص على زاوية قائمة لأنه هو الخط الذي جعلناه
يقوم من خط وهـ على زاوية قائمة ويتحرك معه / حتى ينتهي إلى نقطة ص. س – ١٤ – ظ

فأقول: إن خطي د م / د و بين مقداري جـ د د هـ: نسبة جـ د إلى د م كنسبة د م إلى د و ع – ٨٨ – و ز – ٥٢ – و
وكنسبة د و إلى د هـ. هـ – ٦٤ – و

برهانه: أن خطي وهـ م ص متوازيان / متساويان وزاويتي وهـ ص م ص هـ قائمتان، ش – ١٧٠ – ظ و – ١٧١ – ظ
فخط // وم / مساوٍ لخط هـ ص // وكل واحدة من زاويتي / هـ وم ص م وقائمة. ولكن م د ي – ٦٦ – ظ ذ – ٣٨١ – ظ
عمود على خط وجـ وخط ود عمود على خط هـ م، فنسبة خط جـ د إلى د م كنسبة / د م إلى ک – ٢٢٥ – ظ ط – ٢٦٦ – و
د و وكنسبة د و / إلى د هـ. ولكن خط جـ د مثل آ وخط د هـ مثل ب، فخطا د م د و وقعا / بين ل – ١٣ – و ف – ١٣٥ – ظ
آ ب وتوالت على نسبة؛ وذلك ما أردناه.

ولكي يكون وجود ذلك بالفعل سهلاً نجعل مكان خط هـ و / القائم على هـ جـ مسطرة، ر – ٥١
ونجعل مكانَ هـ جـ مسطرة أخرى ينتظمها مع مسطرة هـ و قطب عند نقطة هـ مثبت في موضعه
ومسطرة هـ و تدور عليه، ونخرج خط جـ م القائم على هـ جـ على زاوية قائمة إلى نقطة ح ونجعل
جـ ح مثل هـ و، ونصيّر مكان خط جـ ح مسطرة ينتظمها مع مسطرة / هـ جـ قطب عند نقطة جـ ت – ٢٩٦

1 زاوية قائمة: فراغ [ذ] ناقصة [د] / الذي ... على: ناقصة [د] / ويقطع: ويقع [ع، ط] / خط: خطي [و] / م ص: م ح [خ] / فإذا انتهى الخط: فراغ [ذ] / الخط: مكررة [ن، و] – 2 وهـ: رهـ [ي] / إلى: على [ض] / وخططنا ... وم: ناقصة [م] فراغ [ذ] / ومعلوم: معلوم [ذ، خ] / يقوم: تقوم [س، ل] – 3 من (الأولى): ناقصة [ک، ل] / خطي: خطين [ز] / جعلناه: جعلنا [ذ، ط] – 4 يقوم: مقوم [ذ، ع] تقوم [س] ناقصة [ز] يقدم على [ي] / وهـ: د هـ [ي] / حتى: خطي [خ] / ينتهي: انتهى [ف] / ص: ناقصة [و] – 5 خطي: خطين [ز] / بين: نبين [خ] / جـ د د هـ: ح روهـ [ط، ع] / د و: د ص [س] – 6 وكنسبة: كنسبة [ح، ي] / وكنسبة د و إلى د هـ: ناقصة [ب، ش] / إلى د هـ: مكررة [ي] – 7 متساويان: متساويتان [ک] / وهـ ص: وهـ و [ع] – 7-8 برهانه ... هـ ص: مكررة [ي] – 8 وم: رم [ي] / لخط: خط [خ] / واحدة: واحد [خ، ط] / زاويتي: زوايتي [خ] / ولكن: وليكن [ا، ح، ذ] – 9 وجـ: د جـ [ا، ض، و] رح [ش، ک، ل] وح [ح] / وخط: وخطي [ض، ن، ک، ل، و] ناقصة [خ] / ود: وجـ [س] وهـ د [خ] / عمود: عمودا [و] / خط: ناقصة [د، ذ، ع، ط] ح خ ط [خ] / هـ م: م هـ [م] / جـ د: جـ [ي] – 9-10 د م إلى د و: د هـ إلى د هـ [ذ، ط] – 10 وكنسبة: كتب قبلها «وكنسبة وهـ إلى د هـ» [ع] كنسبة [ز] / إلى د هـ: ناقصة [ط] / آ: خط آ [ذ، ط، ع] ناقصة [ل] / آ وخط: آ وخط [ب، ش] / ب: خط ب [خ] / د و: د م [ث] – 12 ولكي: ولان [ز، ذ، ع، ط] ولكن [جـ، ت] وليكن [خ، م، ي] / يكون: ناقصة [خ، ع، ي] / وجود: قصر [ي] / بالفعل: بالعقل [س] / سهلاً: هذا [خ] / نجعل: ناقصة [ت] فجعل [م] / هـ و: وهـ [ز] هـ هـ و [جـ] – 13 مكان: مكانان [خ] / أخرى: ناقصة [خ] / ينتظمها: وينتظمها [ت، ر] ينتظمها [خ] / مسطرة: مسطر [ز] / هـ و: هـ ر [ا] و [خ] / مثبت: مثلث [خ، س، ض، و] يثبت [ز] – 14 هـ و: هـ [و] و [خ، ث، ذ، ط] / تدور: ويدور [ط] يدور [ر، س] / م القائم على هـ جـ: مكررة [خ] / هـ جـ: فوق السطر [و] – 14-15 خط ... مثل: ناقصة [ل] – 15 جـ ح: ص ح [ز، خ]، كثيرًا ما كتب الجيم صادًا [ز، خ] ولن نشير إليها فيما بعد/ هـ و: ح و [ز، خ، ذ، ع، ط، ف، ي] ح ر [م] هـ ر [و] / ونصير: نصير [ذ، ط] تصير [ز] / خط: ناقصة [ف] / مسطرة: أثبتها فوق السطر [ر] / مع مسطرة: ناقصة [س] / قطب عند نقطة جـ: ناقصة [ي] / نقطة: قطعة [ع] / جـ: مع [ض].

مثبت في موضعه، ومسطرة ح ج تدور عليه، كما تكون/ مسطرة ه ج ثابتة لا تتحرك؛ فسطرتا ا – ١٠٣ – ظ
ه و ج ح تدوران على قطبي ه ج. ونمدّ مسطرة فيما بين نقطتي و ح ينتظمها مع مسطرة وه ذ – ٣٨٢ – و
قطب عند نقطة و ومع مسطرة ج ح قطب عند نقطة ح، / ويكون هذان القطبان / مرسلين غير ب – ١٦٤ – و
مثبتين كما تدور المساطر الثلاث، أعني مساطر ه و و ح ج، / على مسطرة ه ج المثبتة بقطبي ذ – ٣٨٦ – ظ
ه ج./ ونجعل في ظهر / مسطرة ه و شظية دقيقة تجري على ظهرها في مجرى، ونجعل وسط هذه ن – ١٢٢ – و ض – ٨٠ – ظ
الشظية موضوعًا على خط و ه، / ونجعل / طولها مثل طول مسطرة ه و. ونجعل في طرف هذه ع – ٨٨ – ظ
الشظية الذي عند و قطبًا يكون مركزه نقطة و، ونقيم عن جنبتي و د سطحين يكون فصلاهما ج – ٤٧ – و
المشتركان مع [فصل] سطح ه ح / موازيين لخط و د، ونجعل هذين السطحين مماسين ز – ٥٢ – ظ
للقطب / الذي في / هذه الشظية ليكون إذا أديرت أضلاع مربع ه ح الثلاثة على ضلع ه ج خ – ١٩٣ – و
الثابت بقي هذا القطب بين هذين السطحين وبقي مركز القطب / لازمًا لخط و د وخرج / طرف س – ١٥ – و ص – ١٣٦
الشظية عن / نقطة ه متباعدًا عنها على استقامة / الخط الذي فيما بين مركز القطب وبين نقطة ك – ٢٢٦ – و ل – ١٣ – ظ
ه. ونجعل/ في ظهر مسطرة ج ح شظية أخرى وتجرى على ظهرها، ونجعل ابتداء هذه الشظية من ر – ٥٢ ط – ٢٦٦ – ظ
عند نقطة م ومنتهاها عند نقطة ص كيما يكون طول هذه / الشظية مثل طول الشظية المركبة على ذ – ٣٨٧ – و
مسطرة ه و،/ ونجعل / في طرف هذه الشظية الذي عند م قطبًا، ونحتال فيه الحيلة التي وصفنا و – ١٧٢ – و ش – ١٧١ – و

1 مثبت: مثلث [خ، ذ، ط، ع، ي] يثبت [ت] / ومسطرة: ومسطر [ي] / ح ج: ج ح [ك، ل] / تدور: بدور [ط] يدور [ج، ر، س] / كما: كيما [ا، ب، ت، ج، ر، س، ش، ص، ض، ف، ک، ل، ي] / تتحرك: يتحرك [ا، ر، س] – 2 ه و: ه د [ا] / تدوران: بدوران [ط] يدوران [ا، ر، س] يدورابن [خ] / قطبي: خطي [ز، خ] / بين: ناقصة [د] / و: ه [ا] / ح: ه [خ] / ينتظمها: وينظمها [ف] / وه: د ه [ت] – 3 و: د [ت] / ومع: مع [ا، خ] / هذان: هذاان [خ] / القطبان: الفصلان [ذ] / غير: عند [م] – 4 مثبتين: مرسلين [ث] فراغ [ذ] / مثبتين كيما: مشتركها [و] / كيما: وح [ت] كما [ج، خ، س، ض، ي] / تدور: بدور [ط] تدو [ي] / مساطر: مساطير [ز] / وح: ه ح [ت] رح [م] و [ذ] / ح ج: ح [ذ، ط] / مسطرة: مسطر [ي] / على مسطرة: فراغ [ذ] / المثبتة: المثلة [ذ، ط، ي] المثبت [ج] / بقطبي: على نقطتي [ت، ج، ر، س] نقطتي [م، خ] – 5 ظهر: ظهره [و] / ه و: و [ت، ث، ج، خ، ذ، ط] / تجري: تحوى [م] يجرى [ر] / في: ناقصة [ب، ش، ص، ي] أثبتها تحت السطر [ن] و [ز] / مجرى: محوى [م] مع مجرى [خ] / وسط: هذه وسط [س] ناقصة [م] – 6 الشظية: المسطيه [ع] / طولها: طولها [ز] / ه و: و [ذ، ط، ي] ه [ع] ناقصة [خ] – 7 الشظية: المسطيه [ع] كرر بعدها «موضوعا على خط» [ش] / الذي: التي و [خ] التي [ر] / مركزه: مركز [ذ، ط] مركزه عند [ک، ل] / و: ر [و] / ونقيم: ونقسم [و] / عن: على [ج، ح] / فصلاهما: فصلاهما [ب، د، ذ، ش، ط] – 8 مع: معه [ز] / فصل: فضل [ب، د، ش] / لخط: فخط [ض] / و د ونجعل: مكررة [ي] / هذين: بهذين [ف] / مماسين: مما سبق [م] – 9 للقطب: للقطر [ذ، ع، ط]، وهي مكررة في [ع] / في: ناقصة [و] / الشظية: كرر بعدها «الذي عند و قطبا يكون مركزه نقطة و ونقيم» وأشار إليها [م] / ليكون: فيكون [ذ، ع، ط] / إذا: اذ [ي] / أديرت: مرت [ت] / ه ح: ه ح [ح، ل] / ه ج: ه و [ا، ت، ب، ث، ج، ح، د، ذ، ر، ز، ش، ص، ض، ع، ط، ف، ل، ک، ن، م، ه، و، ي] وه [س] و [خ] – 10 الثابت: الثان [خ] / بقي: فبقي [ض، و] رفي [خ] / وبقي: ونفى [و] وهي [ع، ط] / مركز: مركزها [خ] / القطب: قطب [ع، ط] لقطب [خ] / لازمًا: لانها [ا] لان ما [ي] / لخط: بخط [خ] / وخرج: وخرج من [ف] / طرف: ظرف [ث] – 11 عن: صغر [خ] / متباعدًا: مباعدا [ب، ح، ص، ش، ض، ل، ک، ن، و] مساعدا [س] / عنها: عنها [ج، ز، ط] / وبين: و [س] – 12 ظهر: ظهره [ر] / ج ح: ه ح [ب، ش] / وتجرى: ويجرى [ر] / ابتداء: اشداء [ط] – 13 م ... نقطة: ناقصة [ج، ت] / ومنتهاها: ومنها [ض، ل، ک، ن، و] / ص كيما: مركز [ع] مركبها [ط] ص كما [ض] / مثل طول الشظية: ناقصة [خ، ي] / المركبة: المركزه [و] – 12-13 من ... الشظية (الأولى): ناقصة [س] – 14 ه و: ه [ج، ط] ه و ر [ي] و [ذ، خ] / ونجعل: نجعل [ي] / الذي: التي [ب، ش، ص] ناقصة [خ] / ونحتال: ونحيال [ذ، ط] / الحيلة: الحيل [م] / وصفنا: وضعنا [ذ، ط، ک، ل، و].

ليكون إذا أديرت / أضلاع مربع هـ ح / الثلاثة على / ضلع هـ جـ الثابت، تحرّك مركز هذا م – ٣١
القطب على خط م ك ودنا طرف هذه الشظية من نقطة ك. ثم نثبت في الشظية المركبة على ي – ٦٧ – و ت – ٢٩٧
مسطرة هـ و في طرفها / الذي عند نقطة هـ شظية أخرى على زاوية قائمة منها تتحرك معها، ونجعل د – ١٥٢ – و
هذه الشظية تنتهي إلى الشظية المركبة على مسطرة جـ ح وتقطعها كيما إذا أديرت أضلاع مربع هـ ح الثلاثة على ضلع هـ جـ الثابت دائمًا، وجب أن تكون هذه الشظية الوسطى بين الشظيتين لا محالة تقطع الشظية المركبة على مسطرة جـ ح عند طرفها./

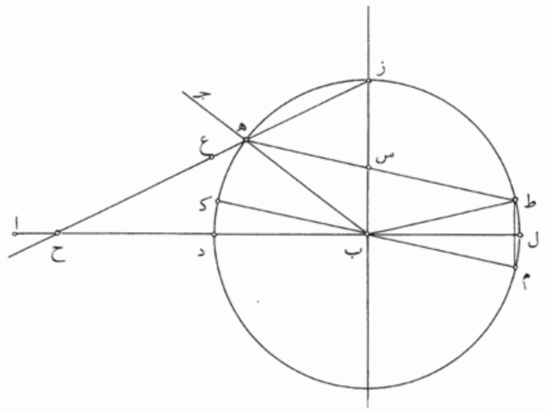
وبالبرهان الذي قدمنا في الخطوط في هذا الشكل يُعلم أن المساطر والشظايا التي تجري عليها ف – ١٣٦ – و
إذا أُثبتت في هذا الموضع الذي انتهت فيه الشظية الوسطى إلى طرف الشظية المركبة على مسطرة جـ ح، فقد تم ما أردنا أن نعمل./ نهاية ز – ٥٣ – و

– **يح** – لنا أن نقسم بهذه الحيلة أي زاوية شئنا بثلاثة أقسام متساوية.

فلتكن الزاوية ا ب جـ، ولتكن أولاً أقل من قائمة. ونأخذ من خطي ب ا ب جـ مقداري ع – ٨٩ – و
ب د ب هـ / متساويين./ ونرسم / على مركز ب وببعدهما دائرة د هـ ل، ونخرج د ب إلى ل، ض – ٨١ – و ذ – ٣٨٧ – ظ
ونقيم ب ز / عمودًا على ل د، ونصل / هـ ز ونخرجه إلى ح لا إلى غاية، ونفصل من ز ح ز ع مثل ر – ٥٣
نصف قطر / الدائرة. فإذا توهمنا أن ز ح يتحرك إلى ناحية / نقطة ل ونقطةَ ز لازمة للمحيط في ل – ١٤ – و ث – ١٨٣ – و ك – ٢٢٦ – ظ

1 أديرت: ادير [ي] / هـ ح: هـ [ع] / تحرك: يتحرك [ت، ر] يتحرك من [جـ] – 2 نثبت: ثبت [و] / الشظية: شظية [و] – 2-4 المركبة ... الشظية (الأولى): ناقصة [خ] – 3 هـ و: و [ث] / طرفها: طرفها [ز] / نقطة: فوق السطر [د] / هـ: د [ذ، ع، ط] / زاوية: زوايا [ب، ش، ل، ک، ص، ض، ن، و] / تتحرك: يتحرك [ا، ر، س] بتحرك [و] – 3-4 ونجعل هذه الشظية: ناقصة [ز] – 4 تنتهي: ينتهى [ل، ر، س] / تنتهي إلى الشظية: ناقصة [جـ، ت] / وتقطعها: وتقطها [ث] / كيما: كما [ض] / إذا: أثبتها في الهامش [ف] / أديرت: فراغ [ذ] – 5 الثلاثة: المثلثة [ث] ناقصة [س] / هـ جـ: هـ وجـ [ا، ب، ث، جـ، ح، خ، د، ذ، ر، ز، ش، ض، ع، ط، ف، ل، ک، ن، و، ي، هـ] ح [ص] هـ رح [ت، م] هـ وح [س] / الثابت: الثانيه [خ] / دائمًا: وانما [خ، ط] / أن تكون هذه: فراغ [ذ] / الشظيتين: الوسطين [ذ، ط] الشظيتى [خ] السطين [ي] – 5-6 الوسطى ... الشظية: ناقصة [ع] – 6 محالة: محـ [ت] / تقطع: لقطع [س] / المركبة على مسطرة: فراغ [ذ] / على: ناقصة [م] / جـ ح: ص هـ ح [خ] / طرفها: طرفها [ز] – 7 في (الثانية): ناقصة [ع] / في ... أن: فراغ [ذ] / هذا: هذه [ا] / يعلم: ناقصة [هـ] / المساطر: المساطره [ع] المسطرة [ا، ف، م] المسطر [خ، ز، ي] / والشظايا: والشظان [ط] – 8 إذا: اذ [ا] / أثبتت: أثبت [ا، ب، جـ، ح، د، ر، ز، س، ش، ف، ل، ک، ن، ع، ط، هـ، و، ي] يثبت [ث، خ] / أثبتت ... انتهت: فراغ [ذ] / الذي: التي [ا] / انتهت: اثبت [و] / الوسطى: لوسطى [ث] / طرف: الطرف [ب، ش] – 9 فقد تم: فقديم [خ] / تم: تمر [ا] / أردنا: أردناه [ا، ب، ش، ل] / أن نعمل: ناقصة [ل] – 10 يح: ناقصة [خ، س، ش، ض، ع، ي] ٨٥، ونجد في الهامش «٨١» [ذ، ط] / لنا: ناقصة [خ] / نقسم: يقيم [خ، جـ] فراغ [ذ] / بهذه: بهذا [ر] / أي: ان [و] الى [ي] / بثلاثة: بقلة [ض، و، ل، ک، ن] ثلثة [س] – 11 فلتكن الزاوية ا ب جـ: ناقصة [ث] / فلتكن: وليكن [خ، ف، م] / قائمة: قائمتين [ع] / ب ا: ا ب [ذ، ع، ط] / ب جـ: ب [خ] / مقداري: مقدارين [ي] – 11-12 مقداري ب د ب هـ: أثبتها في الهامش [ب] ناقصة [ث] – 12 ب د: ب و [ذ، ع، ط] / متساويين: متساويتين [ذ، ط] مساوتين [خ] / ب وببعدهما: هـ د ببعدهما [ت] هـ وببعدهما [جـ، ر، س] / دائرة: ناقصة [ا، ب، ث، جـ، ح، ت، د، س، ش، ص، ض، ف، ل، ک، ن، م، هـ، و، ي] كتب تحت السطر «نصف دائرة» ثم ضرب على «نصف» بالقلم [ر] / د هـ ل: وهـ ل [ذ، ع، ط] – 13 ل د: د ل [د، هـ] / ونفصل: نفصل [ذ، ط] – 14 فإذا: واذا [خ] / ز ح: ز هـ [س] / نقطة: ناقصة [ي] / ونقطة: مكررة [ط] ناقصة [جـ] / ز: ناقصة [جـ] هـ [م] / لازمة: لال مه [ي].

حركتها وخطّ ز هـ ح في حركته/ لا يزال يمرّ على نقطة هـ من دائرة / د هـ ل، وتوهمنا نقطة ز لا تزال تتحرك حتى تصير نقطة ع على خط ب ز،/ وجب حينئذٍ أن تكون القوس التي بين الموضع الذي انتهت إليه نقطة ز وبين نقطة ل هي ثلث قوس د هـ. والزاوية/ التي توترها هذه القوس ثلث زاوية د ب هـ./ ط – ٢٦٧ – و / ب – ١٦٤ – ظ / س – ١٥ – ظ / ا – ١٠٤ – و



برهانه: ليكن الموضع الذي انتهت إليه ز نقطة ط، ونخرج ط هـ يقطع / ب ز على س، فخط ط س مساوٍ لنصف قطر الدائرة لكونه مساويًا لـ ز ع. ونخرج من المركز قطرًا يوازي ط هـ وهو م ب ك. ونخرج م ط، فـ ط س مساوٍ وموازٍ لـ م ب،/ وم ط / موازٍ ومساوٍ / لـ ب س، وب س عمود على ل د، فـ م ط عمود على ل د، ولذلك يكون منصفًا بالقطر، ويكون م ل مثل ل ط ود ك مثل م ل / وم ط مساوٍ لـ ك هـ فـ د ك مثل نصف ك هـ و‹مثل› ثلث د هـ، وزاوية ك ب د ثلث زاوية ا ب ج؛ وذلك ما أردناه. خ – ١٩٣ – ظ / ت – ٢٩٨ / ن – ١٢٢ – ظ / ش – ١٧١ – ظ / و – ١٧٢ – ظ / ذ – ٣٨٨ – و

1 ز هـ ح: وهـ ح [ت] رح [جـ] / في: ناقصة [ي] / يمرّ: بمركز [ذ، ع، ط] – 2 تزال: يزال [ر، س، ا، ل] / تتحرك: يتحرك [ا، ر، س، ل] / تصير: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «وعند وصول ع إلى ب ز لا يصل ط إلى ل (ناقصة [ا]) وإلا (ولا [ا]) يلزم وجود قائمتين في مثلث ل ب س (لنسه [ب، ش])» / حينئذ: ح [ت] – 3 ز وبين نقطة: ناقصة [ح] / د هـ: ب د هـ [ت] / والزاوية: فالزاوية [ذ، ع، ط، م] / توترها: توتر [جـ، ت] يوتر [س] / هذه: هذا [خ] – 3-4 التي ... زاوية: ناقصة [ث] – 4 د ب هـ: ب هـ [ع] – 5 برهانه: ناقصة [س] / ليكن: لكن [ذ، ع، ط] / ز: ناقصة [جـ] / ط هـ: حـ هـ [ت] / يقطع: بقطع [س] / ب ز: جـ ز [ت] دائرة سر [خ] / س: د [ت] – 6 مساوٍ: نجد في هامش [ا، ب، د، ش، ص، هـ] التعليق التالي «ل ب د غير موازٍ لـ ط هـ وإلا (ولا [ا]) يلزم أن يكون ط هـ مساويًا (ناقصة [ا]) للقطر»/ لكونه: لكونها [خ] / لـ ز ع: لـ ز ح [ض] / ونخرج: ويخرج [س] – 7 فـ ط س: بـ ط س [م] وط س [و] / وموازٍ: مواز [ب، س، ش] / لـ م ب: لـ ب [خ] لـ م ن [ذ] / وم ط: وب ط [ع، ط] / ومساوٍ: مساو [ث] – 7-8 لـ ب س وب س: قد تقرأ «لنسبة ب» [ذ] – 8 وب س: وس [خ] وب د [ت] / ل د: د ل د [خ] ل ط ل د [ي] / عمود: ناقصة [جـ، ت] / ل د: د ل [جـ، ت] / فـ م ط عمود على ل د: ناقصة [ث] / فـ م ط: لـ م ط [ي] / عمود: ناقصة [ي] / ولذلك: وكذلك [ح، م] / يكون: ناقصة [خ] / بالقطر: بالقطب [ث] / م ل: ول [ض، ل، ك، ن] بل [م] هـ ل [خ] – 9 وم ط: وم ل [ب، ش] رفقط [ي] كتب تحتها «قوس» [ر] / لـ ك هـ: لقوس ك هـ [ر] لـ د هـ [خ] / فـ د ك: م د ك [خ] / ك هـ: د هـ [خ، م] / د هـ: ر هـ [م] ك هـ [ث] / وزاوية: فزاوية [خ].

فتحرك بالحيلة المذكورة زح على أن يتحرك زَ على المحيط لا يفارقه ولا يزال يمرّ خط زح / في ج – ٤٧ – ظ
حركته على نقطة هـ حتى / تقع نقطة ع على خط ب ز / ويتم المطلوب. ي – ٦٧ – ظ
وإن كانت الزاوية منفرجة نصفناها وثلثنا النصف فيكون ثلثاه ثلث المنفرجة./ ذ – ٣٩١ – و / ح – ٨٩ – ظ
ينبغي لنا / أن نَصِفَ بعد ذلك تقريب ضلع المكعب ليُنطَق به / عند الحاجة./ ونعمل في م – ٣٢
ذلك بالوجه الذي لا تقريب أبلغ منه،/ أعني إذا أردنا / أن يكون بينه وبين الحقيقة مثلاً أقل من ل – ١٤ – ظ / ص – ١٣٧
دقيقة أو من ثانية، قدرنا عليه. والعمل فيه أن نصيّر المكعب إلى أجزائها: ثوالث أو سوادس أو ع – ٨٩ – ظ / ر – ٥٤
تواسع أو غير ذلك. ثم نطلب // مكعبًا مساويًا / لذلك العدد إن كان، وإلا طلبنا أقرب مكعب ط – ٢٦٧ – ظ
إليه وإذا وجدناه حفظنا ضلعه./ فإن كانت الأجزاء ثوالث فهو دقائق وإن كانت سوادس فهو ك – ٢٢٧ – و / ض – ٨١ – ظ
ثوانٍ، وعلى هذا القياس أمر المسائل. ف – ١٣٦ – ظ

وكل ما وصفنا في كتابنا فإنه من عملنا، إلا معرفة المحيط من القطر فإنه من عمل أرشميدس، وإلا معرفة وضع مقدارين بين مقدارين لتتوالى على نسبة واحدة فإنه من عمل مانالاوس كما مرّ ذكره.

تمّ الكتاب. /

1 بالحيلة المذكورة: فراغ [ذ] / زح: دح [ت] / زَ: ب د [ا] ناقصة [ذ، ع، ط] / يمر: ولا يمر [ل، ك] / يمر خط زح في: فراغ [ذ] / زح: وح [ث] – 2 هـ: ح [ت] / تقع: يقطع [جـ] / على: ناقصة [ذ] / خط: ناقصة [ا، ف] / ويتم: ويتمم [ط] / المطلوب: المط [ع] / ويتم المطلوب: ناقصة [ذ] – 3 وثلثنا: وثلث [ذ، ط] وبلنا [ت، ض، ل، ع، م، ي] وبلناها [خ] ثلثنا [ب، ش] / النصف: اليه ونخرج من [جـ] / ثلث: مثلث [ذ] – 4 ينبغي: وينبغي [خ، ي] / لنا: لها [ض] / أن: ناقصة [و] / نصف: ننصف [ت] ناقصة [و] / لينطق: لينظر [ض، ل، ك، و] / به: ناقصة [خ] / الحاجة: الخارج [و] / في: ناقصة [ع، م] – 5 بالوجه: الوحه [ث] / أبلغ: بلغ [خ] / بينه: سب [و] / مثلاً: مثل [ت] – 6 أو: و [و، س] / من: ناقصة [ب، ت، ث، جـ، خ، د، ر، ش، ف، م، ي] / ثانية: ثابتة [ب، ش] / قدرنا: قدر [س] / والعمل: وعمل [و] / نصير: يصير [ل، ك] / المكعب: الكعب [ط] / أجزائها: أجزائه [ب، ش] / سوادس: سواد [خ] / أو: ناقصة [خ] الى غير، ثم أثبت الصواب في الهامش [ت] – 7 نطلب: يطلب [ا، ل] نصلب [و] / مساويًا: متساويًا [خ] / العدد: الفرد [م] / وإلا: توالا [م] / مكعب: مكعبا [خ] – 8 وإذا: فاذا [ث، ذ، ع، ط، ك، م] / حفظنا: حفضنا [ث] / الأجزاء: لأجزاء [ص] / دقائق: ناقصة [جـ، ت] أثبتها فوق السطر [ر] / كانت: ناقصة [ذ، ع، ط] – 9 ثوانٍ: ثوانى [ر، ع، ط، ف] – 10 وكل ما: وكلما [ر، ل، ك] / وصفنا: وصفناه [ش] وضعنا [خ، ط، ل، ك، و] وصنا [ي] حفصنا [ث] / المحيط: المجسطي [ف] – 11 بين مقدارين: ناقصة [ا، ث، جـ، خ، ذ، ر، ع، ط، ي] أثبتها في الهامش مع «ظ» فوقها [ت] / لتتوالى: لتوالى [ر، ش] / نسبة: النسبة [ع] / مانالاوس: مالاناوس، ثم أثبت الصواب في الهامش [ذ، ط] منالاوس، ثم أثبت الصواب في الهامش [جـ] منالاوس [ح، س] ناقصة [ح] / مرّ: ناقصة [ر، ح] – 12 ذكره: ناقصة [ح] ذكر [خ] كرة [ا]؛ نجد بعدها «والحمد لله وحده» [جـ، ت، س] «والحمد لله» [ر] – 13 تم: تمت [ا، جـ، س، ل] ناقصة [ر، هـ] / الكتاب: ناقصة [ر، س، ل، هـ] نجد بعدها «بعون الملك الوهاب» [ت، ل]؛ «بعون الله الملك الوهاب» [و، م]؛ «بفضل اللّه ومنّة» [جـ]؛ «بعونه م م م» [ع]؛ «فرغ منه المصنف رب برح حنح الهجري» [ط] فرغ منه المصنف في سنة ١١٩٦ [ذ]؛ «بعون اللّه تعالى» [ش، ص، ض، ن]؛ «بعون اللّه تعالى وحسن توفيقه» [ك]؛ «وفرغ المصنف منه رب ترح خنج» [ف] «فرغ المصنف من تصنيفه ر ب برح حنحـ» [هـ]؛ «وفرغ المصنف رحمه الله منه في رب برح حنح م م» [ي]؛ «بحمد الله ومنة والصلوة على نبيه محمد وآله» [م]؛ «بعون الله تعالى قد ختم تحرير هذا الكتاب عبد الرحمن بن محمود المفتقر إلى مغفرة الودود في اليوم الثالث عشر من شهر ربيع الآخر من شهور سنة أربع عشر وتسعمائة» [ب]؛ «على يدي صاحبه عبد الله الفقير إليه عبد الكافي عبد المجيد بن عبد الله التبريزي في قرية قريبة من شهرزور في ليلة الاثنين التاسع عشر من جمادى الآخرة سنة سبع وسبعين وستمائة وفرغ المصنف من تحريره رب برح خنح [د]؛ «وفرغ المصنف رحمه الله منه في رب ب رح جنح تم تم تم» [خ]؛ «والحمد لله بقدر استحقاقه على نعمه» [ث].

برهان آخر على الشكل السابع من كتاب بني موسى، وهو الطريق العام لمساحة المثلثات، أظنّه للخازن وهو هذا: خ – ١٩٤ – و

كل مثلث إذا ضرب نصف مجموع أضلاعه في فضله على أحدها ثم في فضله على الضلع الثاني ثم في فضله على الضلع الثالث ونؤخذ جذر المبلغ، فيكون تكسير المثلث.

برهانه: ليكن المثلث ا ب جـ، ونعمل فيه دائرة د هـ ز على مركز ح، ونصل بين المركز وبين نقط التماس بخطوط ح د ح هـ ح ز، فتكون أعمدة على الأضلاع متساوية، ويكون جـ هـ جـ د متساويين، وكذلك / ب ز ب هـ وكذلك ا د ا ز، ونخرج جـ ب ونجعل ب ط مثل ا د، فخط جـ ط مثل نصف الأضلاع، فـ ط ب فضله على ضلع ب جـ وب هـ فضله على ضلع ا جـ وهـ جـ فضله على ضلع ا ب. وحاصل/ الدعوى أن سطح ط جـ في ط ب في ب هـ في هـ جـ مساوٍ لمربع تكسير المثلث الذي هو سطح هـ ح في ط جـ، فنخرج من ب عمود ب ل على جـ ب ومن ح عمود ح ك على جـ ح،/ ونخرجهما إلى أن يتلاقيا على ل ونصل جـ ل. ولكون زاويتي جـ ح ل جـ ب ل قائمتين يقع ذو أربعة أضلاع جـ ح ب ل في دائرة،/ يكون قطرها جـ ل. ويكون لذلك زاويتا جـ ح ب جـ ل ب المتقابلتين كقائمتين. ولكن زاوية جـ ح ب مع زاوية ا ح د كقائمتين لأنهما نصفا الزوايا الستة المحيطة بنقطة ح التي هي كأربع قوائم، فيكون لذلك

و – ١٧٣ – و

ي – ٦٨ – و

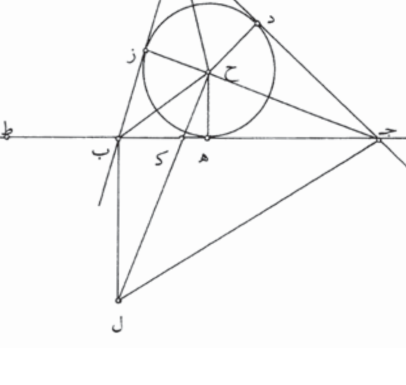
ز – ٣٦ – ظ

ا – ١٠٤ – ظ

أثبت هذا النصّ في الهامش بإزاء برهان زَ من كتاب بني موسى [ح] – 1 برهان: وبرهان [و] نجد قبلها «بسم الله الرحمن الرحيم» [ز] «بسم الله الرحمن الرحيم وبه نستعين» [خ] /على: عن [خ] أثبتها فوق السطر [ث] / السابع: قد تقرأ التاسع [هـ] ٧ [ي، خ] / وهو: هو [ث] – 3 أحدها: أحدهما [جـ، ز] اخدها [ي] / في: ناقصة [ح، خ] – 4 ثم: أثبتها فوق السطر [ز] / فيكون: يكون [ز] – 5 ليكن: ليكون [خ] / فيه: منه [خ، ي] / د هـ ز: هـ د ز [ح، خ، ف، م، ي] / ح: ج [ز] / ونصل: واصل [ز] / وبين: و [ز، م] بين [ي] – 6 نقط: نقطة [ا، ث، جـ، ز، ف، هـ، م، ي] / ح هـ: ح و [ا] / ح هـ ح ز: هـ ح ز [ز] / ح ز: ح ب [و] / أعمدة: اعمل [ي] / على الأضلاع: على الاوصلاع [ي] / جـ هـ: جـ د [م] / جـ د: جـ ب [و] جـ ر [ز، م] – 7 متساويين: متساوتين [و] / وكذلك: ناقصة [جـ، ي] فكذلك [خ] ولذلك [ث] / ب ز ب هـ: ناقصة [جـ، ي] ب د ب هـ [ث، ز، و] / وكذلك: ولذلك [ث] / ا ز: ا ب [ا] / ب ط: ب ك ط [خ] – 8 جـ ط: ح د ا [خ] / فـ ط ب: وط ب [ث، ح، جـ، ف، م، هـ، ي] قطب [خ] / ضلع: كتب بعدها «ا ب وحاصل الدعوى» ثم ضرب عليها بالقلم [ا] / ب جـ: كتب فوقها «ب ط» [ا] ا ب حـ [خ] / فضله: وفصله [م] / ضلع: ناقصة [ز] – 8-9 ب جـ ... ضلع: ناقصة [ف] / ا جـ ... ضلع: مكررة [م] – 9 وهـ جـ: هـ ح [خ] / فضله: ناقصة [خ] / وحاصل: وخاصل [و] / ط جـ: ط ب ح [خ] / هـ جـ: هـ ح [ي] – 10 سطح: ناقصة [جـ] / هـ ح: ح هـ [ث، خ، د، ز، ن، م، هـ، و، ي] / ط جـ: ط ب ح [خ] / ب: ناقصة [ز] / جـ ب: ب [ي] – 10-11 جـ ب ومن: ناقصة [خ] – 11 ح: ج [ز] / جـ ح: ص ح [خ] / ونخرجهما: ونخرجها [و] / ل: ل يكون [خ] / ونصل: ويصل [ز] / ونصل جـ ل: ناقصة [ي] / ولكون: وليكون [ث] / زاويتي: ناقصة [ث] – 12 جـ ح ل: ص ح ل [خ] / جـ ب ل: جـ ر ل [ث] – 13 جـ ح ب: ب ح [ي] / جـ ل ب: ل ب [ي] ص ح ب [خ] / كقائمتين: ناقصة [جـ] / ولكن: وليكن [هـ] / جـ ح ب: ص ب [خ] – 14 نصفا: نصف [ز] / الزوايا: الزاوية [هـ] الزويا [ز] الزواية [ح] / الستة: باليه [خ] / هي: ناقصة [د، ن، و] / لذلك: كذلك [ي].

زاوية ا ح د / مساوية/ لزاوية جـ ل ب. وكانت زاويتا جـ ب ل ح د ا قائمتين، فمثلث جـ ب ل يشبه مثلث ح د ا، فنسبة جـ ب إلى ا د، أعني ب ط، كنسبة ب ل إلى د ح، أعني هـ ح، بل كنسبة ب ك إلى ك هـ. وإذا ركبنا، كانت نسبة جـ ط إلى ط ب كنسبة ب هـ إلى هـ ك. وإذا صيرنا جـ ط ارتفاعًا مشتركًا للأولين وهـ جـ ارتفاعًا/ مشتركًا للأخيرين، كانت نسبة / مربع جـ ط إلى جـ ط في ط ب كنسبة ب هـ في هـ جـ إلى هـ ك في هـ جـ، أعني مربع هـ ح، وضرب مربع جـ ط الأول في مربع هـ ح الرابع كضرب جـ ط في ط ب في ب هـ في هـ جـ. ولأن نسبة مربع / جـ ط إلى ضرب جـ ط في هـ ح كنسبة ضرب جـ ط في هـ ح إلى مربع هـ ح، يكون ضرب جـ ط في هـ ح وسطًا في النسبة / بين مربعي جـ ط هـ ح ويكون لذلك ضرب مربع جـ ط في مربع هـ ح المساوي لضرب جـ ط في ط ب في ب هـ في هـ جـ مساويًا لمربع ضرب جـ ط في هـ ح الذي هو التكسير؛ وذلك ما أردناه.

د – ١٥٢ – ظ
ث – ١٨٣ – ظ
هـ – ٦٤ – ظ
م – ٣٣
ز – ٣٧ – و
خ – ١٩٤ – ظ



1 زاوية: ناقصة [جـ] / جـ ل ب: ح د ل ب ب [خ] / جـ ب ل: جـ ب ا [ز] / ح د ا: ح د [ي] – 2 يشبه مثلث: شبيه بمثلث [ح، خ، ف، م] نسبة مثلث [ث] / ح د ا: حـ د ا [م] / جـ ب: حـ ر [ا] / ب ط: ر ط [ي] / أعني هـ ح: ناقصة [م] – 3 ب ك: ر ك [ي] / هـ ك: ح ك [جـ] هـ ل ك [م] – 2-3 كنسبة ب ل ... ط ب: ناقصة [خ] – 4 صيرنا: ضرب ا [خ] / ارتفاعًا: ارتفاعه [هـ] / للأخيرين: كالاخيرين [ا] – 5 جـ ط (الثانية): حـ ك [ف] / في ط ب: أثبتها في الهامش [ف] / هـ جـ (الثانية): حـ ط [جـ] / هـ ح: هـ حـ [ث] – 7 كنسبة ... هـ ح (الثانية): ناقصة [جـ] / إلى مربع هـ ح: ناقصة [ا] – 8 مربعي: كتب فوق السطر «ضرب» [ا] مربع [خ] – 10 هـ ح: ط ح [خ] / التكسير: التكسير المثلث [و] / أردناه: كتب بعدها «تمت» [جـ، و] «تم» [ا] «م م م» [ي] «كتب في غرة رجب المرحب سنة خمس وأربعين وثمانمائة (؟) [ث] «تم تم تم» [خ].

الفصل الثاني

ثابت بن قرّة وأعماله في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر

٢ـ١ مقدّمة

٢ـ١ـ١ ثابت بن قرّة: من حرّان إلى بغداد

إنّ القليل مما نعرفه عن ثابت بن قرة مأخوذ خصوصاً من لمحات عن سِيَرِهم أوردها كتّاب السِّيَر، النديم[١] والقفطي[٢] وابن أبي أصيبعة[٣]. وهي ليست على نفس القدر من الأهميّة. فالسيرة التي أوردها النديم قيّمة نظراً إلى تاريخ كتابتها التي تعود إلى نهاية القرن العاشر الميلاديّ، إلّا أنـّها تعطينا القليل من المعلومات. لكن السيرة التي أوردها القِفطي تقدّم كل ما عُرِف لاحقاً عن ثابت بن قرّة، وذلك يعود إلى صدفةٍ سعيدة؛ فقد شاء حسن الحظ أن يحصل القفطي على أوراق صادرة عن عائلة ثابت، وهي تتعلق بأعماله أكثر ممّا تتحدّث عن حياته. ولقد اقتبس كتاب السِّيَر اللاحقون عن كتاب القِفطي، ومن بينهم ابن أبي أصيبعة على سبيل المثال. وحتى ابن العبري[٤]، الذي كان مطّلعاً، كما يبدو، على مصادر سريانيّة كبيرة في

---

[١] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجَدُّد (طهران، ١٩٧١)، الصفحة ٣٣١. من بين أعمال ثابت الرياضيّة، لا يذكر النديم سوى أربعة عناوين: "رسالة في الأعداد" (من المرجّح أنّها رسالة ثابت حول الأعداد المتحابَّة)، و"رسالة في استخراج المسائل الهندسية"، و"رسالة في الشكل القطاع"، وأخيراً "رسالة في الحجّة المنسوبة إلى سقراط".
يكتب النديم عن ثابت: " ومولده سنة إحدى وعشرين ومائتين وتوفي سنة ثمان وثمانين ومائتين". ويشير النديم أيضاً إلى العلاقة المميَّزة بين ثابت بن قرّة والخليفة المعتضِد.

[٢] القفطي، "تأريخ الحكماء"، تحقيق ليبّرت (*J. Lippert*) (ليبزغ، ١٩٠٣)، الصفحات ١١٥–١٢٢. هذا ما كتبه القفطي عن حياة ثابت بن قرّة : "أبو الحسن الصابئ من أهل حرّان، انتقل إلى مدينة بغداد واستوطنها وكان الغالب عليه الفلسفة. وكان في دولة المعتضد، وله كتب كثيرة في فنون من العلم كالمنطق والحساب والهندسة والتنجيم والهيئة، وله كتاب، مُدْخِل إلى كتاب أقليدس، عجيب، وكتاب مدخل إلى المنطق؛ وهو ترجم كتاب الأرثماطيقي واختصر كتاب حيلة البرء، وهو من المقدّمين في علمه؛ مولده في سنة إحدى وعشرين ومائتين بحرّان؛ وكان صيرفيّاً بها استصحبه محمّد بن موسى بن شاكر لمّا انصرف من بلاد الروم لأنه رآه فصيحاً. وقيل إنه قدِم على محمّد بن موسى فتعلّم في داره فوجب عليه حقه فوصله بالمعتضد وأدخله في جملة المنجِّمين. وهو أدخل رئاسة الصابئة إلى العراق فثبتت أحوالهم وعلت مراتبهم وبرعوا. وبلغ ثابت بن قرّة هذا مع المعتضد أجلّ المراتب وأعلى المناول حتى كان يجلس بحضرته في كلّ وقت ويحادثه طويلاً ويُقبل عليه دون وزرائه وخاصّته."، ص. ١١٥-١١٦.

[٣] ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، تحقيق مولر (*A. Müller*)، ثلاثة مجلّدات (القاهرة / كونيغسبرغ، ١٨٨٢–١٨٨٤)، المجلّد الأوّل، الصفحات ٢١٥، ٢٦–٢٢٠، ٢٩؛ نشرة ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥)، الصفحات ٢٩٥، ٦–٣٠٠، ٢٣.

[٤] ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق صالحاني، طبعة أولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ طُبع مجدّداً سنة ١٩٥٨، الصفحة ١٥٣. =

أهمّيّتها بخصوص المعلومات عن ثابت، لا يضيف شيئاً جوهريّاً إلى السيرة التي أوردها القفطي. فهل ينبغي علينا أن نكتفي بهذه الأخيرة؟ يبدو لنا أنّ قلّة الوثائق تفرض علينا مراجعتها كلّها، للمقابلة فيما بينها على الأقلّ.

ورغم ضآلة المعلومات التي تُقدِّمها روايات كتاب السِيَر، إلّا أنّها تحدّد، بخطوط عريضة، موقع ثابت بن قرّة في الوسط الذي عاش فيه، في إحدى الفترات الأكثر أهميّة في تاريخ الرياضيّات والعلوم، أي في النصف الثاني من القرن التاسع في بغداد. فهذه المدينة التي أصبحت المركز السياسي للعالَم في ذلك الحين، كانت أيضاً قلبه الثقافي، وبذلك كانت القطب الجاذب لكلّ المواهب. كان "الصعود إلى بغداد" كلمة السرّ عند الشُبّان الذين كانوا يريدون تأمين تحصيلٍ علميٍ رفيع، وذلك بفضل مدينة علميّة كان بناؤها قد تمّ وبفضل طائفة من العلماء كانوا قد استقرّوا فيها، ونسجوا روابطهم مع السلطة منذ زمن طويل. أمّا بالنسبة إلى الذين كانوا أقلَّ شباباً، فكان "الصعود إلى بغداد" يعني لقاء المنافسين واكتساب شهرة

= لقد وردت سيرة ثابت بن قرّة في كتب مختلفة دون أيّة إضافة جديدة. نستطيع أيضاً أن ننظر إلى كلٍّ من:

ابن كثير، "البداية والنهاية"، طبعة بولاق، أربعة عشر مجلداً (بيروت، ١٩٦٦)، المجلّد الحادي عشر، الصفحة ٨٥؛ والرواية هنا مأخوذة عن ابن خلكان.

ابن خلكان، "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عبّاس، ثمانية مجلّدات (بيروت، ١٩٧٨)، المجلد الأوّل، الصفحات ٣١٣– ٣١٥.

ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، تحقيق تورنبرغ (C.J. Tornberg)، إثنا عشر مجلداً (لايدن، ١٨٥١–١٨٧١)، المجلّد السابع (١٨٦٥)، الصفحة ٥١٠؛ أعيدت طباعته في ثلاثة عشر مجلداً (بيروت ١٩٦٥–١٩٦٧).

المسعودي، "مروج الذهب"، تحقيق باربييه دو مينار (C. Barbier de Meynard) وبافيه دو كورتاي (Pavet de Courteille)، أعاد قراءته وصحّحه شارل بيلاّ (Charles Pellat)، منشورات الجامعة اللبنانية، قسم الدراسات التاريخيّة XI (بيروت، ١٩٦٦)، المجلد الثاني، الفقرات ٨٣٥، ١٣٢٨، ١٣٨٢.

ابن الجَوْزي، "المنتظم في تاريخ الملوك والأمم"، عشرة مجلّدات (حيدر أباد، ١٣٥٧-١٩٣٨/٨٥-٤٠)، المجلد السادس، الصفحة ٢٩.

ابن جُلجُل، "طبقات الأطبّاء والحكماء"، تحقيق ف. سيِّد (F. Sayyid)، منشورات المعهد الفرنسي للآثار الشرقيّة في القاهرة. نصوص وترجمات لكتّاب شرقيين، ١٠ (القاهرة، ١٩٥٥)، الصفحة ٧٥.

النويري، "نهاية الأرب في فنون الأدب"، واحد وثلاثون مجلّداً (القاهرة، ١٩٢٣–١٩٩٣)، المجلّد الثاني، الصفحة ٣٥٩.

ابن العماد، "شذرات الذهب في أخبار مَن ذَهب"، طبعة بولاق، ثمانية مجلّدات (القاهرة، ١٣٥٠–١٣٥١ هـ)، (السنة ٢٨٨)، المجلد الثاني، الصفحات ١٩٦–١٩٨. يورد ما كتبه ابن خلكان.

الصفدي، "الوافي بالوفيات"، ظهر منه أربعة وعشرون مجلّداً (١٩٣١-١٩٩٣)؛ المجلّد العاشر (فيسبادن، ١٩٨٠)، تحقيق علي عمارة وجاكلين سوبليه (Jacqueline Sublet)، الصفحتان ٤٦٦- ٤٦٧.

الذهبي، "تاريخ الإسلام"، (السنوات ٢٨١–٢٩٠)، تحقيق عمر عبد السلام تدمري (بيروت، ١٩٨٩–١٩٩٣)، الصفحتان ١٣٧–١٣٨. النصّ مأخوذ عن ابن أبي أصيبعة.

السِجِستاني، "منتخب صِوان الحكمة"، النصّ العربي، مع مقدّمة وملاحظات. تحقيق دنلوب (D.M. Dunlop) (The Hague، باريس، ونيويورك، ١٩٧٩)، ص. ١٢٢–١٢٥:

Al- Sijistānī, *The Muntakhab Ṣiwān al-Hikma*, *Arabic text, Introduction and Indices, Edited by D.M. Dunlop* (The Hague, Paris, New York, 1979).

م. شتانشنايدر:

M. Steinschneider, «Thabit ("Thebit") ben Korra. Bibliographische Notiz», Zeitschrift für Mathematik u. Physik, XVIII, 4, (1873), pp. 331-338.

انظر أيضاً:

D. Chwolson, *Die Ssabier und der Ssabismus, vol. 1, St. Petersburg, 1856, reprint Amesterdam, 1965), pp. 546-567; E. Wiedemann, «Über Tābit ben Qurra, sein Leben und Wirken» in Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte (Hildesheim, 1970), vol. 2, pp. 548-578; R. Morelon, Thabit ibn Qurra: Œuvres d'astronomie: (Paris, 1987), pp. XI–XIX.*

وتأمين مهنة[٥]. ينبغي أن نضع، في هذا المشهد الذي تكاد أن ترتسم معالمُه، أحدَ الأحداث الحاسمة في حياة ثابت بن قرّة؛ وهو رحيلَه، عن حرّان الموجودة في أعالي بلاد ما بين النهرين، أيْ عن مدينته الأمّ وعن أحد أماكن الحضارة اليونانية الآفلة[٦]، إلى بغداد حيث أمضى ما تبقى من حياته.

ما هي الظروف الخاصّة التي جعلت ثابت يتخذ هذا القرار الذي حدّد مسار حياته؟ هنا يتدخَّل حدثٌ ثانٍ لم تكن تأثيراته أقلَّ شأناً في مصيره وفي عمله كعالِم. هذا الحدث هو لقاؤه مع محمد بن موسى، بِكر الإخوة الثلاثة بني موسى. يتفق جميع كتاب السِّيَر، ابتداءً من النديم، على الربط بين الحدثين: الخروج من حَرّان وهذا اللقاء. لقد التقى محمد بن موسى، بعد عودته من مهمّة للتفتيش عن مخطوطات في الأراضي البيزنطيّة، بثابت بن قرّة الذي كان في ذلك الحين مُجرَّدَ صرّاف، فأعجِب بقدراته اللغوية إلى درجة جعلته يقرّر أن يصطحبه معه إلى بغداد. إنَّ صحَّة هذه الرواية محتملة تماماً لعدّة أسباب، منها: إجماع كتاب السِيَر – وهَو لا يُشَكل بحدِّ ذاته حجّة حاسمة بالطبع – والعلاقات المميّزة التي أقامها ثابت على امتداد حياته مع بني موسى، ولا سيَّما مع الأخ الأكبر بينهم، وأخيراً حقيقة مواهبه اللغوية. إذ تكفي قراءة ترجماته وأعماله للاقتناع بأنّ هذا الرجل، الذي كانت لغته الأمّ السريانيّة، كان يتقن أيضاً العربيّة واليونانيّة. وربّما كان هناك سببٌ إضافيٌ ساهم في رحيله تمثّل في نزاعات مع أبناء طائفته أرغمته على ترك مدينته الأم. والشهادة الوحيدة باللغة العربيّة عن هذا الحدث يقدّمها كاتب سِيَرٍ متأخِّر هو ابن خلّكان[٧]، الذي يذكر هذه الخلافات، كما يذكر رحيله الاضطراريّ عن حرّان باتجاه ناحية قريبة هي كفر توثة، حيث حصل لقاؤه مع محمد بن موسى. ليس مهماً هنا أن تكون هذه النزاعات صحيحة أو من نسج خيال كتاب السِّيَر، إذ إنَّ رحيله إلى بغداد لا يتعلق بها البتّة، وإن ساعدتْ في حصول هذا الرحيل.

لا نعرف شيئاً حول تاريخ لقاء ثابت مع محمد بن موسى، ولا عن الوسطاء بين الرجلين أو الظروف الخاصّة بهذا اللقاء. لكنّنا نعرف أنّ ابن موسى قد تـُوفـِّيَ عام ٨٧٣ للميلاد، وأنّ

---

[٥] لكي نأخذ فكرة عن عدد العلماء الذين عملوا فقط في المجالات الأدبيّة والتاريخيّة والفقهيّة ...، راجع المؤلَّف: الخطيب البغدادي، "تاريخ بغداد"، تحقيق محمد أمين الخانجي، أربعة عشر مجلّداً (القاهرة، ١٩٣١)؛ أعيدت طباعته في بيروت مع نشر إضافي لمجلّد الفهارس: "فهارس تاريخ بغداد للخطيب البغدادي" (بيروت، ١٩٨٦). راجع أيضاً مقالة دوري (A. A. Duri)، «Baghdad»، الموسوعة الإسلامية، النشرة الثانية، المجلد الأوّل، ص. ٩٢١-٩٣٦.

[٦] يتبيَّن من وصف المسعودي في كتابه "مروج الذهب" أنّ آثار الحضارة اليونانية في حرّان حوالى القرن الثالث للهجرة هي دينيّة بشكل أساسي. انظر التحقيق الذي راجعه بيلّا (Ch. Pellat) المجلد الثاني، الفقرات ١٣٨٩–١٣٩٨، ص. ٣٩١–٣٩٦.

[٧] انظر ابن خلكان، "وفيات الأعيان"، المجلد الأوّل، الصفحة ٣١٣.

ثابتاً كان قبل ذلك التاريخ يهتم بتربية أولاد محمد بن موسى[8]. لذلك يُمكن القول، بصواب، إنّ ثابتاً، الذي وصل إلى بغداد بشكل مبكر نسبيّاً، قد عاش فيها على الأرجح ما لا يقلّ عن ثلاثين عاماً، لأنـّه توفـّيَ في عام ٩٠١ للميلاد.

وحول علاقات ثابت مع محمد بن موسى وإخوته، قدّم لنا كتاب السِّيَر القدامى تفاصيل ثمينة: لقد استقبل محمد في بيته، ابنَ قرّة عند وصوله إلى بغداد، حيث اهتم بتحصيله العلمي وبتأمين عمله، وهو أيضاً الذي أدخله في مجموعة علماء الفلك عند الخليفة. حول هذه النقطة يتّفق جميع كتاب السِّيَر القدامى. وحده عالم الفلك الشهير البيروني، وبعد قرن ونصف القرن من وفاة ثابت[9]، أثار شكوكاً حول الأدوار ضمن هذه المجموعة؛ وبإمكاننا القول، حول المراتب فيها: وفقاً للبيروني، كان ابنُ قرّة حجرَ الزاوية في مدرسة بني موسى. لكنـّنا نعرف أنّ البيروني، المأخوذ بالعدالة، لم يكن يحبّ بني موسى الذين ازدروا بها أحياناً. إضافة إلى ذلك، إنّ هذه الأدوار ليست متناقضة. فلا شيء يمنعنا من أنْ نتصوّر أنّ ثابتاً قد أصبح رئيس هذه المدرسة بعد وفاة محمد بن موسى، ولا سيّما أنّ الحسن بن موسى، عالم الهندسة النابغة، كان قد فارق الحياة، وأنّ أخاهما أحمداً بن موسى كان أكثر اهتماماً بالميكانيكا. لكن، لم يصل إلينا من ثابت بن قرّة، أيُّ شيء يوحي بمثل هذا الدور. وهو عندما يتكلّم على محمد والحسن، فإنـّه يفعل ذلك مع التقدير الواجب نحو الأخوين الأكبر سنّاً. ويكفي، بهذا الخصوص، أن نقرأ لاحقاً كيف يحدِّد موقعَه بالذات، بالنسبة إلى الحسن بن موسى، خلال البحث في مساحة السطح الجانبيّ للأسطوانة ومساحة القطوع الناقصة، وأن نقرأ أيضاً العبارات التي يذكر بها محمداً بن موسى عند حساب مواقع الكواكب لوضع الجداول الفلكيّة.

فإذا كان ثابت بن قرّة قد تجاوز بني موسى في البحث الرياضي والفلكي، فإنّ ذلك لا يناقض قطعاً الواقعَ، وهو أنـّه كان مديناً لهم بتكوينه العلمي. ولا توجد أيّة إشارة، وإن كانت ضعيفة، توحي بأنـّه تلقى أيَّ تحصيل علمي في مدينة حرّان مسقط رأسه، قبل أن يدخل إلى

[8] في لائحة كتابات ثابت التي ذكرها القفطي استناداً إلى أبي علي المحسن الصابئ، نقرأ: "وله عدّة مختصرات في النجوم والهندسة رأيتها بخطه وترجَمَتـُها بخطِّه ما عمله ثابت للفتيان، أبقاهم الله، وأظنه يعني أولاد محمّد بن موسى بن شاكر"، انظر "تأريخ الحكماء"، الصفحة ١٢٠.

[9] كتَب البيروني أنّ ثابت بن قرّة كان "صنيعة هؤلاء القوم(بني موسى) ومن بينهم ومن كان يُهذب لهم علومهم"، ورد ذلك في "الآثار الباقية عن القرون الخالية"، *Chronologie orientalischer Völker*، تحقيق ساشو (C. E. Sachau) (ليبزيغ، ١٩٢٣)، الصفحة ٥٢. نشير إلى أنّ البيروني، وهو رجل مُنصِف، لم يتردّد، لاحقاً، بالاعتراف بفضل بني موسى في رصدهم للقمر المتوسط وفي الدعوة إلى تفضيل نتائجهم على تلك التي تعود إلى العلماء السابقين (الصفحة ١٥١): "لبذلهم المجهود في إدراك الحق وتفردهم في عصرهم بالمهارة في عمل الرصد، والحذق به، ومشاهدة العلماء منهم ذلك ...".
بالمقابل، فإنه يأخذ عليهم في رسالته "الاستيعاب" موقفهم حيال الكِندي. وهذه القصّة حول موقف بني موسى من الكِندي شهيرة ولقد رويَت مراراً.

مدرسة بني موسى[١٠]. ولا نعرف له أيّة كتابة في الرياضيّات بالسريانيّة، لغته الأمّ. ولقد ذكر ابن العبري كتابين رياضيّين كتبهما ثابت بالسريانيّة، وأشار إليهما القفطي[١١]، كما أوردهما ابن أبي أصيبعة ضمن قائمة أعمال ثابت بالعربيّة؛ وهما يتناولان مصادرة أقليدس الخامسة، ولا شيء يسمح بالتأكيد أنّهما وُضعا أوّلاً بالسريانيّة. والترتيب المعاكس، أي الترجمة إلى السريانيّة، لم يكن ممكناً فحسب، بل غالباً ما كان متّبعاً في ذلك العصر.

كل هذه الأمور تُمكننا من تقديم الاستنتاج التالي: بعد وصوله إلى بغداد مع محمد بن موسى، انضمّ هذا الرجل النابغة إلى مدرسة بني موسى، ولم يلبث أن أصبح عضواً فاعلاً فيها. وتابع الطريق الذي فتحه الحسن بن موسى، وبالتحديد، الأعمال التي تدرس مساحات

[١٠] قد يكون على قدر كبير من الأهميّة، بالنسبة إلى تاريخ الفلسفة والرياضيّات والعلوم، أن نعرف بدقّة النشاطات في هذه الميادين، التي كانت تجري في حرّان في القرن الثامن، وبشكل خاص في القرن التاسع. ومن البديهي أنّ هذه المعرفة ضروريّة لأجل فهم أفضل لانتقال الإرث اليوناني إلى اللغة العربية، وكذلك لبدايات بعض الميادين العلميّة بهذه اللغة. ونظراً إلى غياب هذا النوع من المعلومات، غالباً ما يُقدَّم الاستنتاج قبل أن يبدأ البحث: يبدأ تعميم المعلومات المعروفة من القرون الأكثر تقدّماً، عن طريق استخدام ثابت بن قرّة، بالتحديد، كشاهد وكبرهان أساسي. عيب هذا المسار هو أنه يدور بشكل واضح في حلقة مفرغة: كان ينبغي، قبل كل شيء، تحديد ما يدين به ثابت للنشاطات العلميّة والفلسفيّة في حرّان خلال سنوات تحصيله العلمي. وعبثاً نبحث في سيرته أو في كتاباته عن أيِّ أثر أو أي إشارة يسمحان بافتراض مثل هذا التحصيل العلمي قبل لقائه مع بني موسى ووصوله إلى بغداد.

يبقى إذاً لدينا سؤالان دون جواب. هل كان هناك في حرّان في ذلك العصر هذا النوع من النشاط؟ هل كان هناك تعليم علمي وفلسفي، بشكل أو بآخَر، مختلف عن التعليم المخصّص وفق التقليد للدين وللعلوم الباطنيّة؟ هل كانت هناك في حَرّان مكتبات حقيقيّة، لا مجرّد أماكن لحفظ الكتب القديمة التي قد يكون الصابئة قد توقّفوا في ذلك العصر عن فهمها؟ إنّ الوضع الذي وصفه ابن وحشيّة لطائفة مماثلة، لم يعد أعضاؤها يفهمون كتب أجدادهم التي كانوا يحفظونها بورع وغيرة، لا يمكنه إلاّ أن يبرّر طرحنا لهذا السؤال ["الفلاحة النبطية"، مخطوطة إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٩٨٩، الورقتان ١ظ–٢ظ؛ تحقيق نقدي توفيق فهد، المجلد الأوّل (دمشق ١٩٩٣)]. لنعد إلى ثابت نفسه، حيث يقدّم لنا ابن العبري الثناء الذي صاغه ابن قرّة حيال حرّان والصابئة:" لقد اضطرّ الكثيرون أن ينقادوا للضلال خوفًا من العذاب .أمّا آباؤنا فقد احتملوا ما احتملوا بعونه تعالى ونجوا ببسالة .ولم تتدنس مدينة حرّان هذه المباركة بضلال الناصرة قطعاً .فنحن الوارثون والمورثون للصابئة المنتشرة في الدنيا .فالذي يحتمل برجاء وثيق أثقال الصابئة يُعدّ ذا حظ سعيد. ليت شعري من عمّر المسكونة وابتنى المدن أليس خيرة الصابئة وملوكهم؟ مَن أسّس المرافئ والأنهار؟ مَن شرح العلوم الغامضة؟ لمن تجلت الألوهية الملَقِّنة الكهانة والمعلِّمة المستقبلات ألا لمشاهير الصابئة؟ فهم الذين أوضحوا ذلك كله وكتبوا عن طبّ النفوس وخلاصها .ولقنوا كذلك طبّ الأجساد وأفعموا الدنيا أعمالاً صالحة وحكيمة هي دعامة الفضيلة .فلولا علوم الصابئة لأمست الدنيا قفراءَ فارغة متقلبة في العوز"، ص .٣٩-٤٨. ومن كلمات ثابت –وفقاً لابن العبري على الأقل– يبرز بوضوح أنّ الصابئة في عصره برعوا في التقنيّات والعلوم الباطنيّة والطبّ. لكن لا توجد أيّة إشارة إلى الرياضيّات والعلوم الرياضيّة. أمّا بالنسبة إلى الفلسفة، فالمسألة لا تتعدّى "طب الأرواح". لكن هذه الميادين بالتحديد هي التي أشار إليها المؤرّخون وكتّاب السِيَر القدامى. يذكر النديم، على سبيل المثال فيما يخصّ صناعة الإسطرلابات، أنّ هذه الحرفة كانت في البداية في حرّان قبل توسُّعها وانتشارها خلال حكم العباسيّين ("الفهرست"، الصفحة ٣٤٢). راجع أيضاً الحاشيّة اللاحقة. حول حرّان، انظر كتاب تمارا م. غرين، حيث نجد لائحة من المراجِع: Tamara M. Green, *The City of the Moon God*, Leiden, 1992.

[١١] تتضمّن لائحة كتابات ثابت، التي حققها ابن حفيده، وذكرها القفطي، تسعة عناوين بالسريانيّة. من جهة أخرى يذكر ابن العبري ثابتاً في كتابه بالسريانيّة، "تاريخ الزمان"، [ترجمه إلى العربيّة الأب إسحق أرملة (بيروت، ١٩٩١)، ص. ٤٨-٤٩]، وينسب إليه مائة وخمسين كتاباً بالعربية وستّ عشر كتاباً بالسريانية ويقول إنه قد قرأ أكبر قسم منها. تتضمّن لائحتا المؤلّفات بالسريانيّة سبعة عناوين مشتركة، وتقدّمان لنا إذاً طريقاً غير مباشر لنتبيّن ما كتبه ثابت بن قرّة بهذه اللغة، وبما قد يدين به تحصيله العلمي والفلسفي لمدينته حرّان.

من بين الكتب الستة عشر، هناك أحد عشر كتاباً مكرّساً للدين الصابيء وطقوسه وكتاب لتاريخ الملوك السريانيّين القدامى، أي الكلدانيّين، وآخر يتحدّث فيه عن أفراد عائلته المشهورين وعن سلالة أجداده، و"كتاب الموسيقى"، وأخيراً كتاب"في أنَّ الخطين المستقيمين إذا خرجا على أقلّ من زاويتين قائمتين التقيا في جهة خروجها وكتاب له آخر في مثل ذلك". إلاّ أنّ هذا العنوان الأخير (وهو يتضمّن كتابين) الذي ورد ذكره في "تاريخ الزمان" بالسريانيّة، نجده، بشكل حرفيّ تقريباً، على لائحة الكتابات العربيّة لثابت، التي قدّمها القفطي ["تأريخ الحكماء"، الصفحة ١١٦]، ثمّ ابن أبي أصيبعة ["عيون الأنباء"، تحقيق مولر (*Müller*)، المجلّد الأوّل، الصفحة ٢١٩، ٤، تحقيق ن. رضا، الصفحة ٢٩٩، ٣-٤]، بالإضافة إلى ذلك، أتت المخطوطة العربيّة لهذا النص، لحسن الخط، لتؤكّد عنوانه [مخطوطة اسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقتان ٥١و–٥٢و، ومخطوطة جار الله (Carullah) ١٥٠٢، الورقتان ١٣و–١٤ظ؛ باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق ١٥٦ظ-١٥٩ظ]. وهكذا يكون العنوانُ الوحيد الرياضيّ الوارد بالسريانيّة موجوداً أيضاً بالعربيّة. يمكننا إذاً أن نظنَّ أنه إذا وُجد فعلاً نصٌّ سريانيّ مقابلٌ للنصّ العربيّ، أنّ ثابتاً قد قام بنفسه بترجمة كتابته السريانيّة إلى العربيّة. لكن هذا غير مؤكد، إذ لا تظهر أيّة إشارة متعلّقة بالمصطلحات أو الأسلوب وبشكل أقل بالرياضيّات لتبرّر مثل هذا الظن. بالمقابل، فإنّ المسار المعاكس لم يكن ممكناً فحسب، بل كان ممارسة شائعة في ذلك العصر. أخيراً، لا ينبغي أن نستبعد فرضيّة الكتابة المتزامنة، المعقولة تماماً وغير المستبعدة من قِبَلِ عالم ثنائيّ اللغة بشكل كامل، في الفترة التي كان فيها منشغلاً بمراجعة ترجمة "الأصول". ولكي لا نتوه في خِضَمِّ التخمينات، نتمسّك باليقين الوحيد السلبيّ، وهو غياب الدليل الذي يبرهن أنه تلقّى أيّ تعليم علميّ في حرّان.

السطوح والمجسّمات المنحنية، وخصائص المخروطات. كما تعاون مع أحمد بن موسى، وترجم الكتب الثلاثة الأخيرة من "المخروطات"، وحافظ على صلة مستمرّة مع محمد فتابع بعضاً من أعماله في علم الفلك كما في الفلسفة. ويبدو أنّه لم يُحضِر معه من مسقط رأسه الشهير حرّان، سوى دينه ومعرفته باللغات وربما بالفلسفة؛ ولقد تعلّم الرياضيّات وعلم الفلك في بغداد.

كان ثابت بن قرّة إذاً، على غرار أهل مدينته، من الصابئة؛ ولم تذهب سدىً الحجج والتحايلات التي لجأ إليها الفقهاء ، فأدّت مساعيهم إلى اعتبار هذا الدين الهلينستي من "أديان أهل الكتاب"؛ وكان هذا الاعتبار الضمانة الوحيدة لممارسته بشكل حرّ في العالم الإسلامي. وهذا ما لم يكفل فقط لثابت القبول به كعضوٍ ينتمي إلى طائفة ثانويّة، بل أمَّن له الحصول على جميع الحقوق بما فيها حق السعي نحو المراكز الاجتماعيّة العليا وحقّ بلوغها. وحالته لم تكن الوحيدة، فقد وصل العديد من العلماء المتحدِّرين من الأقليات الدينيّة إلى المناصب الرفيعة. ويخبرنا جميع كتاب السِّيَر بمشاهد من حياته في البلاط، محاطاً برعاية الخليفة. ويبدو لنا أنّ هذه "الترقية" الاجتماعية لثابت، التي غالباً ما ترِدُ كطـُرفة، تستحقّ مزيداً من الاهتمام من قِبَل المؤرّخين: إنّها ليست ترقية استثنائية ولا عابرة، بل هي توضِح لنا الوضع الاجتماعي الذي كان بإمكان عالم في النصف الثاني من القرن التاسع أن يطمح إليه في عاصمة الإسلام، كما توضِح التقدير العالي الذي كانت توليه السلطة للإشعاع المعرفي.

كان ثابت بن قرّة شاهداً على المدينة المتميِّزة بغداد، وعلى قدرتها على الجذب في ذلك العصر. ولم يمنعه انتماؤه إلى أقليّة دينيّة من الوصول إلى أعلى الوظائف. كانت شخصيّة ثابت هذه، نموذجاً عن وسطها، لاعتبار ثالث: فهي تخبرنا عن تشكّل المدارس والتقاليد العلميّة. كان ثابت عضواً ناشطاً في مدرسة بني موسى، ومعلّماً لولدَيْ محمد بن موسى؛ وبعد وفاة محمد وأحمد والحسن، أمَّن الحياة لهذه المدرسة التي ضمّت فيما بعد أسرته وتلامذته. ولقد تابع أولادُ ثابت وأحفاده، ومن بينهم الرياضيّ إبراهيم بن سنان (بن ثابت)، وتلامذته مثل نعيم بن موسى الذي وجدنا أثراً له[١٢]، العملَ على امتداد ثلاثة أجيال على

[١٢] راجع دراستنا عن هذه الشخصيّة التي صدرت سنة ٢٠٠٤ ضمن الكتاب:
R. Rashed et C. Houzel : Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle, Le Recueil de propositions géométriques de Na'im ibn Mūsā, Peeters (Louvain, Paris, 2004)

الأقلّ. وما زال الوقت مبكراً لمعرفة تشعّبات هذه المدرسة وهذا التقليد؛ لكنَّ من الممكن استشفافَ ذلك من خلال ثابت بن قرّة.

هناك، أخيراً، سمة رابعة تسمح بإتمام صورة هذا الرياضيّ؛ وذلك أنـَّه كان أيضاً مترجماً. نحن نعرف العددَ الضخم من المؤلَّفات اليونانيّة التي نقلها إلى العربيّة. وقد تضمّنت هذه المؤلفات، بالإضافة إلى "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس، المقالات الثلاث الأخيرة من "مخروطات" أبلونيوس و"المدخل إلى عِلم العدد" لِنيقوماخوس الجيرازي. كما أنـَّه أجرى مراجعة لترجمات عديدة من بينها "الأصول" لأقليدس، و"المجسطي" لبطلميوس. ويكفي أن نذكر هذه العناوين لنقيس اتساع الميدان الذي كان يعمل فيه ثابت، ولنقتنع بالصلات الوثيقة بين البحث المُجدِّد والترجمة، وبالتزامن بين هاتين المُهمّتين، حيث ترتبط كل واحدة بالأخرى – ولطالما أكدنا هذه الأطروحة[١٣]. لكنَّ مثال ثابت هو أحسن دليل على ما قلناه، إذ إنّ المُهمّتيْن هذه المرّة ترتبطان بشخص واحد.

كان ثابت بن قرّة، وهو المترجم الموهوب وأحد الرياضيّين النوابغ في كل العصور، إحدى المنارات المُسَلَّم بها، ولم يُشككْ أحدٌ قطّ بأهميّة دوره خلال العصور اللاحقة. وتَشهد على ذلك شهرتـُه في الشرق وفي الغرب الإسلامي أيضاً، وكذلك ترجمة بعض كتاباته إلى اللاتينيّة وبعضها الآخر إلى العبريّة[١٤]. إن تجاهلنا ثابت بن قرّة في تاريخ الرياضيّات، وبالتحديد، في الميدان الذي نحن بصدده هنا، لن نفهمَ شيئاً مما حدث خلال القرنين اللاحقين.

لنعد الآن إلى ما كتبه كتاب السِّيَر القدامى للمناقشة في نقطتين خاصّتين: اسم ابن قرّة والتواريخ المتعلقة به.

---

[١٣] راجع مقالتنا:

«Problems of the transmission of the Greek scientific thought into Arabic: examples from mathematics and optics», History of Science, 27 (1989), pp. 199-209;

التي أعيد طبعها في كتابنا التالي:

Optique et mathématiques: Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe, Variorum Reprints (Aldershot, 1992), pp. 199–209.

[١٤] حول تأثيره في العلوم اللاتينيّة، انظر على سبيل المثال كارمودي:

F. J. Carmody, The astronomical works of Thābit b. Qurra, Berkeley / Los Angeles, 1960;

انظر أيضاً بيورنبو:

A. Björnbo, «Thābits Werk über den Transversalenstaz» ،Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin, 7, 1924;

انظر كذلك بوخنر:

F. Buchner, «Die Schrift über den Qarastûn von Thabit b. Qurra» ،Sitzungsberichte der physikalish-medizinischen Sozietät in Erlangen ،Bd 52-53. (1920/21), pp. 141-188.

يورد جميع كتاب السِّيَر اسمه بدون تغيير: ثابت بن قرّة، ويذكرون سلالته ابتداءً من الجدّ السادس. ويؤكد القفطي صحّة الوقائع استناداً إلى أوراق عائليّة استطاع الوصول إليها. فقد اطّلع على شهادة كتبها أبو علي المحسن بن إبراهيم بن هلال الصابئ، وهو ابن حفيد ثابت. ونعرف[١٥] أنّ والد أبي علي نسخ في عام ٩٨١ للميلاد مخطوطة كُتِبت بيد ثابِت؛ ويبدو أنّ هذا الفرع من العائلة هو الذي حفظ الأوراق العائليّة التي ذكرها القفطي. يكتب هذا الأخير في كتابه في عام ٦٤٧هـ/١٢٤٩م ما يلي:

"وأمّا أسماء مصنّفاته التي صنّفها، فقد وجدت أوراقاً بخطّ أبي عليّ المحسن بن إبراهيم بن هلال الصابئ تشتمل على ذكر نسب أبي الحسن ثابت بن قرّة بن مروان هذا، وعلى ذكر ما صنّفه من الكتب على استيفاء واستقصاء، فألحقتها تلو هذه لكونها حجّة في ذلك"[١٦].

لا تترك هذه الوثيقة الثمينة أيّ شك حول اسم ثابت أو حول كتاباته.

أمّا بالنسبة إلى تاريخ ميلاد ثابت، فنحن بعيدون عن اليقين. إذ يشير النديم إلى عام ٢٢١ هـ/ ٨٣٦م، ليؤكد فيما بعد أنّه توفي عن عمر يناهز سبعاً وسبعين سنة شمسيّة. لكن، إذا اعتمدنا هذا التاريخ، فإنّه لم يعش سوى خمسٍ وستين سنة شمسيّة، أو سبعٍ وستين سنة قمريّة، لأنّه توفّي يوم الخميس في السادس والعشرين من شهر صفر عام ٢٨٨ للهجرة، أي يوم الخميس في التاسع عشر من شباط من عام ٩٠١ للميلاد. ويأخذ القفطي بتاريخ الميلاد هذا غير مبالٍ بالتناقض. بالمقابل، يعتبر ابن أبي أصيبعة أنّه وُلِد يوم الخميس في الواحد والعشرين من شهر صفر عام ٢١١ للهجرة، أي في الأوّل من حزيران/يونيو عام ٨٢٦ للميلاد، وهو أيضاً يوم خميس. ويبدو تاريخ المولد هذا معقولاً، لأنّه بذلك يكون قد عاش سبعاً وسبعين سنة قمريّة، لا شمسيّة وفق ما يؤكده النديم. كما أنّ المفهرس اللاحق الصفدي[١٧]، يورد هذا التاريخ أيضاً.

[١٥] هذه المخطوطة، إسطنبول كوبرولو ٩٤٨ (*Köprülü*)، أشار إليها ريتّر (*H. Ritter*) وفق ما قاله غاربرز (*K. Garbers*):
Ein Werk Tābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren, Dissertation (Hamburg / Göttingen, 1936);
راجع أيضاً:
E. Bessel-Hagen, O. Spies, «Tābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbregelmässigen Vierzehnflächner», in Quellen und Studien zur Geschichte der Math. und Phys., B.1 (Berlin 1932), pp. 186-198;
R. Morelon, *Œuvres d'astronomie*, p. 301.

[١٦] القفطي، "تاريخ الحكماء"، الصفحة ١١٦.
[١٧] الصفدي، "الوافي بالوفيات"، المجلّد العاشر، الصفحتان ٤٦٦–٤٦٧.

٢-١-٢ كتابات ثابت بن قرّة في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر

إنّ النتاجَ الرياضي البحت لثابت بن قرّة، غير المرتبط مباشرة، لا بعلم الفلك الرياضي ولا بعلم السكون، ضخمٌ. وهو يشمل بالإضافة إلى الهندسة، الجبر الهندسي ونظريّة الأعداد[١٨]. ولقد ترك ثابت، في كلّ ميدان من الميادين الرياضيّة التي تناولها، آثاراً لا تُمحى. ومن بين أعماله، فإنّ كتاباته في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر هي التي تثير اهتمامنا هنا. في هذا الصدد، يجب أن يكون واضحاً أنّ هذه الكتابات متواجدة في كلّ نتاجه. وذلك أنـّه استخدم اللامتناهيات في الصغر ليدرس، في علم الفلك، مسألة «رؤية الأهلّة»[١٩]. وكذلك فعل في دراسته للمسألة التالية: "الحركة في فلك البروج وسرعتها وتوسّطها بحسب الموضع الذي يكون تحدث فيه من الفلك الخارج المركز"[٢٠]. وفي ميكانيكا السكون، طبّق ثابت أيضاً طرائق في اللامتناهيات في الصغر في كتابه "القرسطون"[٢١]. لكن إذا أردنا أن يقتصر بحثنا على كتاباته في هندسة اللامتناهيات في الصغر، فإننا لا نجد سوى ثلاثة أعمال وصلت إلينا جميعها لحسن الحظ.

لم يذكر كتاب السِّيَر القدامى سوى هذه العناوين الثلاثة، وهي: "في مساحة قطع المخروط الذي يُسَمَّى المكافئ"، "في مساحة المجسَّمات المكافئة"، و"كتاب في قطوع الأسطوانة وبسيطها". وهي التي ترد في اللائحة التي وضعها القفطي وفي المقالة التي خصّصها ابن أبي أصيبعة لثابت.

تتوافق شهادات كتاب السِّيَر هذه مع أقوال ثابت الذي يؤكد أنـّه لم يحدّد سوى مساحات وأحجام هذه الأشكال المنحنية فقط:

"أما من الأشكال المسطحة، فمثل الشكل الذي يشبه الدائرة وليس بدائرة، لأن طوله أكثر من عرضه، ويسمي القطع الناقص، وغيره من أشكال قطوع المخروط والأسطوانة، فإني قد أفردت مما وجدته

---

[١٨] من أجل رؤية عامّة، انظر المقالة:
B. A. Rosenfeld & A. T. Grigorian, «Thābit ibn Qurra», Dictionary of Scientific Biography, vol XIII (1976), pp. 288-295.

[١٩] انظر: *R. Morelon, Œuvres d'astronomie, pp. 93-112.*

[٢٠] المرجع السابق، الصفحتان ٦٨-٦٩.

[٢١] راجع فايدمن:
E.Wiedemann, «Die Schrift über den Qarastûn» ‹Bibliotheca Mathematica, 12.3 (1911-12), pp. 21-39;
حيث نجد ترجمة للنص العربي لكتاب ثابت. وهناك تحقيق لهذا النصّ تشوبه الأخطاء، مع ترجمة فرنسية، وضعهما خ. جاويش:
Kh. Jaouiche, Le livre du Qarastūn de Tābit ibn Qurra, Leiden, 1976.
انظر أيضاً كنور:
W. R. Knorr, « Ancient sciences of the medieval tradition of mechanics», in Supplemento agli annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, Fasc. 2 (Forence, 1982).

واستخرجته من ذلك كتباً بيّنت فيها، وأما الأشكال المجسّمة فمثل الأشكال التي تتولد من إدارة هذه"[٢٢].
وهي الأشكال التي عالجها في الكتب الثلاثة المشار إليها أعلاه.

أخيراً، تأتي الإحالات التي يقوم بها ثابت إلى كتاباته لتؤكد ما سبق ذكره . ففي كتابه "في مساحة المجسّمات المكافئة"، يذكر نصّاً ورد في كتابه "في مساحة القطع المكافئ"*، وفي كتاب آخر من الواضِح أنّه وُضع لاحقاً، يستشهد بالكتاب الثالث بهذه الكلمات: "وأمّا مساحة بسيط قطع الأسطوانة، فإني قد استخرجتها وبيّنت في كتابي الذي في قطوع الأسطوانة وبسيطها أنّ...."[٢٣]. ولم يُنسَب أيُّ عنوان آخر يتناول رياضيّات اللامتناهيات في الصغر إلى ثابت؛ كما لم يذكر ثابت أيّ كتاب آخر في هذا الميدان.

أورد كتّاب السِّيَر القدامى عنوانين لثابت، جعل أحدُهما البعضَ يظنّ بأنّ ثابتاً قد شارك في تحرير كتاب لبني موسى. وقد يتعلَّق الأمر بكتاب يحمل العنوان "في مساحة الأشكال المسطّحة والمجسّمة". ولا شك أنّ التشابه بين هذا العنوان وعنوان كتاب بني موسى قد يوحي بمثل هذا الظنّ. فضلاً عن ذلك، إذا ما تذكرنا الروابطَ التي كانت تجمع ثابتاً بهؤلاء، فإنّه يُصبِح من السهل الافتراض بأنّه شارك في هذا التحرير. لكنّنا، عند تفحُّص هذا الكتاب، نكتشف نصّاً بدون براهين، حيث يورد فيه المؤلِّف صيَغاً لتحديد مساحة أشكال مستوية مستقيمة أو منحنية، وكذلك لتحديد حجم بعض المجسّمات، كالمكعّب والكرة. ليس لهذا الكتاب، إذاً، أيّ شيء مشترك مع كتاب بني موسى، كما أنّه من غير المحتمَل أن يتناول مسائلَ في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر.

يبقى أخيراً عنوان منسوب إلى ثابت يُشكِّل لنا لغزاً، إذ لا يُمكننا أن نؤكّد شيئاً عنه، باستثناء أنّه يتناول مسائلَ في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، وهو كتابه "في مساحة قِطَع الخطوط". نشير أخيراً إلى المراسلة الفلسفيّة الشهيرة مع أبي موسى عيسى بن أسد، حيث يدافع ثابت عن مفهوم اللانهاية الفعلي، الذي سنعود إليه في مُجلّد لاحق من كتابنا هذا.

---

[٢٢] انظر: مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الورقة ٤٤ظ، "في مساحة الأشكال المسطحة والمجسمة"

* هنا وفي ما يتبع من هذا الكتاب نستخدم هذا العنوان المقتضَب، بدل العنوان الأصلي لرسالة ثابت الذي هو "في مساحة قطع المخروط الذي يُسَمّى المكافئ".

[٢٣] المرجع السابق، الورقة ٤٣ظ: "وأما مساحة بسيط قطع الأسطوانة فإني قد استخرجتها وبيّنت في كتابي الذي في قطوع الأسطوانة وبسيطها أنّ ..."

٢-١-٣ تاريخ النصوص وترجماتها

يتسِم تاريخَ التقليد المخطوطيّ، لنصوص ثابت بن قرّة المحققة هنا، بتناقض ظاهريّ إلى حدٍّ ما: فهو فقير في عدد مخطوطاته، إذ إنـّه لم يصل إلينا من كتابين تابعين لهذا التقليد، سوى نسخة وحيدة لكلٍّ منهما؛ وهو تاريخ مؤكد نسبيّاً، لأنَّ هاتين النسختين القديمتين للغاية تنتميان إلى مجموعات مخطوطيّة قيّمة. أمّا الكتاب "في مساحة القطع المكافئ"، فهو، وحده، الذي وصل إلينا في خمس نسخ من بينها النسختان اللتان سبق ذكرهما. لنتناول، على التوالي، كلَّ واحدٍ من هذه النصوص.

<u>"في مساحة القطع المكافئ"</u>

من كتاب ثابت بن قرّة هذا، توجَد لدينا خمس مخطوطات:

١- المخطوطة الأولى، المشار إليها هنا بالحرف A، تحتل الأوراق ٢٦ظ–٣٦ظ من مجموعة أيا صوفيا ٤٨٣٢، في المكتبة السليمانية في إسطنبول. وتتضمّن هذه المجموعة عدداً كبيراً من كتابات ثابت. وهي تنتمي إلى إرث السلطان الغازي محمود خان. وبالنسبة إلى تاريخ هذه المجموعة، نقرأ في الورقة ١ظ: "قيل إن هذا الكتاب كان لأبي علي الحسين بن عبد الله بن سينا". لا يمكن التحقق من هذا القول الذي قد يكون أسطورة، ولكنـّه يشهد على كلّ حال على المكانة التي كانت -وما زالت– تتمتع بها هذه المجموعة. وما يهمّنا هو ذِكْر اسم أحد مالكيها، المدعو ابن الحَمامي، الذي اشتراها "في التاسع عشر من رجب من السنة خمسمائة وثمانية وستين" للهجرة، أي في السادس من آذار من عام ١١٧٣ للميلاد. وهذا يعني أنّ المخطوطة تعود على أكثر تقدير إلى القرن السادس للهجرة، أو إلى ما قبل ذلك بقرن على أرجح الاحتمالات. كما نقرأ في الورقة ١ظ: "وذُكِر أنّ هذا الخط خطّ الشيخ الرئيس حجة الحق شرف الملك أبي علي الحسين عبد الله بن سينا رحمه اللـه". هذا القول، مثل القول الأوّل، لا يمكن التحقق منه (الملخَّص المقتضب في مخطوطة المكتبة الوطنيّة في باريس *BN* 2859، في الورقة الأولى، المكتوبة بخط ابن سينا لا تسمح البتّة بحسم المسألة)؛ ولكنـّه يُعبِّر عن الاعتقاد الراسخ بأنّ هذه المجموعة قديمة جداً. الكتابة بالخطّ النسخي المُتقن، الورق أملس مع احمرار خفيف وقياسه (٢١,٨×١١,٦)، أمّا قياس المساحة المخصّصة للنَصّ فهو (١٧,٩×٩,١). الأوراق

كلها من نفس الصنع. وقد ترك النسّاخ صفحاتٍ بيضاً، استخدم بعضَها فيما بعد نسّاخون آخرون، كالورقة ٥٧ المنسوخة في عام ٧٠٠ للهجرة. رُقِّمت الصفحات حديثاً. النصّ مكتوب بالحبر الأسود، في حين أنّ الأشكال مرسومة بعناية بالحبر الأحمر. الغلاف، مصنوع من الكرتون المقوّى، وظهره من الجلد البنّي وقد رُمِّم حديثاً. نصّ ابن قرّة مكتوب دون إضافات أو تعليقات. كلُّ الكتابات على الهوامش مكتوبة بيد النسّاخ نفسه، وهي كلمات أو جمل، قليلة العدد، سقطت سهواً خلال النسخ.

٢- المخطوطة الثانية، المشار إليها هنا بالحرف B، تشكل جزءاً من المجموعة ٢٤٥٧ من المكتبة الوطنيّة في باريس. يحتلّ نصّ "مساحة القطع المكافئ" الأوراق ١٢٢ظ–١٣٤ظ. وتقع هذه المخطوطة في ٢١٩ ورقة (قياسها ١٨×١٣,٥)[٢٤]. وقد كتب الهندسيّ أحمد بن عبد الجليل السجزي، الجزءَ الذي يهمّنا من هذه المجموعة، وأُنجزت النسخة في شيراز عام ٣٥٩هـ/ ٩٦٩م. وقد أحضر هذا المجلّد من القاهرة إلى باريس في بداية القرن التاسع عشر، المدعو رايش (*Reiche*) وهو تلميذ كوسّين دو بيرسوفال (*Caussin de Perceval*). راجع السجزي نسخته استناداً إلى النسخة التي نقل عنها. ونقرأ في الصفحة ١٣٢ظ كلمة "بلغ"، مع الإشارة ∴ على الهامش، وهي تشير إلى مرحلة من مراحل مراجعة السجزي. لا توجد لا إضافات ولا تعليقات مكتوبة بيد أخرى، وكلُّ الكتابات على الهامش هي كلمات أو جمل سقطت سهواً خلال النسخ. نُشير أخيراً إلى أنّ الكتابة أنجِزت بالخطّ النسخيّ، وأنّ الأشكال الهندسيّة مرسومة في المخطوطة.

٣- المخطوطة الثالثة، المشار إليها هنا بالحرف Q، تشكِّل جزءاً من المجموعة ٤٠ من دار الكتب في القاهرة. يحتل نصّ "في مساحة القطع المكافئ" الأوراق ١٦٥ظ–١٨١و. تقع هذه المخطوطة في ٢٢٦ ورقة وتعود إلى تاريخ حديث - القرن الثامن عشر- ولقد نسخها

---

[٢٤] وصف المخطوطة فاجدا:

G. Vajda, «Quelques notes sur le fonds de manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale de Paris», Rivista degli Studi Orientali, 25 (1950), 1 – 10, Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris, Publications de l'Institut de recherche et d'histoire des textes IV (Paris, 1953), p. 481.

مصطفى صدقي الذي صادفنا اسمه أكثر من مرّة[٢٥]. وأنجز نسخته في الثاني عشر من ذي القعدة عام ١١٥٩ للهجرة، أي في السادس والعشرين من تشرين الثاني عام ١٧٤٦م. الكتابة بالخطّ النسخي، والنسخة دون تعليقات أو إضافات، ولا شيء يشير إلى أنّ النسّاخ أجرى مراجعة لها استناداً إلى النسخة التي نقل عنها. وتضمُّ هذه المجموعة كتابات أخرى لثابت، والعديد من نصوص ابن سنان والقوهي.

٤- المخطوطة الرابعة، المشار إليها هنا بالحرف M، تشكّل جزءاً من المجموعة ٥٥٩٣ من مكتبة أستان قدس في مَشهد. تضمُّ هذه المجموعة ١٥٦ ورقة (قياسها ١٦,٥×٨)، وقد نسخت عام ٨٦٧ للهجرة، أي عام ١٤٦٢للميلاد. يحتل نصّ "في مساحة القطع المكافئ" الأوراق ٢٦–٤٢. الكتابة بخطّ النستعليق؛ ولقد تُرِكت للأشكال الهندسيّة فراغاتٌ بيْضٌ، لكنّها لم تُرسَم. لا توجد لا تعليقات ولا إضافات، ولا أيّة إشارة إلى مراجعة النسخة استناداً إلى النسخة التي نُقِل عنها.

٥- المخطوطة الخامسة، المشار إليها هنا بالحرف D، هي جزء من المجموعة ٥٦٤٨ في دمشق.

تُظهر مقابلة هذه المخطوطات فيما بينها أوّلاً أنّ مخطوطة دمشق، D، هي نسخة عن مخطوطة القاهرة، Q، وعنها فقط. لذلك لن نأخذ D بعين الاعتبار عند تحقيق النصّ. من جهة أخرى، تنتمي مخطوطة باريس، B، إلى تقليد مستقلّ عن التقاليد الأخرى. وفيها سقطت ١٩ جملة و ٩٠ كلمة؛ كذلك سقطت كلمة "عدد" ١٤ مرّة، وكلمة "خطّ" سبع مرّات، وكلمة "ضرب" مرّتين. وتقتصر الإغفالات المشتركة بين B و Q على كلمة "عدد" مرّة واحدة، وكلمة "خطّ" أيضاً مرّة واحدة، وهذا يعني أنّه لا توجد عمليّاً إغفالات مشتركة. وإحصاء الإغفالات يؤكّده إحصاء الأخطاء الآليّة التي تحصل أثناء النسخ، ويسمح باستنتاج أنّ B تنتمي إلى تقليد مختلف عن تقليد كلٍّ من A و Q.

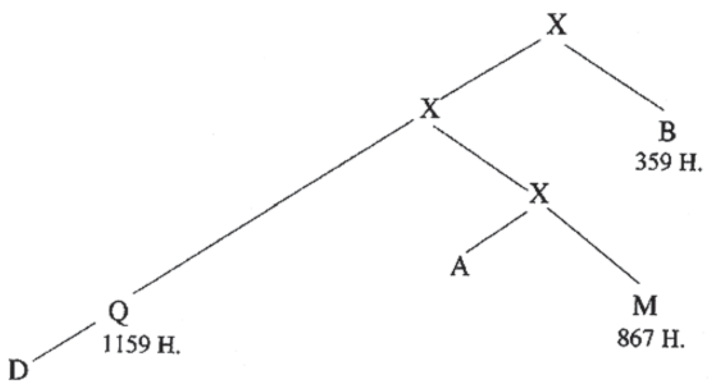
---

[٢٥] انظر ر. راشد،
R. Rashed, *Géométrie et dioptrique au X^e siècle. Ibn Sahl, al-Qūhī et Ibn al-Haytham,* (Paris, 1993), p. CXXXVI.

من جهة أخرى، كـُتبت المخطوطة M استناداً إلى نسخة سالفة للمخطوطة A، وذلك أنّ جميع الكلمات والعبارات التي أُغفلت في A أغفِلت أيضاً في M، باستثناء كلمتين: "إلى بعض"، ص. ٢٤٣، س.٢١، و"من" ص. ٢٦١، س.٥؛ ويُمكن أن يكون سياق النصّ قد أوحى تماماً لنسّاخ M بإضافتهما. بالمقابل، فإنّ بعض أخطاء القواعد الواردة في A هي غير موجودة في M، كما جرى في M تجنـّب بعض التكرارات الواردة في A. فضلاً عن ذلك، وبما أنّ الكتابة في M ليست متقنَة، فإنـّه من غير المحتمل أن تكون M خليفة للمخطوطة A. على أيّ حال لم نذكر اختلافات M إلّا بالنسبة إلى A.

إنَّ للمخطوطة Q سلفاً مشتركاً مع A. وهي تتضمّن الإغفالات التالية الخاصّة بها: جملة واحدة، خمس عشرة كلمة، كلمة "خطّ" مرّة واحدة، كلمة "ضرب" أربع مرّات، وكلمة "عدد" أربع مرّات. وتتضمّن بشكل مشترك مع A، الإغفالات التالية: عشر جمل، خمساً وأربعين كلمة، كلمة "ضرب" سبع مرّات، كلمة "عدد" ثلاث عشرة مرّة، وكلمة "خطّ" أربعاً وأربعين مرّة، في حين أنّ الإغفالات المشتركة مع B تكاد أن تكون معدومة. أخيراً، هناك جملة ص. ١٩١، س.٥، مغلوطة في A وفي Q، ولكن بشكل مختلف، ممّا يوحي بأنَّ سلف المخطوطتين المشترك كان يتضمّن جملة غامضة. نقرأ في A: "فعدد كـَ أكثر من عدد أصغر من اب"، في حين أنـّا نقرأ في Q، فيما يخص هذه الجملة عينها، "فعدد كـَ أكثر من جـَ وأصغر من عدد اب، فعدد كـَ أكثر من عدد أصغر من اب"، وقد شطب النسّاخ فيما بعد الجزء الثاني من الجملة وأبقى على: " فعدد كـَ أكثر من جـَ وأصغر من عدد اب". وهكذا يكون النسّاخ مصطفى صدقي قد حذف الجملة من A. ونحن نعلم أنّ هذا الأخير كان يفهم ما ينسخه وكان يفقه الرياضيّات.

تسمح نتائج جميع هذه المقارنات برسم شجرة التسلسل المخطوطي التالية:



وهكذا قمنا بتحقيق نصّ "في مساحة القطع المكافئ" استناداً إلى المخطوطات *A*، *B*، *Q*، وإلى *M* عند اختلاف هذه المخطوطة عن *A*. وهذا التحقيق نُقدِّمه هنا لأوّل مرّة. ونشير هنا إلى أنّ سوتر (*H.Suter*) قد ترجم إلى الألمانيّة، استناداً إلى المخطوطة *B*، بعض مقاطع فقط من نصّ ثابت هذا، ولكن بتصرّف، أي دون أن ينقل حرفيّاً نصّ ثابت. هذا العمل المؤقت (وهو بالأحرى موجز للنصّ، مع بعض المقاطع المترجَمة بتصرّف) كان مع ذلك مفيداً للغاية: فقد استطاع أن ينقل إلى مؤرّخي الرياضيّات محتوى كتاب ثابت هذا[٢٦].

<u>"مساحة المجسّمات المكافئة"</u>

المخطوطة الوحيدة لهذا النصّ توجد ضمن المجموعة ٢٤٥٧، في مكتبة باريس الوطنيّة، التي نُسخت في عام ٣٥٨هـ/ ٩٦٩م، ويحتل النصُّ الأوراق ٩٥ظ–١٢٢و. وقد حصل حادث مهمّ خلال النسخ، لم يجرِ التنبُّه إليه حتى الآن: فقد كرّر السجزي ثلاث ورقات، من ١١٠ظ إلى ١١٣وجه. وقد أشرنا إلى هذا المقطع بالحرف م، الحرف الأوّل من كلمة مكرّر. وهذا الحادث الغريب يقدّم لنا عن هذا المقطع نسخة ثانية تسمح لنا بتقدير دقة السجزي كنسّاخ: بالنسبة إلى المقطع م نحصي في المخطوطة *B* إغفالاً واحداً (جملة واحدة، ص. ٣٨٧، س. ١٦-١٧) وتكراراً واحداً (جملة وكلمة)؛ وخمسة أخطاء. أخيراً يُجرى السجزي في *B* تصحيحاً (ص. ٣٨٩، س. ١٢) لا يقوم به في م. وبالعكس، فإنّ الإغفالات في م بالنسبة إلى *B* هي جملة صغيرة ("ومثلاً عدد جـد"، ص. ٣٨٥، س. ١٥) وجملة أخرى (ص.٣٩١،

---

[٢٦] انظر سوتر:

H. Suter, «Über die Ausmessung der Parabel Von Thâbit b. Kurra al-Harrânî», *Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen*, 48, (1916), pp. 65-68.

تُرجم هذا النص إلى الروسيّة على يد ج. الدبّاغ وب. روزنفيلد (*B.* Rosen feld)، انطلاقاً من المخطوطة *B*. راجع ثابت بن قرّة، *Matematitcheskie traktaty* (بالروسيّة)، *Coll. Nautchnoie Nasledstvo*، المجلد الثامن (موسكو، ١٩٨٤).

س. ١٦-١٧) وكلمة $\overline{\text{ا ب}}$. أمّا التكرارت فهي أربع جمل في م (ص. ٣٨٧، س. ١٣؛ ص. ٣٨٩، س. ١٠ - ١١، ص. ٣٩١، س. ٥ – ٧؛ ص. ٣٩٧، س. ١٦). إنَّ لهذه المقارنة الفضل في طمأنتنا، إذ إنّها تُظهِر الرياضي السجزي في دوره كنسّاخ حقيقيّ لا يرتكب، في النتيجة، سوى عدد محدود من الأخطاء. وما قلناه بصدد السجزي بالنسبة إلى كتاب "في مساحة القطع المكافئ" يبقى صحيحاً بشكل حرفي فيما يتعلّق بكتاب "في مساحة المجسّمات المكافئة".

ونعطي هنا أيضاً لأوَّل مرّة، تحقيقاً لهذا النصِّ.

ولقد قام سوتر[٢٧] (*H.Suter*) بدراسة هذا النصّ بالطريقة نفسها التي درس فيها الكتاب الأوّل.

"في قطوع الأسطوانة وبسيطها"

لا يوجد كتاب "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، وعلى غرار الكتاب السابق، سوى في مخطوطة واحدة فقط، هي مجموعة أيا صوفيا ٤٨٣٢ المذكورة أعلاه، حيث تحتل الأوراق ٤و– ٢٦و من المجموعة *A*. وكل ما ذكرناه بصدد "مساحة القطع المكافئ" ينطبق أيضاً على هذا النصّ. لكنّ النسّاخ ترك هذه المرّة فراغاً لإسنادات ثابت إلى "مخروطات" أبلونيوس، مع بعض الاستثناءات. فهل كانت لديه النيّة لكتابتها كلها بحبر مختلف بعد انتهاء النسخ؟ أم هل كانت غائبة عن النسخة التي نقل عنها؟

يوجد، من جهة أخرى، تحريرٌ لكتاب ثابت بن قرّة قام بها الرياضي ابن أبي جرّادة الذي عاش في القرن الثالث عشر، اعتبُر بغير حقّ نسخة أخرى من كتابه. لكنَّ نصَّ ابن أبي جرّادة هو، في الواقع، إعادة كتابة كاملة لنصّ ثابت، ولو لم يكن مفيداً لتحقيق هذا النصّ. فضلاً عن ذلك، أضاف ابن أبي جرّادة مقدّمات إلى نصّ ثابت، كما أضاف، مرّة واحدة برهاناً جديداً. ولم يتوانَ في التمييز الواضح بين مساهماته الخاصّة وإعادة كتابة نصّ ثابت

---

[٢٧] انظر سوتر:
H. Suter, «Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al–Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide», Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen ،49
تُرجم هذا النص أيضاً إلى الروسيّة على يد ج. الدبّاغ وب. روزنفيلد (B. Rosen feld)، راجع *Matematitcheskie traktaty* (بالروسيّة)،الصفحات ١٥٧-١٩٦.

بن قرَّة. لكن إعادة الكتابة هذه ليست أمينة حرفياً للنص، وإن حافظت بدون شك على الأفكار الأساسيّة للنصّ الأصليّ. كما أنّ ابن أبي جرّادة يورد جميع الإسنادات إلى "مخروطات" أبلونيوس، إذ يكون قد وجدها في النسخة التي كانت بحوزته من كتاب ثابت، أو يكون قد استعارها من نسخة بحوزته من كتاب "المخروطات".

ليس لدينا سوى نسخة وحيدة عن كتابة ابن أبي جرّادة، وهي موجودة ضمن المجموعة ٤١ من دار الكتب في القاهرة وتحتل الأوراق ٣٦ظ–٦٤ظ. وهي تخبرنا أنّ ابن أبي جرّادة وضع نصّه في العام ٦٩١هـ/ ١٢٩٢م. ونتعرّف في النسخة على خطّ مصطفى صدقي، وإن لم يورد فيها اسمه، وقد أنجزها في الخامس والعشرين من ربيع الأوّل من عام ١١٥٣ للهجرة، أي في العشرين من حزيران من عام ١٧٤٠ميلاديّة. وتـُطلِعنا هذه الكتابة على الاهتمام، الذي كان لا يزال متواجداً، بهذا الميدان في نهاية القرن الثالث عشر. لقد تناولنا، في التعليقات الإضافيّة، المقدِّمات والبراهين التي أدخلها ابن أبي جرّادة؛ وتمكنّا بفضله أن نعيد إلى النصّ إسنادات ثابت المأخوذة من كتاب "المخروطات". وهذا ما لن نتأخـَّر عن التذكير به في كلّ مرة.

نقدّم هنا أوّل تحقيق نقديّ لهذا النصّ[٢٨].

[٢٨] نـُقل شرح ابن أبي جرّادة إلى الروسيّة على يد ج. الدبّاغ و ب. روزنفيلد (B. Rosenfeld)، راجع *Matematitcheskie traktaty* ، ص.١٩٦-٢٣٦، وكأنه كتابٌ لثابت بن قرّة. راجع الحاشية السابقة.

٢-٢ مساحة القطع المكافئ

٢-٢-١ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة

يحتل كتاب "في مساحة القطع المكافئ" مكاناً مهمّاً للغاية ضمن أعمال ثابت بن قرّة نفسه، وفي تاريخ رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، وفي التأريخ لنهج أرشميدس الرياضيّ بالعربيّة *Archimedes Arabus*. فهو أوّل كتاب للرياضيّ ثابت مخصّصٌ لمساحات السطوح وأحجام المجسّمات المنحنية. وقد أدخل ثابت بن قرّة في هذا الكتاب الأفكارَ الأساسيّة التي لن نلبث أن نراها في كتابه الثاني حول مساحة المجسّم المكافئ. ولقد أدّى هذا الكتاب، من جهة أخرى، إلى نشوء تيّارٍ في البحث في مسألة مساحة القطع المكافئ؛ ويمكن أن نتتبَّع هذا التيّارَ على امتداد قرن من الزمن تقريباً بعد وفاة المؤلِّف، حيث نجد فيه أسماء لرياضيّين من المرتبة الأولى مثل الماهاني وابراهيم بن سنان وابن سهل. حاول الأوّل من هؤلاء الثلاثة اختصارَ عدد القضايا التمهيديّة لثابت بن قرّة، التي تعدُّ عشرين قضيّة. أمّا الثاني، حفيد ثابت، الذي لم يكن يريد أن يدع أحداً يتجاوز جدّه بدون أن يتفوّق عليه أحد أفراد العائلة، فقد اختصر القضايا التمهيديّة إلى اثنتين. وأراد الأخير على الأرجح تحسين الطريقة نفسها، ولكنَّ كتابه لم يصل إلينا للأسف؛ لكن القوهي، معاصر ابن سهل، قد ذكر هذا الكتاب الذي يُمكن أن نجد آثاره، كما يبدو، في أعمال ابن الهيثم التي تعالج مسألة مساحة المجسم المكافئ ومساحة الكرة. أخيراً، يسمح لنا هذا الكتاب، لثابت بن قرّة في مساحة القطع المكافئ، بتقدير مستوى المعرفة بأعمال أرشيمدس التي نُقِلت إلى العربية، كما يسمح خاصّة بإعلامنا عن إسهامات الرياضي السِيراقوسي التي كانت معروفة بالعربيّة. سنتناول مجدّداً هذه المسائل، التي ذكرناها هنا باختصار، بالتفصيل في مناسبات عديدة، وبشكل خاص في مجلّد لاحق. نُشيرُ الآن إلى أنّ ابن قرّة، الذي كان، بشكل جليّ، يجهل أعمال أرشيمدس في القطع المكافئ وفي المجسَمات المخروطيّة والكرويّة أيضاً، وجد نفسَه مرغماً على شقِّ طريق جديد، وعلى ابتكار أدوات مفهوميّة، ضروريّة لتحديد مساحة قِطعة من القطع المكافئ. سنصف وسنحلّل فيما يلي هذا الطريق والوسائل المستخدمة فيه، وهي تتمثّل، بشكل إجماليّ، في الميل إلى التحسيب (الاستخدام المكثّف للحساب) إلى درجة تتجاوز ما نراه عند أرشيمدس؛ ولكنَّ هذا الاستخدام المكثّف للحساب لا يخلو من الصعوبة، إذ إنه يتطلّب استعمالاً واضحاً لخصائص

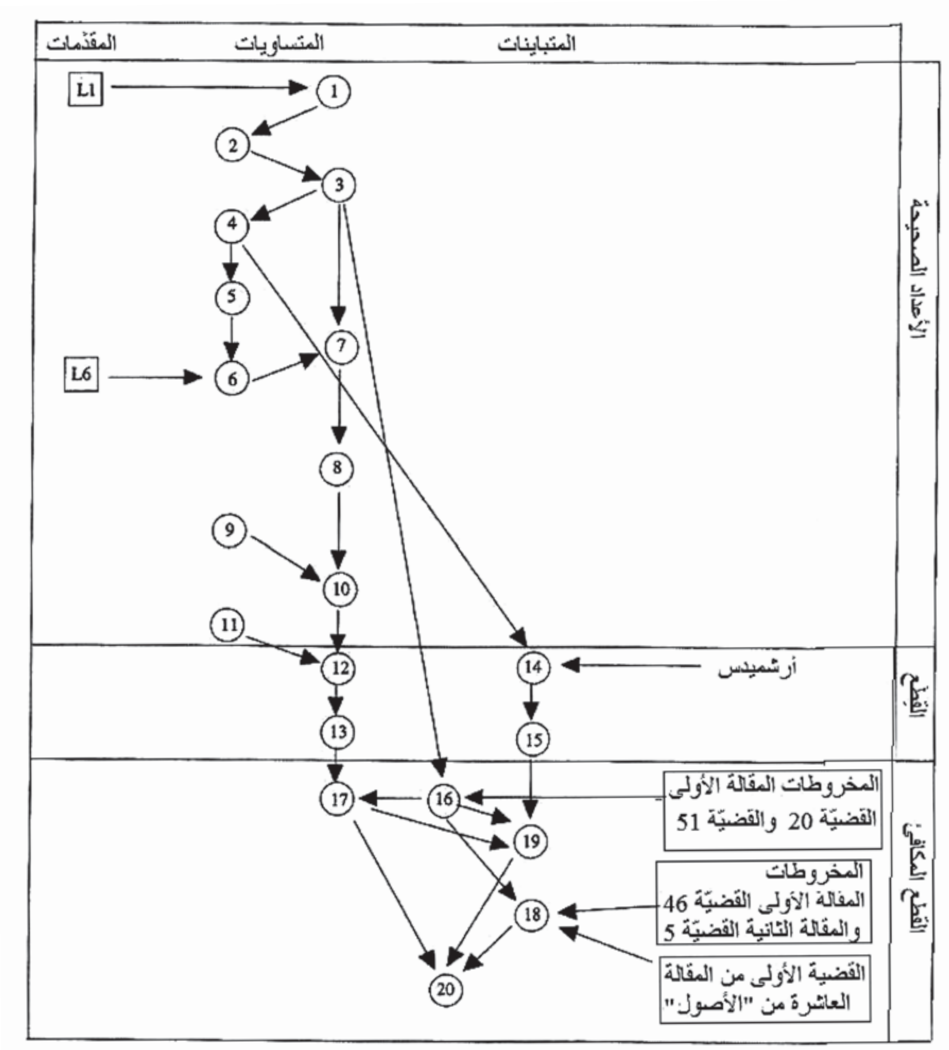
الحدّ الأعلى لمجموعة مُحدَّبة، وللقضيّة الأولى الشهيرة من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، من أجل تأمين التقريب الضروري لطريقة الاستنفاد ومن أجل برهنة وجود الحدّ الأعلى. وسنرى كيف فكّر ابن قرّة في توسيع استخدام قضيّة أقليدس هذه في كتابه "في مساحة المجسّم المكافئ".

هذه السمات المستخلصة من وصف ظاهراتي للعمل، تبرز في الواقع من بنية الكتاب نفسها. فبعد أن نُبرِز هذه البنية الكامنة، ستتبيّن مقاصد ابن قرّة هذه. وسنستخدِم طريقة تبيَّن أنها ناجحة في ظروف أخرى[1]: سنقدِّم الرسم البياني للعلاقات المنطقيّة التضمينيّة بين مختلف القضايا، انطلاقاً من البراهين التي أعطاها ابن قرّة لهذه القضايا. ثمّ نحاول أن نُحَدِّد بنية الدلالات التي تتطابق مع البنية التركيبيّة هذه، وذلك لكي نفهم كيف أنّ هاتين البنيتين تتَحدَّدان معاً، وتُحدِّدان سويّاً تنظيم الكتاب. فضلاً عن ذلك، تتميّز طريقتنا في كونها مساعِداً فعّالاً في الدراسة التاريخية للنصوص، من أجل تحديد مواقِع الإضافات الغريبة عن النصّ والإغفالات المحتملة للقضايا. وهي تستميل اهتمامنا بشدّة نحو القضايا المنعزلة، وتحثّنا على القيام بتفحُّص إضافيّ دقيق لتاريخ النصّ الخاصّ بهذه القضايا. لكنَّ نظرة بسيطة تكفي، على ما يبدو، للاقتناع بأنّ هذا الخطر غير موجود في حالة هذا الكتاب لابن قرّة. (انظر الرسم البياني للعلاقات التضمينيّة بين القضايا في كتاب "في مساحة القطع المكافئ" لابن قرّة).

يتألف كتاب ثابت بن قرة، كما هو وارد في المخطوطة، من مقدّمتين، وعشرين قضيّة تمهيديّة، ومبرهنة واحدة، تتوزّع على ثلاث مجموعات وفق ما نراه على الرسم البياني. تتضمّن المجموعة الأولى مقدّمتين واثنتي عشرة قضيّة تتناول جميعها الأعداد الصحيحة ومتواليات الأعداد الصحيحة. وتتألف المجموعة الثانية من أربع قضايا مخصّصة للقِطَع المستقيمة ولمتواليات القِطَع المستقيمة. أمّا المجموعة الأخيرة فتتشكّل من أربع قضايا ومن المبرهنة وتتناول القطع المكافئ. وهكذا نرى بوضوح أهميّة القضايا الحسابيّة في كتاب ابن قرّة. فضلاً عن ذلك نلاحظ أنّ الرسم البياني يتضمّن ثلاثة مستويات: الأوّل، حول القضايا الحسابيّة، وهو يشكّل أساساً للثاني المخصّص للقِطَع المستقيمة، غير أنّ هذا الأخير يرتبط

[1] انظر: ر.راشد، «*La mathématisation des doctrines informes dans la science sociale*»، ضمن: *La mathématisation des doctrines informes*، بإشراف كانغيلهم (G. Canghuilhem) (باريس، ١٩٧٢)، ص. ٧٣-١٠٥.

أيضاً بإدخال مسلَّمة أرشيمدس من أجل إيجاد الحدود العليا الضروريّة. أمّا المستوى الأخير، حول القطع المكافئ، فإنه يرتكز على المستويين السابقين، وكذلك على قضايا من "مخروطات" أبلونيوس وعلى القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، أي على الخصائص العائدة إمّا إلى القِطع المكافئ بصفته قطعاً مخروطيّاً، وإما إلى طريقة التقريب.



ملاحظة: القضيّة ١٧ تتعلق بخاصيّةٍ للقطع المكافئ.

نستشفّ ممّا سبق بنية الدلالات التي تتطابق مع بنية العلاقات التركيبيّة هذه. وستظهر هذه البنية بوضوح إذا قرأنا الرسم البيانيّ في الاتجاه الآخر. فهو ينقسم وفق مستويين أحدهما مخصّص للمتساويات والآخر للمتباينات. يُثبت ابن قرّة، في الأوّل، قضايا تتناول المتساويات

بين متتاليـاتِ أعـدادٍ صـحيحة، لينتقل فيمـا بعـد إلـى متسـاويات بـين نسـب متتاليـاتِ أعـدادٍ صـحيحة ونسـبِ متتاليـاتِ قِطَـع مسـتقيمة، ليصِـل مباشـرة إلـى القضـيّة ١٨. وبفضـل مسلَّمة أرشيمدس، ينتقل من المتساويات السابقة بين نسبٍ إلـى متباينـات، كمـا فـي القضـيّة ١٥، ثُمّ يعود مباشرة إلى القضيّة ٢٠. وهاتان القضيّتان بالتحديد، أي ١٨ و ٢٠، مع القضيّة ١٩ التي أدرجها ثابت في المكان المناسب، تسمحان في النهاية بإثبات المبرهنـة. ومن البـديهي أنّ بنيـة الدلالات تحكم بنية العلاقات التركيبيّـة؛ غيـر أنّ هـذه الأخيـرة تـؤمِّن تحقيـق الأولـى، كمـا أنهـا تضـمن لهـا مـداها التطبيقـي: القضـايا الحسـابيّة هـي هنـا لتهيئـة تقسـيماتِ القطـرِ فـي القطعـة المعنيّـة مـن القِطـع المكـافئ، فـي حـين أنَّ المتباينـات بـين متتاليـات القِطَـع المسـتقيمة تـُحضِّر لإدخـال خصـائص الحدّ الأعلـى؛ وهـذا يعنـي أنّ الحدَّ الأعلـى لمسـاحات متعـدّدات الأضـلاع الناتجة من هذه التقسيمات، هو مساحة قِطعة القطع المكافئ.

قد يبدو هذا الوصف مقتضباً نوعاً ما؛ لكن التحليل المفصّل لقضايا هذا الكتـاب سيوضـحه. إلّا أنّـه ينبغـي علينـا البـدء بالتـذكير بالتعريفـات الواضـحة، التـي نرمـز إليهـا بـالحرف D، وبالقضايا المستخدمة خلال البرهان، والمُعتبَرة كمُسَلمات – وهـي التـي نرمـز إليهـا بـالحرف A – والمقدّمات – التي نرمز إليها بالحرف L – أُثبتت بواسطة البرهان بالخُلف.

D_1 : أعداد صحيحة متوالية؛ D_2 : أعداد فرديّة متوالية؛ D_3 أعداد زوجيّة متوالية؛

D_4 : مربّعات متوالية ؛ A_0 : الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد؛

A_0 : الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد؛

A_1 : الفرق بين عددين زوجيّين متواليين هو اثنان؛

A_2 : الفرق بين عددين فرديّين متواليين هو اثنان.

A_3 : بين عددين زوجيّين متواليين يوجد عدد فردي.

A_4 : حاصل ضرب عدد صحيح باثنين هو عدد زوجي.

A_5 : كلُّ عدد فردي يضاف إليه واحد هو عدد زوجي.

L_1 : مربّعـان متواليـان همـا مربّعـا عـددين صـحيحين متـواليين (مقدّمـة مثبتـة فـي القضـيّة الأولـى).

L_6 : مربّعان فرديّان متواليان هما مربّعا عددين صحيحين فرديّين متواليين (مقدّمة مثبتة في القضيّة ٦).

٢-٢-٢ الشرح الرياضي

٢-٢-٢-١ القضايا الحسابيّة

القضيّة ١- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ [n^2 - (n-1)^2 = 2n-1]$.

يُبرهن ثابت هذه القضيّة بواسطة المقدّمة الأولى: يكون المربّعان الصحيحان a و b، حيث يكون $a > b$، متواليَيْن إذا، وفقط إذا، كانا مربّعيْ عددين صحيحين متواليَيْن.

ولبرهان هذه المقدِّمة يكفي أن نبيّن أنه، إذا كان a و b، مربّعين متواليين، فإنّ $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1$.

لنفرض أنّ $\sqrt{a} - \sqrt{b} \neq 1$، فيكون $\sqrt{a} - \sqrt{b} > 1$، لأنّ $\sqrt{a}$ و $\sqrt{b}$ عددان صحيحان (التعريف الذي استخدمه ثابت هو: الفرق بين عددين صحيحين متواليين هو واحد). يكون إذاً: $\sqrt{a} - \sqrt{b} = 1 + c$ حيث يكون c عدداً صحيحاً.

ينتج عن ذلك $\sqrt{b} < \sqrt{b} + 1 < \sqrt{a}$، وكذلك $b < (\sqrt{b}+1)^2 < a$، وهذا محال لأنّ b و a مربّعان صحيحان متواليان.

وبعد برهان المقدِّمة يكون برهان القضيّة مباشراً؛ فلدينا وفق المقدّمة الأولى:

$a = 1 + b + 2\sqrt{b}$، لذلك $a - b = 2\sqrt{b} + 1$، وبما أنّ $\sqrt{b}$ هو عدد صحيح، فإنّ $2\sqrt{b}$ هو عدد زوجي، فنحصل على النتيجة*.

القضيّة ٢- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)[(n+1)^2 - n^2 > n^2 - (n-1)^2]$ و $(\forall n \in \mathbb{N}^*)[(n+1)^2 - n^2 = n^2 - (n-1)^2 + 2]$

والبرهان يحصل بواسطة القضيّة ١.

---

* $a - b = n^2 - (n-1)^2 = 2\sqrt{b} + 1 = 2\sqrt{a} - 1 = 2n - 1$ (المُترجِم).

القضيّة ٣-١ـ لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية مربّعات صحيحة متوالية بحيث يكون $u_1=1$، ولتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية أعداد فرديّة متوالية بحيث يكون $v_1=3$؛ عند ذلك يكون

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)[(u_{n+1}-u_n)=v_n].$$

بخلاف القضيّة الأولى، لا يريد ثابت فقط أن يثبت أنّ الفرق بين مربّعين صحيحين متوالين هو عدد فردي، بل أيضاً أنّ الأعداد الفرديّة الحاصلة من أزواج المربّعات المتوالية هي أيضاً متوالية. يحصل البرهان بواسطة الاستقراء التكراريّ.

القضيّة صحيحة بالنسبة إلى $n=1$، إذ لدينا فعلاً $u_2-u_1=v_1=3$.

لنفرض أنّ القضيّة صحيحة حتى المرتبة p، أي أنّ $u_p-u_{p-1}=v_{p-1}$؛ فيكون لدينا، وفق القضيّة ٢، $u_{p+1}-u_p=u_p-u_{p-1}+2$، أي $u_{p+1}-u_p=v_{p-1}+2=v_p$

وذلك وفق التعريف (المُضمَر) للأعداد الفرديّة المتوالية.

القضيّة ٣-٢- لتكن $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية أعداد صحيحة بحيث يكون $u_1=1$، ولتكن $(v_n)_{n\geq 1}$ متتالية الأعداد الصحيحة الفرديّة المتوالية بحيث يكون $v_1=3$. إذا كان $u_{n+1}-u_n=v_n$، فإنّ $(u_n)_{n\geq 1}$ متتالية المربّعات المتوالية التي تبدأ بـِ $u_1=1$.

إنها القضيّة العكسيّة للقضيّة السابقة والبرهان يمكن إجراؤه بواسطة الأفكار نفسها التي استُخدمت في البرهان السابق: $u_2-u_1=u_2-1=v_1=3$، فينتج $u_2=v_1+1=2^2$.

لنفرض أنّ القضيّة صحيحة حتى n، أي أنّ $u_n=n^2$؛ فيكون $u_{n+1}-u_n=v_n=2n+1$؛

يكون إذاً $u_{n+1}=u_n+(2n+1)=n^2+2n+1=(n+1)^2$.

القضيّة ٤ – لتكن $(u_k)_{1\leq k\leq n}$ متتالية أعداد فرديّة متوالية بحيث يكون $u_1=1$؛ يكون عندئذ:

$$\sum_{k=1}^{n}u_k=\left(\frac{u_n+1}{2}\right)^2 \quad \text{و} \quad \left(\sum_{k=0}^{n}(2k+1)=\left(\frac{(2n+1)+1}{2}\right)^2=(n+1)^2\right)$$

نقوم بالبرهان بواسطة "الانحدار" المُنتهي. لتكن المتتالية $(v_k)_{1\leq k\leq n}$ بحيث يكون $v_k=\frac{u_k+1}{2}$، لكلّ مؤشّرٍ k، مع $(1\leq k\leq n)$، يكون لدينا $u_{k+1}-u_k=2$ لكلّ مؤشّرٍ k، مع

$(1 \le k \le n-1)$، فنحصـل علـى $\frac{1}{2}(u_{k+1}+1)-\frac{1}{2}(u_k+1)=v_{k+1}-v_k=1$ لكـلّ مؤشّـرٍ k، مـع $(1 \le k \le n-1)$؛ فتكـون $(v_k)_{1\le k\le n}$، إذاً، متتاليـة أعـداد صـحيحة متواليـة تبـدأ بالعـدد ١. ووفـق المقدّمـة ١، تكـون $(v_k^2)_{1\le k\le n}$ متتاليـة مربّعـات متواليـة تبـدأ بالعـدد ١، ومـن خـلال القضـيّة ٣، تكـون المتتاليـة $(w_k)_{1\le k\le n-1}$، حيـث $w_k=v_{k+1}^2-v_k^2$ لكلّ مؤشّرٍ k، مع $(1\le k\le n-1)$، متتاليـةَ أعداد فرديّة متوالية تبدأ بالعدد ٣، أي أنها تكون المتتالية (u_k) حيث، $2\le k\le n$، فيكون:

$$\sum_{k=1}^{n-1}w_k=v_n^2-v_1^2=\sum_{k=2}^{n}u_k$$ ، ويكون $$\sum_{k=1}^{n}u_K=v_n^2$$ لأنّ $v_1=u_1$.

مخطّط "الانحدار" المنتهي الذي استخدمه ثابت هو التالي:

١- $w_1=v_2^2-v_1^2$ (القضيّة ٣)

٢- لنفرض أنّ $$\sum_{n=k}^{n=1}w_k=v_n^2-v_1^2$$

٣- فيكون إذاً $$\sum_{n=k}^{n}w_k=\left(v_n^2-v_1^2\right)+\left(v_{n+1}^2-v_n^2\right)$$

وذلك وفق القضيّة ٣، فنحصل على $\sum_{k=1}^{n}v_k=v_{n+1}^2-v_1^2$.

القضيّة ٥ – لتكن $(v_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، فيكون إذاً

$$\sum_{k=1}^{n}v_k^2=\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{v_n^2}{2}+n \quad \text{وَ} \quad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k)^2=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+\frac{(2n)^2}{2}+n\right).$$

وهذه نتيجة مباشرة من القضيّة ٤.

القضـيّة ٦ – لـتكن $(v_k^2)_{1\le k\le n}$ متتاليـة المربّعـات المتواليـة التـي تبـدأ بالعـدد ١، و $(u_k^2)_{1\le k\le n}$ متتالية المربّعات الفرديّة التي تبدأ بالعدد ١، فيكون:

$$2\sum_{k=1}^{n}v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}u_K^2+v_n^2+\frac{n}{2} \quad \text{وَ} \quad \left(2\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+n^2+\frac{n}{2}\right).$$

يبرهن ثابت أوّلاً، بواسطة البرهان بالخُلف، المقدّمـة ٦ التـي تقول إنّ المربّعات الفرديّـة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١ هي مربّعات الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

ثمّ يَجري برهان القضيّة على الشكل التالي. $(v_k)_{1\le k\le n}$ هي، وفق المقدّمة ١، متتالية الأعداد الصحيحة المتوالية التي تبدأ بـ $v_1=1$. نضع، لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$، $w_k=2v_k$ ، فتكون $(w_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الصحيحة الزوجيّة المتوالية مع $w_1=2$، ويكون $\sum_{k=1}^{n}w_k^2=4\sum_{k=1}^{n}v_k^2$.

وفق المقدّمة ٦، تكون $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد١. ووفق القضيّة ٥، يكون لدينا: $\sum_{k=1}^{n}w_k^2=\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{w_n^2}{2}+n$، فنحصل على:

$$2\sum_{k=1}^{n}v_k^2=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}w_k^2=\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n}u_k^2\right)+v_n^2+\frac{n}{2}.$$

القضيّة ٧ - لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية أعداد فرديّة متوالية تبدأ بالعدد ١، فيكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n}u_k+\sum_{k=1}^{n-1}2s_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{n}{2} \quad \text{حيث} \quad s_k=\sum_{p=1}^{k}u_p.$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)+2\sum_{k=2}^{n}(2k-3)+2\sum_{k=3}^{n}(2k-5)+\ldots+2(1+3)+2.1=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+\frac{n}{2}\right).$$

يكون لدينا : $s_k-s_{k-1}=u_k$ لكلّ مؤشّرٍ k، مع $(2\le k\le n)$، فتكون (s_k-s_{k-1}) متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٣.

المتتالية $(s_k)_{1\le k\le n}$ هي، وفق القضيّة ٣ـ٢، متتالية المربّعات المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، ووِفق القضيّة ٦، يكون لدينا : $2\sum_{k=1}^{n}s_k=\frac{1}{2}\sum_{k}^{n}u_k^2+s_n+\frac{n}{2}$، فنحصل على:

$$s_n+2\sum_{k=1}^{n-1}s_k=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{n}{2}.$$

القضيّة ٨ - لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، فيكون

$$\sum_{k=1}^{n}u_k\,u_{n-k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{n}{2} \quad \text{و} \quad \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left[2(n-k)+1\right]=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2+\frac{n}{2}\right).$$

يبرهن ثابت بن قرّة هذه القضيّة بواسطة استقراء غير تامّ. لنتابع هذا البرهان خطوة خطوة.

لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛ تكون المتتالية (u_k-1)، حيث $(2\le k\le n)$، متتالية الأعداد الـ $(n-1)$ الأولى الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، والمتتالية (u_k-1-2)، حيث $(3\le k\le n)$، هي متتالية الأعداد الـ $(n-2)$ الأولى الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢. وهكذا دواليك، فيكون لدينا

$$u_k-1-2(k-2),\dots,u_n-1-2(k-2)$$ ،

وهي متتالية الأعداد الـ $(n-k+1)$ الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد٢. وأخيراً يكون:

$u_n-1-2(n-2)=2$، فنحصل على

$$u_n=2n-1. \qquad (1)$$

ومن جهة أخرى

$$\begin{aligned}
&1u_1+\dots+1u_p+\dots+1u_{n-1}+1u_n &&=1.\sum_{k=1}^{n}u_k\\
&2u_1+\dots+2u_p+\dots+2u_{n-1} &&=2.\sum_{k=1}^{n-1}u_K\\
&\dots\\
&2u_1+\dots+2u_p &&=2.\sum_{k=1}^{p}u_k\\
&\dots\\
&2u_1 &&=2u_1
\end{aligned}$$

وإذا جمعنا طرفاً بطرف عموديّاً، نحصل على:

$$\left[1+2(n-1)\right]u_1+\dots+\left[1+2(n-p)\right]u_p+\dots+1.u_n=1.\sum_{k=1}^{n}u_k+2.\sum_{p=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{p}u_k$$

إذاً، ومن خلال العلاقة (1) والقضيّة ٧، يكون $\sum_{k=1}^{n}u_k\,u_{n-k+1}=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}u_k^2+\frac{n}{2}$.

القضيّة ٩ – لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(v_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، في هذه الحالة

تكون المتتالية $w_k = v_n - u_k$، لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \le k \le n)$، المتتاليـة التناقصيّة للأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بـِ $w_1 = v_n - 1 = u_n$ وتنتهي بالعدد ١.

يبرهن ثابت بن قرّة هذه القضيّة بواسطة "الانحدار المنتهي". يكون لدينا

$v_k - u_k = 1$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \le k \le n)$،

ومن جهة أخرى $u_n + w_n = v_n$ و $u_{n-1} + w_{n-1} = v_n$، فنحصل على $u_n - u_{n-1} = w_{n-1} - w_n = 2$.

كذلك نستطيع أن نبيّن، بالنسبة إلى أيّة قيمة p حيث $2 \le p \le n-1$، أنّ $w_{n-p-1} - w_{n-p} = 2$.

لذلك فإنّ المتتالية $(w_k)_{1 \le k \le n}$ متتالية تناقصيّة للأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بـِ $w_1 = v_n - 1 = u_n$ وتنتهي بالعدد ١.

القضيّة ١٠ – لتكن $(u_k)_{1 \le k \le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(v_k)_{1 \le k \le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، فيكون

$$\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n \text{ وَ } \left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2 + \frac{n}{3} = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\right).2n\right).$$

لنضع

(1) $w_k = v_n - u_k$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \le k \le n)$.

وفق القضيّة ٩، يكون لدينا :

(2) $w_k = u_{n-k+1}$ لكلّ مؤشّرٍ k، $(1 \le k \le n)$.

فيكون لدينا، استناداً إلى القضيّة ٨ والعلاقة (2):

$\sum_{k=1}^{n} u_k w_k = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{2}$، فنحصل على $\sum_{k=1}^{n} u_k w_k + \sum_{k=1}^{n} w_k^2 = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{2}$،

وينتج $\sum_{k=1}^{n}(u_k + w_k) w_k = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{2}$، واستناداً إلى العلاقة (1)، يكون

$v_n.\sum_{k=1}^{n} w_k = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{2}$، وينتج، استناداً إلى العلاقة (2) $v_n.\sum_{k=1}^{n} u_k = \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{2}$،

ونحصل على النتيجة إذا ضربنا بالعدد $\frac{2}{3}$.

لنلاحظ أنّ النتيجة يمكن كتابتها كما يلي: $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2=\frac{4n^3}{3}-\frac{n}{3}$.

القضيّة ١١ – لتكن $(v_k)_{0\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الزوجيّة المتوالية مع $v_0=0$ و $v_1=2$، ولتكن $(w_k)_{1\le k\le n}$ المتتالية المحدّدة بالعلاقة $w_k=\frac{v_{k-1}+v_k}{2}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$؛ في هذه الحالة تكون $(w_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

يكون لدينا: $w_1=1$ وَ $v_k-v_{k-1}=2$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$ ،

فيكون $v_k-\frac{v_{k-1}+v_k}{2}=1$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$ ،

أي $v_k-w_k=1$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$.

وبما أنّ $(v_k)_{1\le k\le n}$ هي متتالية الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، فإنّ $(w_k)_{1\le k\le n}$ هي متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

٢-٢-٢-٢ متتاليات من قِطَع مستقيمة وتحديدها من أعلى

القضيّة ١٢ – لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(a_k)_{1\le k\le n}$ متتالية تزايديّة لعدد n من القِطَع المستقيمة، ولنفترض أنّ المتتاليتين تحقّقان العلاقة

$\frac{a_{k-1}}{a_k}=\frac{u_{k-1}}{u_k}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$.

ولتكن $(v_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(b_k)_{1\le k\le n}$ متتالية تزايديّة لعدد n من القِطَع المستقيمة، ولنفترض أنّ المتتاليتين تحقّقان العلاقة

$\frac{b_{k-1}}{b_k}=\frac{v_{k-1}}{v_k}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$.

إذا كان $a_1=\frac{b_1}{2}$، يكون: $\frac{2}{3}b_n.\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{n}{3}a_1.\frac{b_1}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k.\frac{b_{k-1}+b_k}{2}$.

ولبرهان هذه القضيّة، نضع $c_k=\frac{b_{k-1}+b_k}{2}$، و $w_k=\frac{v_{k-1}+v_k}{2}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$، ونضع $v_0=b_0=0$، فيكون لدينا $\frac{a_1}{b_1}=\frac{u_1}{v_1}$، ويكون، لكلّ مؤشّرٍ k، $(2\le k\le n)$:

(1) $\frac{a_{k-1}}{a_k}=\frac{u_{k-1}}{u_k}$،

و $\frac{b_{k-1}}{b_k}=\frac{v_{k-1}}{v_k}$، فنحصل على $\frac{a_k}{b_k}=\frac{u_k}{v_k}$؛ فينتج عن ذلك:

(2) $\frac{a_k}{c_k}=\frac{a_k}{\frac{1}{2}\left(b_{k-1}+b_k\right)}=\frac{u_k}{\frac{1}{2}\left(v_{k-1}+v_k\right)}=\frac{u_k}{w_k}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$.

لكنّ (w_k) هي، وفق القضيّة ١١، متتالية الأعداد الـ n الأولى الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛ يكون إذاً $u_k=w_k$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$، فنحصل على $a_k=c_k$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$،

(2′) $a_k^2=a_kc_k$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$.

وكذلك $\frac{a_{k-1}^2}{a_k^2}=\frac{u_{k-1}^2}{u_k^2}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$، فيكون:

(3) $\frac{a_k^2}{a_n^2}=\frac{u_k^2}{u_n^2}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$،

فنحصل على:

(4) $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{a_n^2}=\frac{\sum_{k=1}^{n}u_k^2}{u_n^2}$؛

غير أنّ $\frac{a_n^2}{a_n.b_n}=\frac{u_n^2}{u_n.v_n}$، فنحصل على:

(5) $\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k^2}{a_n.b_n}=\frac{\sum_{k=1}^{n}u_k^2}{u_n.v_n}$؛

لكنّ:

(6) $$\frac{u_n v_n}{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n} = \frac{a_n b_n}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n}$$ ؛

واستناداً إلى العلاقتين (5) و (6)، يكون لدينا:

(7) $$\frac{\sum_{k=1}^{n} u_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n}.$$

لكن، استناداً إلى العلاقة (3)، يكون $\frac{1}{\sum_{k=1}^{n} u_k^2} = \frac{a_1^2}{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}$، فنحصل، استناداً إلى العلاقة (7)

وإلى خاصيّة النِسَب المتساوية، على $\frac{\left[\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \frac{n}{3} a_1^2\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n}$.

إذاً، استناداً إلى العلاقة $(2')$، يكون: $\frac{\left[\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3}\right]}{\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n} = \frac{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 \cdot \frac{b_1}{2}\right)}{\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n}$.

ولكن، وفقاً للقضيّة ١٠، يكون لدينا : $\left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n$، فنحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة – تتحوّل القضيّة ١٢ إلى القضيّة ١٠ من خلال اختيار قطعة مستقيمة a_1 تكون وحدة طول. فإذا وضعنا $a_k = u_k . a_1$، مع الأخذ بالفرضيّة $a_1 = \frac{b_1}{2}$، وهي ليست أساسيّة كما سنرى في القضيّة اللاحقة، يكون لدينا:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{b_{k-1} + b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 . \frac{b_1}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k a_1 . \frac{v_k a_1 + v_{k-1} a_1}{2} + \frac{n}{3} a_1^2 = a_1^2 \left(\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3}\right)$$

$$= a_1^2 . \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right) v_n$$ (وفقاً للقضيّة ١٠)

$$= \frac{2}{3}\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right) b_n .$$

القضيّة ١٣ – لتكن $(u_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١، و $(a_k)_{1\le k\le n}$ متتالية تزايديّة لعدد n من القِطَع المستقيمة، ولنفترِض أنّ المتتاليتين تحقّقان العلاقة: $\frac{a_{k-1}}{a_k}=\frac{u_{k-1}}{u_k}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$، ولتكن $(v_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الـ n الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، و $(b_k)_{1\le k\le n}$ متتالية تزايديّة لعدد n من القِطَع المستقيمة، ولنفترِض أنّ المتتاليتين تحقّقان العلاقة: $\frac{b_{k-1}}{b_k}=\frac{v_{k-1}}{v_k}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$.

في هذه الحالة، إذا كان $a_1\neq\frac{b_1}{2}$، فإنّ $\sum_{k=1}^{n}a_k\cdot\frac{b_{k-1}+b_k}{2}+\frac{n}{3}a_1\cdot\frac{b_1}{2}=\frac{2}{3}b_n\cdot\sum_{k=1}^{n}a_k$.

لبرهان هذه القضيّة، نأخذ المتتالية $(c_k)_{2\le k\le n}$ المحدّدة على الشكل التالي:

$$c_1=2a_1 \text{ و } \frac{c_{k-1}}{c_k}=\frac{b_{k-1}}{b_k}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$،

وبالتبديل يكون لدينا

(1) $$\frac{b_{k-1}}{c_{k-1}}=\frac{b_k}{c_k}$$ لكلّ مؤشّرٍ k، $(2\le k\le n)$،

فنحصل على:

(2) $$\frac{\frac{b_{k-1}}{2}}{\frac{c_{k-1}}{2}}=\frac{\frac{b_k}{2}}{\frac{c_k}{2}}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\le k\le n)$.

ويكون من جهة أخرى:

(3) $$\frac{a_k\left(\frac{b_{k-1}+b_k}{2}\right)}{a_k\left(\frac{c_{k-1}+c_k}{2}\right)}=\frac{\frac{b_{k-1}+b_k}{2}}{\frac{c_{k-1}+c_k}{2}}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$،

مع $b_0=c_0=0$.

لكن، وفق العلاقتين (2) و (3)، لدينا:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{b_{k-1}+b_k}{2}\right)}{\sum_{k=1}^{n}a_k\left(\frac{c_{k-1}+c_k}{2}\right)}=\frac{\sum_{k=1}^{n}\frac{b_{k-1}+b_k}{2}}{\sum_{k=1}^{n}\frac{c_{k-1}+c_k}{2}}=\frac{\frac{b_k}{2}}{\frac{c_k}{2}}=\frac{b_n}{c_n}=\frac{b_n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)}{c_n\left(\sum_{k=1}^{n}a_k\right)}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\le k\le n)$،

فنحصل على:

$$\frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(b_{k-1}+b_k)}{2}}{b_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)} = \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(c_{k-1}+c_k)}{2}}{c_n\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)} \qquad (4)$$

لكلّ مؤشِّرٍ k مع $1 \le k \le n$ ، ومع $b_0 = c_0 = 0$.

من جهة أخرى، لدينا : $\frac{a_1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \frac{\frac{b_1}{2}}{b_n} = \frac{a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k}$ ؛ لكن، وفق العلاقة (1)، لدينا: $\frac{b_1}{b_n} = \frac{c_1}{c_n}$ ،

فنحصل على : $\frac{a_1}{\sum_{k=1}^{n} a_k} \cdot \frac{\frac{c_1}{2}}{c_n} = \frac{a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k}$ ، وبالتالي:

$$\frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{c_1}{2}}{c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} . \qquad (5)$$

من العلاقتين (4) و (5)، نستنتج

$$\frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{b_1}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(b_{k-1}+b_k)}{2}}{b_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} = \frac{\frac{n}{3} \cdot a_1 \cdot \frac{c_1}{2}}{c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} + \frac{\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{(c_{k-1}+c_k)}{2}}{c_n \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k} \qquad (6)$$

لكلّ مؤشِّرٍ k مع $1 \le k \le n$ ، ومع $b_0 = c_0 = 0$.

لكن $a_1 = \frac{c_1}{2}$ ، لذا، واستناداً إلى القضيّة ١٢، يكون الطرف الأيمن من العلاقة (6) مساوياً لـِ $\frac{2}{3}$، وينتج من ذلك أنّ الطرف الأوّل للعلاقة (6) يساوي $\frac{2}{3}$، فنحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظتان .

١) في القضيّة ١٢، نسبة a_1 إلى b_1 تساوي $\frac{1}{2}$، أمّا في القضيّة ١٣ فهي غير مُحدَّدة، أي أنَّ قيمتها اختياريَّة. إذا كان $a_1 \ne \frac{b_1}{2}$ ، فهذا يعني أنّ المتتاليتين (a_k) و (b_k) لا تـُحسَبان وفقاً

لنفس وحدة الطول، بل تُحسَب كلٌّ منهما وفقاً لوحدة طول مختلفة. تتمثّل فكرة ثابت بن قرّة بإدراج متتالية (c_k) تُحسَب، من جهة، تبعاً لنفس وحدة الطول المعتمدة في المتتالية (a_k)، ومن جهة أخرى تكون فيها النسَب بين الحدود مطابقة للنسَب بين حدود المتتالية (b_k). وبهذه الطريقة يتجنّب الصعوبة الناتجة من الفرضية $a \neq \frac{b_1}{2}$.

لكن من جهة أخرى، إذا ما حوّلنا كلَّ متتالية إلى وحدة قياسها الخاصّة، فإنّ ذلك يسمح بتجنّب القضيّة ١٢ وباختصار القضيّتين ١٠ و ١٣ إلى قضيّة واحدة، لأننا في هذه الحالة نكون قد أبرزنا فقط المتتاليات العدديّة. وبكلام آخر، عندما نكتب كلَّ متتالية بالنسبة إلى وحدة قياسها الخاصّة، فإنّنا لا نُدخِل سوى المتتاليات العدديّة الزوجيّة والفرديّة، وهذا ما يشكّل أساس برهان القضيّة ١٠.

٢) لو قام ثابت بن قرّة باختيار واضح لوحدة الطول، لتمكن مباشرة من استنتاج القضيّة ١٣ من القضيّتين ١٠ و ١١. وذلك أنَّ لدينا بالفعل، بما أنّ $a_k = u_k a_1$ و $b_k = \frac{v_k}{2} b_1$:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k \frac{b_{k-1}+b_k}{2} + \frac{n}{3} a_1 . \frac{b_1}{2} = \sum_{k=1}^{n} u_k a_1 . \frac{1}{2}\left[\frac{v_{k-1}}{2} b_1 + \frac{v_k}{2} b_1\right] + \frac{n}{3} a_1 . \frac{b_1}{2}$$

$$= a_1 . \frac{b_1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} u_k . \frac{v_{k-1}+v_k}{2} + \frac{n}{3}\right]$$

$$= a_1 . \frac{b_1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} u_k^2 + \frac{n}{3}\right] \quad \text{(استناداً إلى القضيّة ١١)}$$

$$= a_1 . \frac{b_1}{2}\left[\frac{2}{3} v_n . \sum_{k=1}^{n} u_k\right] \quad \text{(استناداً إلى القضيّة ١٠)}$$

$$= \frac{2}{3} b_n . \sum_{k=1}^{n} a_k .$$

أخيراً، تبدو القضيّة ١٢ كمقدّمة تقنيّة للحصول على النتيجة العامّة المتمثّلة بالقضيّة ١٣.

القضيّة ١٤ – لتكن a و b قطعتين مستقيمتين بحيث تكون النسبة $\frac{a}{b}$ معلومة؛ في هذه الحالة يوجد عددٌ n $(n \in \mathbb{N}^*)$، بحيث تحقّق المتتالية $(u_k)_{1 \leq k \leq n}$ للأعداد الـ n الفرديّة المتوالية

التي تبدأ بالعدد ١، والمتتالية $(v_k)_{1\le k\le n}$ للأعداد الـ n الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢، العلاقة التالية $\frac{a}{b} < \frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k}$.

وفق مسلَّمة أرشيمدس، يوجد عدد n $(n \in \mathbb{N})$ بحيث يكون $na > b$ ، مع $(n \ge 1)$.

ولتكن $(v_k)_{1\le k\le n}$ متتالية الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢. لدينا إذاً $v_n = 2n$

ولنضع : $u_k = v_k - 1$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \le k \le n)$.

المتتالية $(u_k)_{1\le k\le n}$ هي متتالية الأعداد الـ n الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١. استناداً إلى القضيّة ٤، لدينا :

$$\left(\frac{v_n}{2}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} u_k \text{،} \qquad (1)$$

فيكون إذاً $\frac{\frac{v_n}{2}}{\sum_{k=1}^{n} u_k} = \frac{\frac{v_n}{2}}{\left(\frac{v_n}{2}\right)^2}$ ؛ لكن بما أنّ $\frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k \ge \sum_{k=1}^{n} u_k$ ،(لأنّ $v = 2n$ وفق الفرضيّة، ولأنّ $n \ge 1$)، يكون لدينا $\frac{\frac{v_n}{2}}{\frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k} \le \frac{\frac{v_n}{2}}{\sum_{k=1}^{n} u_k}$. لكن وفق (1)، لدينا : $\frac{\frac{v_n}{2}}{\sum_{k=1}^{n} u_k} = \frac{1}{\frac{v_n}{2}}$، ومن جهة أخرى $\frac{1}{\frac{v_n}{2}} = \frac{1}{n}$، فنحصل على: $\frac{\frac{v_n}{2}}{\frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k} \le \frac{1}{n}$. لكن $\frac{\frac{v_n}{2}}{\frac{v_n}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k} < \frac{\frac{v_n}{2}}{v_n \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k}$ و $\frac{1}{n} < \frac{a}{b}$ ،

فنحصل على $\frac{a}{b} < \frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k}$.

القضيّة ١٥ – لتكن AB و H قطعتين مستقيمتين[٢] معلومتين، ولتكن a و b قطعتين مستقيمتين بحيث تكون النسبة $\frac{a}{b}$ معلومة. لكلِّ عدد n اختياريّ معلوم، يكون لدينا:

[٢] في المخطوطات، يُرمز إلى القطعتين بـ ***CD* و *E***.

١) يوجد تقسيم $(A_k)_{0\le k\le n}$ حيث يكون $A_0 = A$ و $A_n = B$ ، وحيث يكون $\frac{A_k A_{k+1}}{A_{k+1} A_{k+2}} = \frac{u_{k+1}}{u_{k+2}}$

لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le k \le n-2)$ وحيث ترمز $(u_k)_{1\le k\le n}$ إلى متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛

٢) توجد متتالية من القِطع المستقيمة $(H_j)_{1\le j\le n}$، حيث $H_n = H$ وبحيث يكون

$\frac{H_j}{H_{j+1}} = \frac{v_j}{v_{j+1}}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le j \le n-1)$ ،

حيث ترمز $(v_j)_{1\le j\le n}$ إلى متتالية الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢.

وإذا كان n يحقّق الشرط $\frac{n}{v_n \cdot \sum_{k=1}^{n} u_k} < \frac{a}{b}$ ، يكون $\frac{nA_0A_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} < \frac{a}{b}$.

ولبرهان ذلك، نلاحظ أنه، وفقاً للقضيّة ١٤، يوجد عدد n $(n \in \mathbb{N}^*)$ يحقّق الشرط

$$\frac{n}{v_n \left[\sum_{p=1}^{n} u_p\right]} < \frac{a}{b} . \qquad (1)$$

لتكن $(A_k)_{0\le k\le n}$ متتالية نقاط من القطعة المستقيمة AB (مع $A_0 = A$ و $A_n = B$) بحيث يكون

$$\frac{A_k A_{k+1}}{A_k A_n} = \frac{u_{k+1}}{\sum_{p=k+1}^{n} u_p} \qquad (2)$$

لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le k \le n-2)$.

إذا غيّرنا تعابير ثابت بن قرّة، نستطيع أن نكتب:

$$\frac{A_0A_1}{u_1} = \frac{A_1A_2}{u_2} = \dots = \frac{A_k A_{k+1}}{u_{k+1}} = \dots = \frac{A_{n-1}A_n}{u_n} . \qquad (3)$$

ونكون قد قمنا بتقسيم القطعة AB تبعاً لنِسب الأعداد الفرديّة المتوالية.

لتكن $(H_j)_{1\le j\le n}$ متوالية قِطع مستقيمة (مع $H_n = H$) بحيث يكون:

$$\frac{H_1}{v_1} = \frac{H_2}{v_2} = \dots = \frac{H_k}{v_k} = \dots = \frac{H_n}{v_n} ؛ \qquad (4)$$

وهذا ممكن إذا أخذنا $H_1 = \frac{H_n}{n}$.

من العلاقة (3)، نستخلص

$$\frac{A_0A_1}{u_1} = \frac{A_{n-1}B}{u_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} A_k A_{k+1}}{\sum_{p=1}^{n} u_p} = \frac{AB}{\sum_{p=1}^{n} u_p} \qquad (5)$$

فنحصل على:

$$\frac{u_1}{\sum_{p=1}^{n} u_p} = \frac{AA_1}{AB}\text{؛} \qquad (6)$$

لكن، استناداً إلى (5)، لدينا

$$\frac{\left[\sum_{P=1}^{n} u_p\right]^2}{u_n \sum_{p=1}^{n} u_p} = \frac{AB^2}{AB . A_{n-1}B}\text{،} \qquad (7)$$

فنحصل [إذا ربّعنا طرفي العلاقة (6) وإذا ضربنا طرفيْ كلٍّ من العلاقتين (6) و (7) طرفاً بطرفٍ] على :

$$\frac{u_1^2 \cdot n}{u_n \sum_{p=1}^{n} u_p} = \frac{(AA_1)^2 \cdot n}{AB \cdot A_{n-1}B}. \qquad (8)$$

<u>الحالة الأولى</u> – لنفترض أنّ

$$\frac{AA_1}{H_1} = \frac{u_1}{v_1}\text{،} \qquad (9)$$

بذلك يكون

$$\frac{u_1 \cdot \frac{v_1}{2}}{u_1^2} = \frac{AA_1 . \frac{H_1}{2}}{AA_1^2} \qquad (10)$$

و

(11) $$\frac{n}{u_n\left[\sum_{p=1}^{n}u_p\right]}=\frac{nAA_1\cdot\frac{H_1}{2}}{AB\cdot A_{n-1}B}.$$

لكــنَّ : $\frac{u_n}{u_1}=\frac{A_{n-1}B}{AA_1}$ (اســتناداً إلــى (3))، $\frac{u_1}{v_1}=\frac{AA_1}{H_1}$ (وفــق فرضــيّة القضــيّة)، و

$\frac{v_1}{v_n}=\frac{H_1}{H}$ (استناداً إلى (4)).

إذا ضربنا كلّاً من المتساويات الثلاث الأخيرة طرفاً بطرفٍ، يكون لدينا:

(12) $$\frac{u_n}{v_n}=\frac{A_{n-1}B}{H}.$$

وإذا ضربنا (11) و (12) طرفاً بطرفٍ، نحصل على: $\frac{n}{v_n\left[\sum_{p=1}^{n}u_p\right]}=\frac{n\cdot AA_1\cdot\frac{H_1}{2}}{AB\cdot H}$.

فيكون لدينا، استناداً إلى (1)، $\frac{a}{b}<\frac{n\cdot AA_1.\frac{H_1}{2}}{AB\cdot H}$؛

وهذا ما يُنهي البرهان في هذه الحالة.

الحالة الثانية – لنفترض $\frac{u_1}{v_1}\neq\frac{AA_1}{H_1}$.

لتكن G_1 ، G_2، ...، G_n، قِطَعاً مستقيمة عددها n، وتحقّق العلاقة:

(13) $$\frac{AA_1}{G_1}=\frac{u_1}{v_1}$$

وكذلك العلاقة

(14) $$\frac{G_1}{v_1}=\ldots=\frac{G_k}{v_k}=\ldots=\frac{G_n}{v_n}.$$

استناداً إلى الحالة الأولى، أعلاه، يكون لدينا

(15) $$\frac{n\cdot AA_1\cdot\frac{G_1}{2}}{AB\cdot G_n}<\frac{a}{b}.$$

من جهة أخرى $\frac{\frac{G_1}{2}}{\frac{H_1}{2}} = \frac{AA_1.\frac{G_1}{2}}{AA_1.\frac{H_1}{2}}$. لكن استناداً إلى (4) و (14)، يكون لدينا $\frac{G_n}{H} = \frac{G_1}{H_1}$،

فنحصل $\frac{G_n}{H} = \frac{AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}$. لكن $\frac{G_n}{H} = \frac{AB \cdot G_n}{AB \cdot H}$، فنحصل على $\frac{AB \cdot G_n}{AB \cdot H} = \frac{A_1A_2 \cdot \frac{G_1}{2}}{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}$، وينتج

$\frac{AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} = \frac{AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n}$، فيكون $\frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H} = \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n}$.

لكن استناداً إلى (15)، لدينا $\frac{a}{b} < \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{G_1}{2}}{AB \cdot G_n}$، فنحصل أخيراً على: $\frac{a}{b} < \frac{n \cdot AA_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{AB \cdot H}$.

ملاحظة – يستند البرهان على تجزئة قطعة مستقيمة معلومة إلى متتالية من قِطَع مستقيمة متناسبة مع أعداد من متتالية معلومة، وكذلك على تعميمٍ للقضيّة ١٤ – التي تـُدخِل التقريب – إلى متتالياتٍ من قِطَع مستقيمة، وبالتالي على تعميم التحديد من أعلى لمتتالية نسب قِطَعٍ مستقيمة.

من أجل تقسيم القطعة المستقيمة AB إلى متتالية قِطَع مستقيمة عددها n ومتناسبة مع الأعداد u_k التي تشكِّل متتالية من n عدد، يستخدم ثابت بن قرّة، مرّة أخرى، "الانحدار النهائي": نـُحدِّد A_1 بحيث يكون: $\frac{AA_1}{AB} = \frac{u_1}{\sum_{K=1}^{n} u_k}$؛ وهكذا نكون قد حوّلنا المسألة إلى تقسيم A_1B إلى متتالية من $(n-1)$ من القِطَع المستقيمة المتناسبة مع أعداد المتتالية $(u_k)_{2 \le k \le n}$.

٢-٢-٢-٣ حساب مساحة قطعة من القطع المكافئ

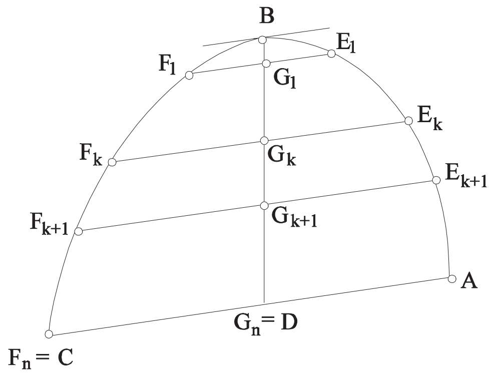
القضيّة ١٦ – لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ قطره BD. ولتكن $E_1G_1F_1$، ...، $E_{n-1}G_{n-1}F_{n-1}$، خطوط ترتيب بالنسبة إلى القطر BD، حيث تقطع هذه الخطوطُ هذا القطرَ على G_1، G_2، G_{n-1}. إذا كانت القِطَع BG_1، G_1G_2، ...، $G_{n-1}D$ تحقّق العلاقة:

(1) $\frac{G_kG_{k+1}}{G_{k+1}G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le k \le n-2)$

حيث $B=G_0$ و $D=G_n$، عندئذ تحقّق خطوطُ الترتيب E_1F_1، ...، $E_{n-1}F_{n-1}$، AC العلاقة

(2) $$\frac{E_kF_k}{E_{k+1}F_{k+1}}=\frac{2k}{2k+2}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1\leq k\leq n-1)$

حيث $E_n=A$ و $F_n=C$.



نضع $s_1=1$، و ...، و $s_k=\sum_{p=1}^{k}(2p-1)$، فيكون $2k-1=s_k-s_{k-1}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(2\leq k\leq n)$.

المتتالية $(s_k-s_{k-1})_{2\leq k\leq n}$ هي إذاً متتالية أعداد فرديّة متوالية تبدأ بالعدد ٣، ووفق القضيّة ٣ـ٢، تكون $(s_k)_{1\leq k\leq n}$ متتالية مربّعات متوالية تبدأ بالعدد ١.

من جهة أخرى، لدينا وفقاً للفرضيّة (1)، $\frac{BG_1}{G_1G_2}=\frac{1}{3}$، فنحصل على: $\frac{BG_1}{BG_2}=\frac{1}{1+3}$،

ويكون: $\frac{s_1}{s_2}=\frac{BG_1}{BG_2}$.

لكن وفقاً للقضيّة ٢٠ من المقالة الأولى من كتاب "مخروطات" أبلونيوس، يكون $\frac{BG_1}{BG_2}=\frac{G_1F_1^2}{G_2F_2^2}$، فنحصل على: $\frac{s_1}{s_2}=\frac{G_1F_1^2}{G_2F_2^2}$.

وبالاستدلال نفسه نثبت أنّ $\frac{s_{k-1}}{s_k}=\frac{G_{k-1}F_{K-1}^2}{G_kF_k^2}$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(3\leq k\leq n)$، فيكون:

$$\frac{G_1F_1^2}{s_1}=\frac{G_2F_2^2}{s_2}=\ldots=\frac{G_{K-1}F_{K-1}^2}{s_{K-1}}=\frac{G_KF_K^2}{s_k}=\ldots=\frac{G_{n-1}F_{n-1}^2}{s_{n-1}}=\frac{G_nF_n^2}{s_n}.$$

لكن بما أنّ s_1، ...، s_n مربّعات متوالية تبدأ بالعدد ١، فإنّ $s_1^{\frac{1}{2}}$، ...، $s_n^{\frac{1}{2}}$ أعدادٌ صحيحة متوالية تبدأ بالعدد ١. إذاً، تكون القِطَع G_1F_1، ...، G_nF_n متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية التي تبدأ بالعدد١.

وبما أنّ $E_kF_k = 2G_kF_k$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \leq k \leq n)$ ، فإنّ E_1F_1، E_nF_n متناسبة مع الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢.

ملاحظة – نشير إلى أنّ ثابتاً يأخذ كخطّ ترتيب، الوتر بأكمله، أي ضعف خطّ الترتيب المعتاد. وبالنتيجة، إذا كانت الإحداثيّات الأولى، المعنية بالأمر، متناسبة مع المربّعات المتوالية، فإنّ الإحداثيّات الثانية، أي خطوط الترتيب، الموافقة لها متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية، وبالنسبة إلى ثابت فإنّ أضعافها متناسبة مع الأعداد الزوجيّة المتوالية. يوافق، إذاً، تقسيم القطر BD إلى قِطَع (عددها n) مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتوالية، تقسيم ثانٍ للمستقيم DA إلى أجزاء متساوية عددها n، وبالعكس. وقد استخدم ثابت التطابق العكسي في القضيّة ١٨.

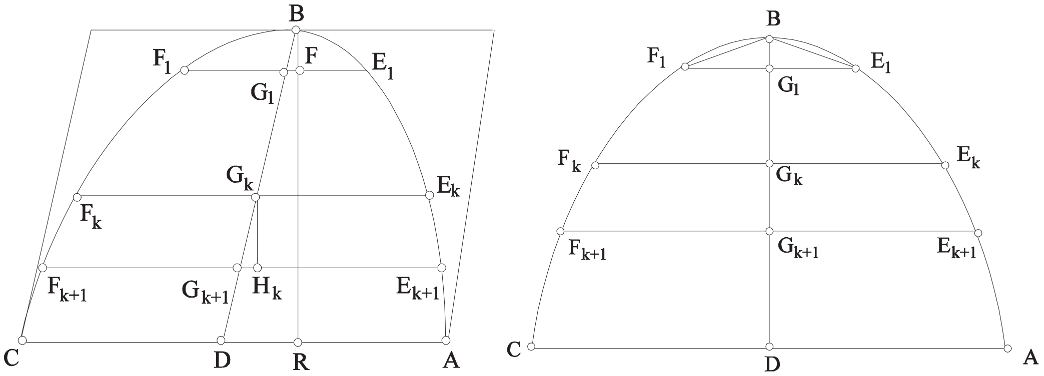
القضيّة ١٧ – لتكن P قطعة من قِطع مكافئ قطره BD. إذا أخذنا تقسيمة للقطر BD:

BG_1، G_1G_2، ...، $G_{n-1}D$، بحيث يكون:

$$\frac{G_kG_{k+1}}{G_{k+1}G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3} \quad \text{لكلّ مؤشّرٍ } k \text{ مع } (0 \leq k \leq n-2) \qquad (1)$$

(حيث $B = G_0$ و $D = G_n$)، وإذا كانت $E_1G_1F_1$، ...، $E_{n-1}G_{n-1}F_{n-1}$، ADC خطوطَ الترتيب الموافقة، وكان BR العمود المسقط من B على AC، وF نقطة التقاء BR مع E_1F_1، وإذا سمّينا S_n مساحة المضلع $AE_{n-1}...E_1BF_1...F_{n-1}C$، يكون لدينا:

$$\frac{2}{3}AC \cdot BR - S_n = \frac{n}{3}BF \cdot G_1F_1.$$



<u>الحالة الأولى</u> – القطر BD هو محور تناظر القطع المكافئ ($BD = BR$ ؛ $G_1 = F$).

استناداً إلى (1) وإلى القضيّة ١٦، لدينا

$$\frac{E_k F_k}{2k} = \frac{E_{k+1}F_{k+1}}{2k+2}$$ لكلّ مؤشّرٍ k مع $(1 \le k \le n-1)$

(حيث $E_n = A$ و $F_n = C$).

واستناداً إلى القضيّة ١٣، لدينا :

$$\sum_{k=0}^{n-1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{E_k F_k + E_{k+1}F_{k+1}}{2} + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} = \frac{2}{3} AC \cdot BD \qquad (2)$$

(حيث $E_o = F_0 = B$).

لكنّ $G_k G_{k+1} . \frac{E_k F_k + E_{k+1}F_{k+1}}{2}$ هي مساحة المربّع المنحرف $E_{k+1}E_k F_k F_{k+1}$ذي الارتفاع $G_k G_{k+1}$؛ فيكون $S_n + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} = \frac{2}{3} AC \cdot BD$، ونحصل على النتيجة، لأنّ $G_0 G_1 = BF$ و $G_1 F_1 = \frac{E_1 F_1}{2}$.

<u>الحالة الثانية</u> – القطر BD ليس محور تناظر القطع المكافئ، فيكون $BD \ne BR$.

لنُخرج من النقطة G_k العمود $G_k H_k$ على خط الترتيب $E_{k+1}F_{k+1}$، لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le k \le n-1)$ وحيث يكون $H_0 = F$.

لكلّ مؤشّرٍ k مع $(0 \le k \le n-1)$ ، المثلثان $G_k G_{k+1} H_k$ و BDR متشابهان، فيكون

$$\frac{G_0 H_0}{G_0 G_1} = \frac{G_k H_k}{G_k G_{k+1}} = \frac{BR}{BD} \qquad (3)$$ لكلّ مؤشّرٍ k، $(0 \le k \le n-1)$

ويكون

$$\frac{\sum_{k=0}^{n-1} G_k H_k \cdot \frac{1}{2}\left(E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}\right)}{\sum_{K=0}^{n-1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{1}{2}\left(E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}\right)} = \frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} \cdot \qquad (4)$$

غير أنّ

$$\frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} = \frac{\frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}} \cdot \qquad (5)$$

نلاحـظ أنّ بسـط (أي صـورة) الطـرف الأيسـر للعلاقـة (4) هـو المسـاحة S_n للمضـلع $AE_{n-1}...E_1BF_1...F_{n-1}C$. من العلاقتين (4) و (5)، نحصل على:

$$\frac{BR \cdot AC}{BD \cdot AC} = \frac{S_n + \frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\sum_{k=0}^{n=1} G_k G_{k+1} \cdot \frac{1}{2}\left(E_k F_k + E_{k+1} F_{k+1}\right) + \frac{n}{3} G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}} \cdot$$

لكن، استناداً إلـى القضيّة ١٣، فـإن مقـام (أي مخـرَج) الطـرف الأيسـر يسـاوي $\frac{2}{3} BD.AC$،

فيكون : $\frac{BR.AC}{BD \cdot AC} = \frac{S_n + \frac{n}{3} G_0 H_0 \cdot \frac{E_1 F_1}{2}}{\frac{2}{3} BD \cdot AC}$، ومنها نحصل على النتيجة.

<u>**ملاحظات.**</u>

١) من أجل شرح بناء مضلّع عدد رؤوسه $2n+1$ ومحاطٍ بقطعة من قطع مكافئ، لأيِّ قيمة للعدد n، يستخدم ثابت بن قرّة القضيّة ١٦ بهدف تطبيق القضيّة ١٣ في البرهان.

٢) يعطي ثابت بن قرة عبارة الفرق بين ثلثي مساحة متوازي الأضلاع المُرفـَق بـالقطع المكافئ والمساحة S_n للمضلّع المحاط.

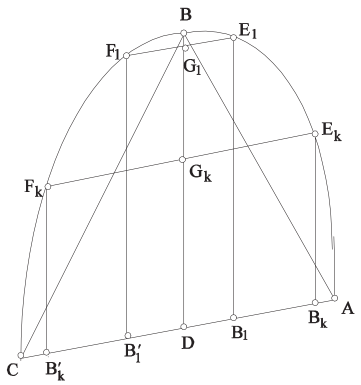
٣) تـُعالـَج الحالـة الثانيـة مباشرة، بـدون استخدام الحالـة الأولـى التـي ليسـت سـوى حالـة خاصّة منها حيث يكون $BR = BD$، فيكون $H_k = G_{k+1}$.

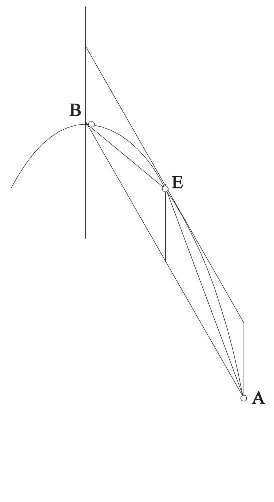
٤) نلاحظ أنّ حاصل ضرب $BR.AC$ هو المساحة S لمتوازي الأضلاع ذي القاعدة AC، المُرفـَق بقطعـة القطـع المكـافئ. وهـو يتحـدّد بواسـطة خـطّ التمـاسّ فـي النقطـة B والخطّـين

الموازيين للقطر والمارّين بالنقطتين A و C. حاصل الضرب $BF.F_1G_1$ هو مساحة المثلث BE_1F_1.

القضيّة ١٨– ليكن ABC قطعة من قِطع مكافئ، BD قطرها و S مساحتها. توجَد، عندئذ، لأيّ عدد ε $(\varepsilon > 0)$، تقسيمة (G_k) للقطر BD، $0 \leq k \leq 2^{n-1}$، (مع $G_0 = B$ و $G_{2^{n-1}} = D$)، تحقّق العلاقة $\frac{G_kG_{k+1}}{G_{k+1}G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$، وبحيث تحقّق المساحة S_n للمضلع P_n المرفق بهذه التقسيمة الثانية، المتباينةَ $S - S_n < \varepsilon$.

ليُقسَم المستقيم AC إلى أجزاء متساوية عددها 2^n، بواسطة النقاط B_k و B'_k، $0 \leq k \leq 2^{n-1}$، حيث تكون النقطتان B_k و B'_k، لكلّ مؤشّر k، متناظرتين بالنسبة إلى النقطة D منتصف AC، وحيث $B_0 = D$ و $B_{2^{n-1}} = A$ و $B'_{2^{n-1}} = C$. نـُخرج من كلّ واحدة من هذه النقاط المستقيمَ الموازي للقطر BD، فنحدِّد الرؤوسَ الـ $2^n + 1$ للمضلع P_n، $A...E_k...E_1BF_1...F_K...C$، ولتكن S_n مساحته.





نريد أن نجد n بحيث يكون $S - S_n < \varepsilon$.

لنبنِ P_1، الذي هو المثلث ABC، ولتكن S_1 مساحته، يكون لدينا: $S_1 > \frac{1}{2}S$، فيكون $S - S_1 < \frac{1}{2}S$،

ا) إذا كان $\frac{1}{2}S<\varepsilon$، يكون لدينا $S-S_1<\varepsilon$، ويكون P_1 حلاً للمسألة.

ب) إذا كان $\frac{1}{2}S>\varepsilon$، نضاعف التقسيمة، ونبني P_2 ونسمّي مساحته S_2. إذا استخدمنا المقدّمة التالية: إذا كانت E الرأس الموافق للوتر AB من قطع مكافئ، تكون مساحة المثلّث AEB أكبر من نصف مساحة القِطعة AEB من القطع المكافئ، فيكون لدينا $S_2-S_1>\frac{1}{2}(S-S_1)$، لكن $S-S_2=(S-S_1)-(S_2-S_1)$، فنحصل على:

$$S-S_2<\frac{1}{2}(S-S_1)<\frac{1}{2^2}S\text{؛}$$

أ) إذا كان $\frac{1}{2^2}S<\varepsilon$، يكون P_2 حلاً للمسألة؛

ب) إذا كان $\frac{1}{2^2}S>\varepsilon$، نكرِّر العمليّة ونبني المضلّع P_3، وهكذا يكون لدينا على التوالي:

$$S-S_3<\frac{1}{2}(S-S_2)<\frac{1}{2^3}S$$

$$S-S_4<\frac{1}{2}(S-S_3)<\frac{1}{2^4}S$$

...

$$S-S_n<\frac{1}{2}(S-S_{n-1})<\frac{1}{2^n}S$$

ووفق القضيّة ١ من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، لكلّ ε معلوم، يوجد عدد n بحيث يكون $\frac{1}{2^n}S<\varepsilon$، فنحصل على $S-S_n<\varepsilon$.

المضلّع P_n الموافق هو المضلّع المطلوب.

يبقى أن نبيّن أنّ المضلّع P_n المحدَّد بهذه الطريقة، بالنسبة إلى ε المعلوم، يتوافق مع تقسيمة للقطر BD إلى قِطَع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١.

على القطعة المستقيمة DA، تعطي النقاط $B_{2n-1}...B_k...B_1$ تقسيمة للمستقيم DA إلى قِطَع $DA...DB_k...DB_1$ متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية من ١ إلى 2^{n-1}؛ في هذه الحالة تكون القِطَع $B_1B'_1$، ... $B_kB'_k$ ... AC متناسبة مع الأعداد الزوجيّة المتوالية. وبما أنّ خَطَّي

الترتيب للنقطتين E_k و F_k متساويان وهما DB_k و DB'_k، فإنّ E_kF_k يتوازى مع AC، وفق القضيّة ٥ من المقالة الثانية من "مخروطات" أبولونيوس، ويقطع BD على النقطة G_k، لكلّ مؤشِّرٍ k مع $\left(0 \le k \le 2^{n-1}\right)$، فنحصل إذاً، على النقاط B، G_1، ...، G_k، ...، $G_{2^{n-1}}$، على القَطر BD. واستناداً إلى القضيّة العكسيّة للقضيّة ١٦، تكون القِطَع BG_1، G_1G_2، ...، $G_{2^{n-1}-1}G_{2^{n-1}}$ متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛ يكون لدينا إذاً

$$\frac{G_kG_{k+1}}{G_{k+1}G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$$ لكلّ مؤشِّرٍ k مع $\left(0 \le k \le 2^{n-1}-2\right)$.

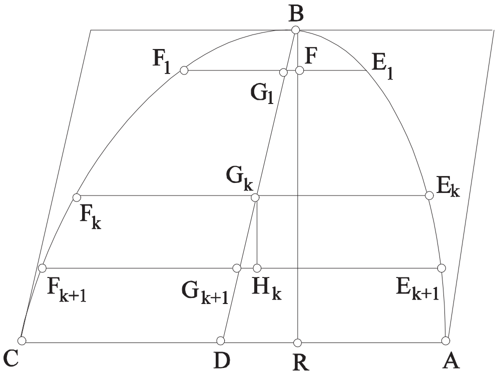
القضيّة ١٩ – لتكن ABC قِطعة من قطع مكافئ و S مساحة متوازي الأضلاع ذي القاعدة AC المقترن بالقطع المكافئ. عندئذ، يوجَد لأيّ عدد ε (حيث $\varepsilon > 0$)، مُضلّعٌ P_n مساحته S_n محاطٌ بقطعة من القطع المكافئ بحيث يكون $\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$.

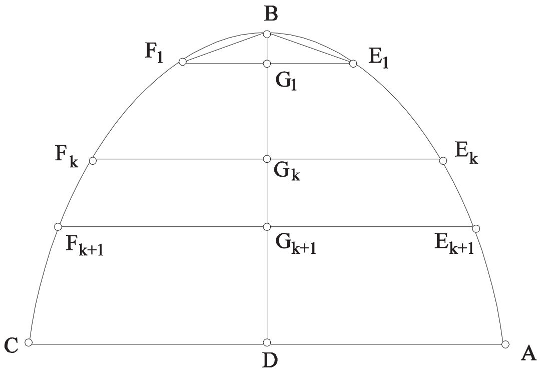
لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ قطرها BD وقاعدتها AC. ليكن ε عدداً ما (مع $\varepsilon > 0$). استناداً إلى القضيّة ١٥، توجد تقسيمة $\left(G_k\right)_{0 \le k \le n}$ للقطر BD ($G_0 = B$ و $G_n = D$)، بحيث يكون: $\frac{G_kG_{k+1}}{G_{k+1}G_{k+2}} = \frac{2k+1}{2k+3}$ لكلّ مؤشِّرٍ k مع $\left(0 \le k \le n-2\right)$ ؛ كما توجد متتالية قِطَع مستقيمة $\left(H_j\right)_{1 \le j \le n}$ لكلّ مؤشِّرٍ j مع $\left(1 \le j \le n\right)$ ، مع $\left(H_n = AC\right)$، بحيث يكون:

$$\frac{H_j}{H_{j+1}} = \frac{2j}{2j+2}$$ لكلّ مؤشِّرٍ j مع $\left(1 \le j \le n-1\right)$

وبحيث يكون:

$$\frac{n \cdot G_0G_1 \cdot \frac{H_1}{2}}{BD \cdot AC} < \frac{\varepsilon}{BD \cdot AC}. \qquad (1)$$





لكن، استناداً إلى القضيّة ١٦، يُمكن أن تتوافق التقسيمة $(G_k)_{0\le k\le n}$ مع متتالية خطوط الترتيب $(E_kF_k)_{1\le k\le n}$، مع $E_nF_n = AC$، بحيث يكون:

$$\frac{E_kF_k}{E_{k+1}F_{k+1}} = \frac{2k}{2k+2} \quad \text{لكلّ مؤشِّرٍ } k \text{ مع } (1\le k \le n-1)$$

وبما أنّ $H_n = E_nF_n = AC$، وبما أنّ هناك من جهة أخرى، متتالية وحيدة (H_j)، يكون لدينا $H_1 = E_1F_1$، فتعاد كتابة المتباينة (1) على الشكل التالي:

$$\frac{n\cdot G_0G_1\dfrac{E_1F_1}{2}}{BD.AC} < \frac{\varepsilon}{BD.AC}. \qquad (2)$$

يكون لدينا إذاً $n.G_0G_1.\dfrac{E_1F_1}{2} < \varepsilon$، فنحصل على $\dfrac{n}{3}\cdot G_0G_1\cdot\dfrac{E_1F_1}{2} < \varepsilon$.

ليكن BR العمود المُخرَج من B على AC، ولتكن F نقطة التقائه مع E_1F_1؛ يكون لدينا $BF < G_0G_1$، فنحصل على $\dfrac{n}{3}BF\cdot\dfrac{E_1F_1}{2} < \varepsilon$. لكن، وفق القضيّة ١٧، لدينا:

$\dfrac{2}{3}S - S_n = \dfrac{n}{3}BF\cdot\dfrac{E_1F_1}{2}$، فنحصل على $\dfrac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$.

ملاحظة أولى

١) تؤمّن القضيّة ١٥:

أ) وجود التقسيمة $(G_i)_{0\le i\le n}$ وتَناسب قِطَع المستقيم الحاصلة مع الأعداد الفرديّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ١؛

ب) وجود ووحدانيّة متتالية قِطَع مستقيمة $(H_j)_{1\le j\le n}$ حيث $H_n = BC$، متناسبة مع الأعداد الزوجيّة المتوالية ومحقّقة للعلاقة

$$.n \cdot G_0 G_1 . \frac{H_1}{2} < \varepsilon \qquad (1)$$

٢) تبيّن القضيّة ١٦ أنه، إذا تحقّق البند أ)، فإنّ حدود متتالية خطوط الترتيب $(E_j F_j)$، المرفقة بالتقسيمة (G_i)، متناسبة مع الأعداد الزوجيّة المتوالية التي تبدأ بالعدد ٢؛ بما أنّ $E_n F_n = BC = H_n$، فإنّ وحدانيّة H_j تسمح بإعادة كتابة المتباينة (1)، وبذلك يكون $.n \cdot G_0 G_1 \cdot \frac{E_1 F_1}{2} < \varepsilon$

٣) بواسطة تحديد إضافيّ من أعلى وبواسطة القضيّة ١٧، نحصل على النتيجة المطلوبة.

ملاحظة ثانية ـ تبيّن القضيّة ١٧ أنّ $\frac{2}{3}S$ راجحٌ على S_n (أي أنَّ S_n محدود من أعلى بـِ $\frac{2}{3}S$)، لأيِّ عدد n.

وتبيّن القضيّة ١٩ أن $\frac{2}{3}S$ هو أصغر راجح على S_n. فبالاستناد إلى القضيّة ١٧، لأيِّ عدد n، يكون لدينا : $\frac{2}{3}S - S_n = \alpha_n$، مع $(\alpha_n > 0)$؛ وبالاستناد إلى القضية ١٩، لأيِّ عدد ε $(\varepsilon > 0)$، يوجد N، بحيث يكون لدينا $0 < \alpha_n < \varepsilon$، لأيِّ عدد n مع $n > N$.

ملاحظة ثالثة ـ يُمكننا أن نتبين أنّ ثابتاً يستخدم الأعداد ε بسهولة؛ فهو في الواقع، وانطلاقاً من أيّ قيمة مثبتة لـِ ε، يُدخل ε' بحيث يكون $\varepsilon' = \frac{\varepsilon}{\alpha}$ مع $\alpha = BD.AC$، وهكذا يسمح العددُ α باستخدام القضيّة ١٥ بطريقة فعّالة.

القضيّة ٢٠ – مساحة القطع المكافئ لا متناهية، لكنَّ مساحة أيِّ قِطعة منه تساوي ثلثي مساحة متوازي الأضلاع المرفق بهذه القِطعة من القطع المكافئ.

لتكن s مساحة القطعة من القطع المكافئ P، وS مساحة متوازي الأضلاع المرفق بهذه القطعة.

إذا كان $\frac{2}{3}S \neq s$، يكون لدينا حالتان:

الحالة الأولى: $s > \frac{2}{3}S$. في هذه الحالة نضع:

(1) $$s - \frac{2}{3}S = \varepsilon$$ ،

ويكون $\varepsilon > 0$.

استناداً إلى القضيّة ١٨، يوجد لهذا العدد ε، عددٌ N بحيث، لكلّ عددٍ n، مع $n > N$، يحقّق المضلّع P_n ذي المساحة S_n المتباينة :

(2) $$s - S_n < \varepsilon$$ ؛

فاستناداً إلى (1) و (2)، يكون $\left(\frac{2}{3}S + \varepsilon\right) - S_n < \varepsilon$، فنحصل على $\frac{2}{3}S < S_n$.

لكن، استناداً إلى القضيّة ١٧، يكون لدينا: $\frac{2}{3}S > S_n$،

من هنا يحصل التناقض، أي أنّ العلاقة $s > \frac{2}{3}S$ مستحيلة.

الحالة الثانية: $s < \frac{2}{3}S$. في هذه الحالة نضع

(3) $$\frac{2}{3}S - s = \varepsilon$$.

فيكون $\varepsilon > 0$.

استناداً إلى القضيّة ١٩، يوجد لهذا العدد ε، عددٌ N بحيث، لكلّ عددٍ n، مع $n > N$، يحقّق المضلع P_n ذي المساحة S_n المتباينة

(4) $$\frac{2}{3}S - S_n < \varepsilon$$ ؛

استناداً إلى (3) و (4)، يكون لدينا : $(s+\varepsilon) - S_n < \varepsilon$، فنحصل على $s < S_n$.

لكنّ P_n محاط بـِ P، فيكون $S_n < s$. من هنا يحصل التناقض، أي أنّ العلاقة $s < \frac{2}{3}S$ مستحيلة.

من استحالة العلاقتين $s > \frac{2}{3}S$ و $s < \frac{2}{3}S$، نستنتج أنّ : $\frac{2}{3}S = s$.

ملاحظة – تعود هذه المبرهنة إلى إثبات وحدانيّة الحد الأعلى وتستخدِم في البرهان بشكل أساسي خصائصَ الحد الأعلى.

في الواقع، نريد أن نثبت أنّ $s = \frac{2}{3}S$، عِلماً بأنّ :

١) $s = \text{borne sup.}(S_n)_{n\geq 1}$ (*borne sup.* يرمز إلى الحدّ الأعلى)

٢) $\frac{2}{3}S = \text{borne sup.}(S_n)_{n\geq 1}$.

لنفترض أنّ $s \neq \frac{2}{3}S$. لدينا الحالتان أ) و ب):

أ) $s > \frac{2}{3}S$، فيوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $s - \frac{2}{3}S = \varepsilon$.

لكن استناداً إلى ١)، s هو أصغر راجح على S_n؛ إذاً للعدد ε، يوجد S_n بحيث يكون $S_n > s - \varepsilon$، فيكون $\frac{2}{3}S < S_n$؛ وهذا محال لأنّ $\frac{2}{3}S$ هو راجح على S_n، وفق العلاقة (2).

ب) $\text{S} < \frac{2}{3}S$، إذا يوجد $\varepsilon > 0$ بحيث يكون $\frac{2}{3}S - \text{S} = \varepsilon$. لكن استناداً إلى ٢) $\frac{2}{3}S$ هو أصغر راجح على S_n؛ إذاً، بالنسبة إلى هذا العدد ε، يوجد S_n بحيث يكون $S_n > \frac{2}{3}S - \varepsilon$؛ إذاً $s < S_n$؛ وهذا محال لأنّ s هو راجح على S_n، وفقاً لـِ ١).

وبديهيّ أننا لا ندّعي أنّ ثابت بن قرّة، أو أنّ أحداً من أسلافه، أو خلفائه حتى القرن الثامن عشر، قد عَرَّف مفهوم الحدَّ الأعلى. لكن، وبالمقابل، يبدو لنا أنه استخدم خصائص الحدّ الأعلى كفكرة هادية في دراسة مساحات المجموعات المُحَدَّبة.

٢-٢-٣ نصّ

"كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يسمّى المكافئ"
لثابت بن قرّة الحرّاني

ا – ٢٦ – ظ
ب – ١٢٢ – ظ
ق – ١٦٥ – ظ

صدر

الأعداد المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد آخر. والأعداد الأفراد المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد فرد آخر. وكذلك الأعداد الأزواج المتوالية هي التي ليس فيما بينها عدد زوج آخر. والأعداد المربعة المتوالية أيضًا هي التي ليس فيما بينها عدد مربع آخر.

وأقول قولاً مجملاً: إن المتوالية من كل الأصناف هي التي ليس فيما بينها من ذلك الصنف شيء آخر.

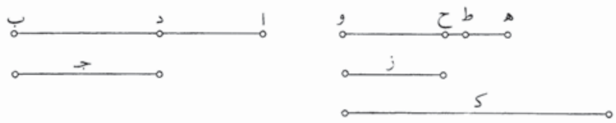
الأشكال

– آ – كل عددين مربعين متواليين فإن فضل ما بينها عدد فرد.

فليكن عددان مربعان متواليان عليها اب جـ، وليكن فضل ما بينها اد.

فأقول: إن اد عدد فرد.

1 البسملة: نجد بعدها «وما توفيقي إلا بالله» [ا] – 2-3 كتاب ... الحرّاني: كتاب ثابت بن قرة في مساحة قطع المخروط الذي يسمى المكافئ [ا، ب] – 3 الحراني: كتب بعدها «رحمة الله عليه» [ق] – 4 صدر: ناقصة [ا، ب] – 5 فيما: فوق السطر [ا] / فيما: ناقصة [ا، ق] – 7 والأعداد: الأعداد [ا، ق] وهو صحيح في [م] / أيضًا: ناقصة [ا، ق] – 8 الأصناف: الاشياء [ا، ق] – 10 الأشكال: ناقصة [ا، ب] – 11 عدد: ناقصة [ب] – 12 متواليان: ناقصة [ا، ق] – 13 اد: نجد بعدها «عدد فرد» [ا].



برهان ذلك: أنّا نجعل ضلع ا ب عدد ه و وضلع جـ عدد ز، ونفصل من ه و مثل ز وهو و ح، فأقول إن ه ح هو واحد.

فإن لم يكن كذلك، فهو أكثر من واحد لأنه فضل ما بين عددين. فليكن الواحد منه ح ط، وليكن مربع عدد و ط عدد ك. وعدد و ط أكثر من ز وأصغر من عدد ه و. فعدد ك أكثر من ⟨مربع⟩ ز وأصغر من ⟨مربع⟩ عدد ه و. فعدد ك أكثر من جـ وأصغر من عدد ا ب وهو عدد مربع. ففيما بين عددي ا ب جـ المربعين عدد مربع، وقد كانا متواليين، هذا خلف.

فإذًا ح ه هو واحد، ومربع عدد ه و مساوٍ للمربعين الكائنين من ه ح ح و ومع المجتمع من ضرب ه ح في ح و مرتين. فأما المربع الكائن من و ح فهو جـ، لأن و ح مثل ز. وأما مربع عدد ه و فهو ا ب، وفضل ما بينهما ا د. فالذي يكون من ضرب ه ح في ح و مرتين مع المربع الكائن من ه ح مساوٍ لعدد ا د، والذي يكون من ضرب عدد ه ح في ح و عدد ما، والذي يكون من ضرب ه ح في ح و مرتين عدد زوج. والمربع الكائن من ه ح واحد. وإذا زيد على الزوج واحد، كان المجتمع من ذلك فردًا. فالذي يكون من ضرب ه ح في ح و مرتين مع المربع الكائن من ه ح عدد فرد، وهو مساوٍ لعدد ا د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

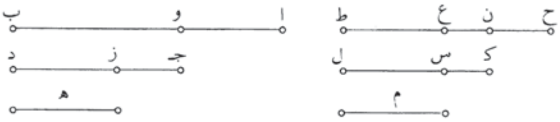
وقد تبيّن مما قلنا أنه إذا كان جـ واحدًا كان ا د ثلاثة.

– ب – كل ثلاثة أعدادٍ مربعة متوالية فإن فضل ما بين أكبرها وأوسطها / يزيد على فضل ما بين أوسطها وأصغرها اثنين. ق – ١٦٦ – و

1 ز (الثانية): ا د [ا] – 3 الواحد: للواحد [ا، ق] وهو صحيح في [م] – 4 و ط (الأولى): و ه [ا] – 5-4 فعدد ... ه و: ناقصة [ب، ق] – 5 جـ وأصغر: عدد أصغر [ا] / عدد: ناقصة [ا، ب] / ا ب: كتب بعدها «فعدد ك أكثر من عدد أصغر من ا ب»، ثم ضرب عليها بالقلم [ق] – 6 ففيما: فيما [ب] / المربعين: والمربعين [ب] – 7 فإذًا: ف [ا، ق] / واحد: الواحد [ب] / ه ح: ه حـ [ا] / ح و: ح ه [ب] – 8 ح و: ه و [ا] / و ح: ه ح [ا] / لأن: ولأن [ب] / و ح: ه ح [ا] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 9 ه و: ه [ب] – 10 والذي: فالذي [ب] / عدد (الأولى): ناقصة [ا، ق] / والذي: فالذي [ب] – 11 واحد: واحدا [ق] / واحد: واحدا [ق] – 12 من ذلك: ناقصة [ب] / فردًا: فرد [ا] وهو صحيح في [م] – 13 ا د: نجد بعدها «فعدد فرد» [ب]، وربما كان الأصل «فعدد ا د عدد فرد» وسقطت ا د من [ب] وسقطت كل الجملة من المخطوطات الأخرى – 14 تبين: يتبين [ا] / إذا: ان [ق] اذ [ا] وهو صحيح في [م] / جـ: ح [ب] / كان: فان [ب] – 15 أكبرها: أكبرهما [ا، ق] أكثرها [ب] وهو صحيح في [م] / وأوسطها: وأوسطها [ا، ق] وهو صحيح في [م] – 16 أوسطها وأصغرها: أوسطها وأصغرهما [ا، ق] وهو صحيح في [م].

فليكن ثلاثة أعداد مربعة متوالية عليها ا ب جـ د هـ وأعظمها ا ب. ولتكن زيادة جـ د على هـ عدد جـ ز وزيادة ا ب على جـ د عدد ا و.

فأقول: إن ا و يزيد على جـ ز اثنين.



برهان ذلك: أنّا نجعل ضلع ا ب ح ط وضلع جـ د ك ل وضلع هـ م. ونفصل من ح ط مثل ك ل وهو ط ن، ومن ك ل مثل م وهو ل س. ونبيّن كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا أن كلّ واحد من ك س ح ن واحد، وأن الذي يكون من ضرب ح ن في ن ط مرتين مع المربع الكائن من ح ن مساوٍ لعدد ا و، وأن الذي يكون من ضرب/ ك س في س ل مرتين مع المربع الكائن من ب - ١٢٣ - و
ك س مساوٍ لعدد جـ ز.

ونجعل ط ع مثل م، فيبقى ن ع مثل ك س ويكون ن ع واحدًا. ويكون المجتمع من ضرب ن ع في ع ط مرتين مع المربع الكائن من ن ع مساويًا لعدد جـ ز. وقد كان المجتمع من ضرب ح ن في ن ط مرتين مع المربع الكائن من ح ن مساويًا لعدد ا و. ففضل ما بين عدد ا و وعدد جـ ز مساوٍ لفضل ما بين المجتمع من ضرب ح ن في ن ط مرتين مع المربع الكائن من ح ن وبين المجتمع من ضرب ن ع في ع ط مرتين مع المربع الكائن من ن ع. فنسقط المربعين المتساويين وهما المربع الكائن من ح ن والمربع الكائن من ن ع، فيبقى فضل ما بين المجتمع من ضرب ح ن في ن ط مرتين وبين المجتمع من ضرب ن ع في ع ط مرتين مساويًا لفضل ما بين عددي ا و جـ ز. ولكن ح ن مثل ن ع، فيبقى فضل ما بين المجتمع من ضرب ن ع في ن ط مرتين وبين المجتمع من

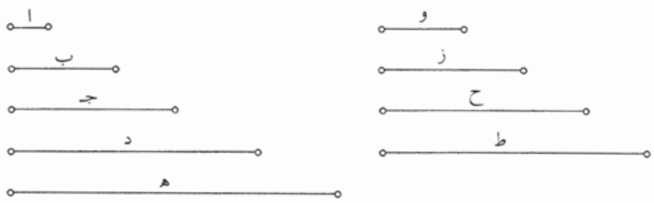
1-2 ولتكن ... ا و: «وليكن زيادة ا ب على جـ د عدد ا و وزيادة جـ د على جـ ز» [ب]، ومن الواضح أن هذه العبارة هي العبارة نفسها مقلوبة ونقص منها «هـ عدد» – 2 وزيادة ... ا و: ناقصة [ا] – 5 ط ن: ط س [ا، ب] / كلّ: كان كل [ا] – 6 ك س: ل س [ا، ب] / ح ن: حـ ن [ا] / ح ن: حـ ن [ا] – 7 ح ن: ح ط [ب] حـ ن [ا] – 9 م: س ل [ب] ل س [ق] ع د س ل [ا] / فيبقى: يبقى [ا، ق] / ن ع: ع ن [ق] س ع [ا] / ن ع: ب ع [ا] – 10 ن ع (الثانية): ح ط [ب] ب ع [ا] / ضرب: ناقصة [ق] – 11 ح ن: حـ ز [ا] / ن ط: حـ ط [ا] / ح ن: حـ ن [ا] / مساويًا: مساو [ا] وهو صحيح في [م] / ففضل: وفضل [ق] فضل [ا] / عدد: عددي [ا] – 10-11 جـ ز... لعدد: ناقصة [ب] – 12 ضرب: ناقصة [ب] – 13 فنسقط: فيسقط [ب] – 15 وبين ... مرتين: ناقصة [ا] / بين المجتمع: ناقصة [ق] / ع ط: ط ع [ب] / مساويًا: مساو [ا] وهو صحيح في [م] / جـ ز: ح ز [ا] – 16 ولكن: لكن [ا، ق] / ح ن: حـ ز [ب] ح ز [ا] / فيبقى فضل: ففضل [ب].

ضرب ن ع في ع ط مرتين مساويًا لفضل ما بين عددي ا و جـ ز. والمجتمع من ضرب ن ع في ن ط مرتين أكثر من المجتمع من ضرب ن ع في ع ط مرتين بمثلي المربع الكائن من ن ع. فعدد ا و أكثر من عدد جـ ز بمثلي المربع الكائن من ن ع. ومثلا المربع الكائن من ن ع هو الاثنان لأن ن ع واحد. فعدد ا و يزيد على عدد جـ ز اثنين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– جـ – فضل ما بين الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد هي الأعداد الأفراد المتوالية ا – ٢٧ – و المبتدئة من الثلاثة.

فلتكن الأعداد المربعة المتوالية ا ب جـ د هـ ، وليكن ا منها واحدًا، ولتكن الأعداد الأفراد المتوالية و ز ح ط ، وليكن عدد و منها ثلاثة.

فأقول/: إن فضل ما بين ب وا هو و، وفضل ما بين جـ وب هو ز ، وفضل ما بين د وجـ هو ق – ١٦٦ – ظ ح ، وفضل ما بين د ⟨و⟩هـ هو ط ، وما بعد ذلك على هذا المثال.



برهان ذلك: أن ا هو الواحد، فزيادة ب عليه ثلاثة، وهي مساوية لعدد و. وفضل ما بين جـ وب أكثر من فضل ما بين ا وب باثنين، لأن أعداد ا ب جـ مربعة متوالية. ففضل ما بين جـ وب مساوٍ لعدد و ومزيدًا عليه اثنان وذلك هو عدد ز. وفضل ما بين د وجـ يزيد على فضل ما بين جـ وب باثنين، وفضل ما بين جـ وب هو عدد ز ، ففضل ما بين د وجـ يزيد على عدد ز اثنين؛ وعدد ح أيضًا يزيد على عدد ز اثنين لأنهما فردان متواليان. ففضل ما بين د وجـ هو عدد ح . وكذلك أيضًا نبيّن أن فضل ما بين هـ ود هو عدد ط ، وما بعد ذلك على هذا المثال؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

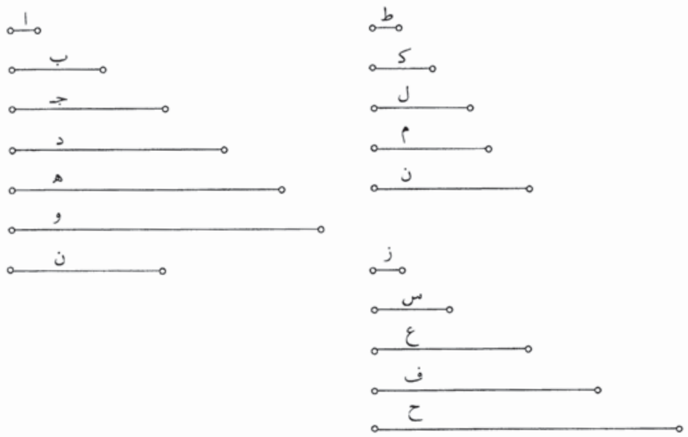
1 مساويًا: مساو[ب] – 2 مرتين (الأولى): ناقصة [ب] / بمثلي: بمثل [ا، ق] / ن ع: كتب بعدها «مرتين» [ق] – 3 بمثلي: بمثل [ا، ق] / ن ع: كتب بعدها «مرتين» [ق] / مثلا: ناقصة [ا، ق] / ن ع: كتب بعدها «مرتين» [ق] ع [ب] / ن ع: ع [ب] – 4 جـ ز: جـ و[ب] – 9 ب وا: ب ا [ب] الواو ناقصة في هذا الشكل، ولن نشير إليها مرة أخرى / ز: ن [ب] – 10 وفضل ... ط: ناقصة [ا، ق] – 11 وهي: فهي [ا، ق] – 12 ا وب: ب ا [ب] / ا ب جـ: ا ب جـ د هـ [ب] – 13 ز: ن [ب] – 14 باثنين: اثنين [ا] / جـ وب: و ب [ا] / هو: أثبتها فوق السطر [ا] / عدد (الأولى): ناقصة [ق] / اثنين: باثنين [ق]، كتب ناسخ [ب] بعدها «وهو عدد ح» – 15 أيضًا: أيضًا كذلك [ق] – 16 نبيّن: يتبين [ب].

وهنالك استبان أنه إذا كانت أعداد آ بَ جَ دَ هَ أعدادًا مبتدئة من الواحد وكان فضل ما بينها على الولاء أعدادًا أفرادًا متوالية مبتدئة من الثلاثة، فإنها أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد./

– دَ – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وزيد على أعظمها واحدٌ، ثم أخذ نصف ما اجتمع فضرب في نفسه، فإن المجتمع من ذلك مساوٍ لتلك الأعداد الأفراد مجموعة. ب – ١٢٣ – ظ

فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية آ بَ جَ دَ هَ، وليكن آ واحدًا وليكن عدد هَ مع الواحد مساويًا لعدد وَ، فعدد وَ زوج لأن عدد هَ فرد. فليكن نصف عدد وَ عدد نَ وليكن المربع الكائن من نَ عدد حَ.

فأقول: إن عدد حَ مساوٍ لأعداد آ بَ جَ دَ هَ الأفراد مجموعة.



برهان ذلك: أنّا نزيد على آ واحدًا فيصير زوجًا. ونأخذ نصف ما اجتمع، وهو واحد، فنجعله طَ. ونزيد على بَ أيضًا واحدًا فيصير زوجًا. ونأخذ نصف ما اجتمع فنجعله كَ. وكذلك نستخرج من عدد جَ عدد لَ ومن عدد دَ عدد مَ. ففضل ما بين كل واحد من أعداد آ بَ جَ دَ هَ وبين العدد الذي يليه اثنان، لأنها أفراد متوالية. وكذلك تفاضلها إذا زدنا عليها واحدًا واحدًا. فإذا أخذنا أنصاف ذلك، كان تفاضلِ ما بين الأنصاف نصف الاثنين / الذي هو الواحد. ق – ١٦٧ – و

1 أعدادًا: ناقصة [ا، ق] / مبتدئة: متوالية [ب] / كان: ناقصة [ب] – 2 بينها: بينها [ب] / أعدادًا: ناقصة [ب] أعداد [ا، ق] / أفرادًا: أفراد [ا، ب، ق] / أفراد متوالية: أثبتها في الهامش [ا] – 4 ثم أخذ: وأخذ [ا، ق] – 5 نفسه: نصفه [ا، ق] / مجموعة: المجموعة [ا، ق] وهو صحيح في [م] – 7 عدد (الأولى): ناقصة [ا، ق] / نَ: زَ [ق] – 8 نَ: زَ [ق] / عدد: ناقصة [ا] – 9 عدد: ناقصة [ا، ق] – 12 ما بين: أثبتها تحت السطر مع «صح» [ق] – 13 العدد: كتب بعدها «الا العدد» [ا].

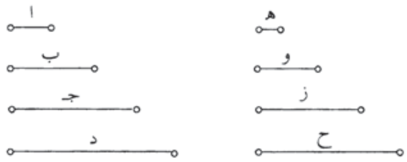
فأعداد ط ك ل م ن هي أعداد متوالية مبتدئة من الواحد. فنجعل مربعاتها أعداد ز س ع ف ح وهي مربعات متواليات مبتدئة من الواحد. ففضل ما بينها مساوٍ للأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الثلاثة وهي ب ج د ه. فعدد ح يزيد على عدد ز عددًا مساويًا لأعداد ب ج د ه مجموعة، ولكن ز هو الواحد وهو مثل ا. فيكون فضل ما بين ح وز مزيدًا على ز مساويًا لأعداد ا ب ج د ه ⟨مجموعة⟩، وفضل ما بين ح وز وا كان مساويًا لعدد ح، فعدد ح مساوٍ لأعداد ا ب ج د ه الأفراد المبتدئة من الواحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وقد تبيّن بما قلنا أن أنصاف أعداد الأزواج المتوالية هي أعداد متوالية.

– ه – إذا كانت أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وبعدّتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإن مربعات الأعداد الأزواج المتوالية إذا جمعت مساويةٌ لمربعات الأعداد الأفراد المتوالية مجموعة مزيدًا عليها نصفُ مربع أعظم الأعداد الأزواج وآحادٌ بعدة الأعداد الأفراد.

فلتكن الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين ا ب ج د وأعظمها د، وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنةٌ لها عليها ه و ز ح وأعظمها ح.

فأقول: إن مربعات أعداد ا ب ج د إذا جمعت مساوية لمربعات أعداد ه و ز ح إذا جمعت وزيد عليها نصف مربع عدد د وآحاد بعدة ه و ز ح.



برهان ذلك: أن كل واحد/ من أعداد ا ب ج د يزيد على قرينه من أعداد ه و ز ح واحدًا، فمربع كل واحد منها يزيد على مربع قرينه من الأفراد مثل المجتمع من ضرب الواحد في ا – ٢٧ – ظ

1 ن: ناقصة [ب] ز [ق] / مربعاتها: مربعها [ب] / أعداد: ناقصة [ب] / ز: ن [ب، ق] – 2 ف: ناقصة [ا] / ح: ناقصة [ب] / وهي: ناقصة [ا، ق] / مربعات متواليات: مربعة متوالية [ا، ق] / بينها: بينهما [ا، ق] – 3 ز: ن [ق] / ب: ا ب [ا] – 4 لكن: ناقصة [ا، ق] / ح وز: ح وبين ز [ب] ح ور د [ا] / ز (الثانية والثالثة): ن [ق] / مساويًا: مساو [ب] – 5 ح وز وا: ن وح وعدد ن [ق] د ح ور م بلو ا [ا] / ح وز وا كان مساويًا: «ح وبين ز مزيدًا على ز مساو» وهذه العبارة هي تكرار لجزء من العبارة السابقة كما نقلها الناسخ [ب] – 6 المبتدئة من الواحد: ناقصة [ب] – 7 وقد ... متوالية: ناقصة [ا، ق] – 8 مبتدئة (الثانية): ناقصة [ا] – 10 مجموعة: المجموعة [ا، ق] – 12 وأعظمها: أعظمها [ب] – 13 أعداد (الثانية): ناقصة [ب] – 14 عدد: ناقصة [ب] – 15 كل: كان [ا] – 16 منها: منهما [ا، ق].

ذلك العدد الفرد مرتين مع مربع الواحد. فجميع مربعات أعداد آ بَ جَ دَ الأزواج يزيد على جميع مربعات / أعداد هَ وَ زَ حَ الأفراد بمثل المجتمع من ضرب الواحد في جميع أعداد هَ وَ زَ حَ مرتين مع مربعات آحاد بعدتها. والمجتمع من ضرب الواحد في أعداد هَ وَ زَ حَ مرتين هو مثلا أعداد هَ وَ زَ حَ، ومربعات الآحاد آحاد. فمربعات أعداد آ بَ جَ دَ مجموعةً تزيد على مربعات أعداد هَ وَ زَ حَ مجموعة مثلي أعداد ⟨هَ⟩ وَ زَ حَ مجموعةً مزيدًا عليها آحاد بعدتها. وإذا زدنا على عدد حَ واحدًا ثم أخذنا نصف ما اجتمع وضربناه في نفسه، كان المجتمع مساويًا لجملة أعداد هَ وَ زَ حَ لأنها أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فجملة مربعات أعداد آ بَ جَ دَ / تزيد على جملة مربعات هَ وَ زَ حَ بمثل المجتمع من ضرب نصف شيء في مثله مرتين، وهما عدد حَ والواحد، مع آحاد بعدة هَ وَ زَ حَ. وعدد حَ إذا زيد عليه الواحد، كان مساويًا لعدد دَ. فجملة مربعات أعداد آ بَ جَ دَ تزيد على جملة مربعات أعداد هَ وَ زَ حَ بمثل المجتمع من ضرب نصف عدد دَ في مثله مرتين ⟨وهو⟩ مساوٍ لنصف مربع عدد دَ مع آحاد بعدة هَ وَ زَ حَ. فجملة مربعات أعداد آ بَ جَ دَ مساوية لجملة مربعات أعداد هَ وَ زَ حَ مع نصف مربع عدد دَ ومع آحاد بعدة هَ وَ زَ حَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ب – ١٢٤ – و

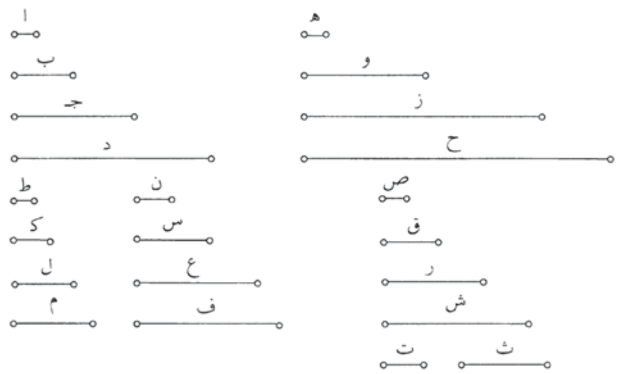
ق – ١٦٧ – ظ

– وَ – إذا كانت أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد وبعدتها أعداد مربعة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإن المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد إذا جمعت وأضعفت مساوية لنصف المربعات الأفراد المتوالية إذا جمعت مزيدًا عليها أعظم المربعات المتوالية ونصف آحاد بعدة المربعات الأفراد المتوالية.

فلتكن المربعات المتوالية المبتدئة من الواحد آ بَ جَ دَ وأعظمها دَ وبعدتها مربعاتٌ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها هَ وَ زَ حَ.

1 الفرد: المفرد [ا، ق] / فجميع: فيجتمع [ب] – 2 أعداد: الأعداد [ب] / هَ وَ زَ حَ: ناقصة [ب] / بمثل: مثل [ا، ق] – 5 مثلي ... مجموعة: ناقصة [ا، ق] / مثلي: مثل [ب] / عليها: كتب بعدها «مثلي أعداد هَ وَ زَ حَ و» [ق] / آحاد: أعداد [ا] – 6 حَ: رح [ا] / ثم أخذنا: وأخذنا [ا، ق] / مساويًا: مساوية [ب] – 8 بمثل: كمثل [ا] / شيء: ناقصة [ا، ق] وترك الناسخ [ا] لها مكانًا – 8-9 في مثله مرتين، وهما عدد حَ والواحد: مجموع حَ والواحد في مثله مرتين [ق] – 10 تزيد: مزيد [ا] وهو صحيح في [م] / بمثل: مثل [ا، ب] – 11 دَ: ناقصة [ب] / مساوٍ لنصف مربع: ناقصة [ا، ق] / عدد: ناقصة [ق] / دَ: ناقصة [ق] / مع آحاد بعدة هَ وَ زَ حَ: ناقصة [ا، ب] كتب ناسخ [ق] بعدها «والمجتمع من ضرب نصف عدد في مثله مرتين مساوٍ لنصف مربع ذلك العدد»، ويبدو لنا أن هذه العبارة هي لأحد النساخ – 12 دَ (الثانية): جَ [ا] / مع: ناقصة [ق] – 19 عليها: وعليها [ق].

فأقول: إن مثلي مربعات ا ب ج د إذا جمعت مساوٍ لنصف مربعات ه و ز ح إذا جمعت مزيدًا عليها مربع د ونصف آحاد بعدة أعداد ه و ز ح.



برهان ذلك: أنّا نجعل أضلاع مربعات أعداد ا ب ج د أعداد ط ك ل م. فتكون أعداد ط ك ل م متوالية مبتدئة من الواحد، ولتكن أضعافها أعداد ن س ع ف. وإذا أضعفت الأعداد [الأفراد] المتوالية كانت أعدادًا أزواجًا متوالية. فأعداد ن س ع ف أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وكل واحد من أعداد ن س ع ف مثلا قرينه من أعداد ط ك ل م. فجملة مربعاتها أربعة أمثال جملة مربعاتها. فمربعات أعداد ن س ع ف أربعة أمثال أعداد ا ب ج د. وأيضًا فإن ‹أعداد› ه و ز ح أعداد مربعة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فلتكن أضلاعها أعداد ص ق ر ش فيكون ص واحدًا.

فأقول: إن أعداد ص ق ر ش أفراد متوالية / مبتدئة من الواحد. ق – ١٦٨ – و

فأما أنها أفراد فهو بيّنٌ، وذلك أنه لو كان فيها زوج لكان مربعه زوجًا. وأما أنها متوالية: فإنه إن أمكن ألّا تكون متوالية، أمكن أن يقع بينها عدد آخر/ فرد. ب – ١٢٤ – ظ

فليكن فيما بين ص ق فرد وهو ت وليكن مربعه عدد ث. وعدد ت أقل من عدد ق وأكثر من عدد ص، فمربع ث أقل من مربع و وأكثر من مربع ه، وهو فرد لأنه مجتمع من ضرب عدد فرد في مثله. فمربعا ه و الفردان ليسا بمتواليين. وقد كانا كذلك، هذا خلف. فأعداد ص ق ر ش

1 مثلي: نجد في هامش [ب] بخط آخر «أي ضعف المربعات المتوالية» – 2 مزيدًا: مزيد [ا] وهو صحيح في [م] – 3 أعداد: ناقصة [ب] / أعداد (الثانية): عليها [ا، ق] – 4 س ع: ع س [ق] – 5 أزواج: أزواجا [ا] وهو صحيح في [م] – 10 فأقول: وأقول [ب] – 11 أنها: انه [ب] / أنه: لأنه [ق] / زوج: زوجًا [ق] – 12 بينها: بينهما [ا، ق] وهو صحيح في [م] – 13 عدد (الأولى): ناقصة [ب] / ت: ث [ا، ب] – 14 و: ق [ا] / لأنه: لا [ا] – 15 الفردان ليسا بمتواليين: الفرد إذن ليستا بمتوالية [ق] الفرد إذن ليسا بمتوالية [ا].

أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وقد كنا بيّنا أن أعداد ن س ع ف أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وعدة ص ق ر ش كعدة ن س ع ف. فمربعات أعداد ن س ع ف إذا جمعت مساوية لمربعات أعداد ص ق ر ش مع نصف مربع عدد ف وآحاد بعدة أعداد ص ق ر ش. ومربعات أعداد ص ق ر ش هي أعداد هـ و ز ح. فمربعات أعداد ن س ع ف إذا جمعت مساوية لأعداد هـ و ز ح مجموعة مع نصف مربع عدد ف وآحاد بعدة أعداد ص ق ر ش. وقد كنا بيّنا أن مربعات أعداد ن س ع ف إذا جمعت كانت مساوية لأربعة أمثال جملة مربعات أعداد ط ك ل م، وهي أعداد ا ب جـ د. فأربعة أمثال أعداد ا ب جـ د المربعة إذا / جمعت مساوية لأعداد هـ و ز ح مجموعة مع نصف مربع عدد ف وآحاد بعدة أعداد ص ق ر ش. ونصف مربع عدد ف مساوٍ لمثلي مربع عدد م لأن عدد ف مثلا عدد م. فأربعة أمثال أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مساوية لأعداد هـ و ز ح مجموعة مزيدًا عليها مثلا مربع عدد م مع آحادٍ بعدة أعداد ص ق ر ش. ومربع عدد م هو عدد د. فأربعة أمثال أعداد ا ب جـ د مجموعة مساوية لأعداد هـ و ز ح مجموعة مزيدًا عليها مثلا عدد د وآحاد بعدة أعداد ص ق ر ش. فإذا أخذنا نصف جميع ما ذكرنا، تبيّن أن مثلي أعداد ا ب جـ د مجموعة مساوٍ لنصف أعداد هـ و ز ح مجموعة مزيدًا عليها عدد د ونصف آحاد بعدة أعداد هـ و ز ح لأن عدتها كعدة ص ق ر ش؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ا – ٢٨ – و

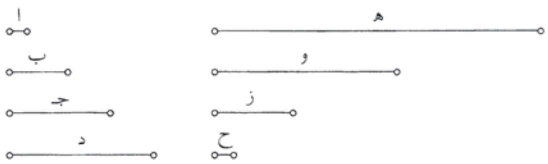
– ز – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فجمعناها وضربناها في واحد، ثم نقصنا من جملتها أعظمها وضربنا الباقي في اثنين، ثم نقصنا من الباقي العدد الذي يلي الأعظم وضربنا ما بقي أيضًا في اثنين، ثم نقصنا من الباقي العدد الذي يلي المنقوص، ثم ضربنا الباقي أيضًا في اثنين، ثم لم نزل نفعل مثل ذلك حتى انتهينا / إلى الواحد، وأجملنا جميع ذلك، فإن هذه الجملة مساوية لنصف مربعات الأعداد الأفراد إذا جمعت مزيدًا عليه نصف آحادٍ بعدتها.

ق – ١٦٨ – ظ

فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد ا ب جـ د، وليكن أعظمها عدد د. ولتكن أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مثل عدد هـ، وأعداد ا ب جـ إذا جمعت مثل عدد و، وعددا ا ب إذا جمعا مثل عدد ز وعدد ا الذي هو الواحد مثل ح.

3 مع: مجموعة مزيدًا عليها [ب] / مربع: ناقصة [ب] / مع ... ش: ناقصة [ا] – 4 ومربعات: فمربعات [ا] – 7 أعداد: ناقصة [ب] / وهي أعداد: هي [ب] / أعداد: ناقصة [ب] – 8 مربع: ناقصة [ب] – 10 مثلا: مثلي [ق] – 11 هو: وهو [ب] – 14 عليها: عليه [ب] – 15 ص ق: قد تقرأ «قوس» [ب] – 16 مبتدئة: ناقصة [ا] – 20 عليه: عليها [ب] – 23 ز: د [ا] / عدد: ناقصة [ا، ق].

فأقول: إنه إذا أجمل المجتمع من ضرب الواحد في هـ مع المجتمع من ضرب الاثنين في و وفي ز وفي ح، كان جميع ذلك مساويًا لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مزيدًا / عليه ب – ١٢٥ – و نصف آحاد بعدة أعداد ا ب جـ د.



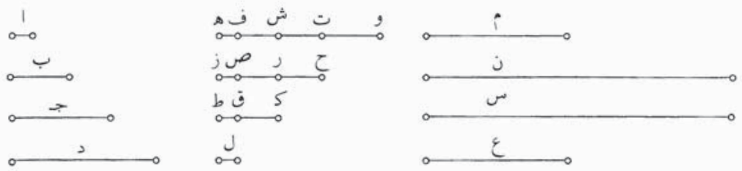
برهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مساوية لعدد هـ، وأعداد ا ب جـ إذا جمعت مساوية لعدد و، وعددا ا ب إذا جمعا مساويان لعدد ز. ففضل ما بين عدد هـ وعدد و هو عدد د. وكذلك نبيّن أيضًا أن فضل ما بين عدد و وعدد ز مساوٍ لعدد جـ، وأن فضل ما بين عدد ز وعدد ح مساوٍ لعدد ب. وأعداد ح ز و هـ هي أعداد مبتدئة من الواحد وهو ح، وفضل ما بينها على الولاء هي أعداد ب جـ د وهي الأفراد المتوالية المبتدئة من عدد ب الذي هو ثلاثة. فأعداد ح ز و هـ هي الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد، ومربعات أعداد ا ب جـ د هي المربعات الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد، وعدتها كعدة أعداد ح ز و هـ. فمثلا أعداد ح ز و هـ إذا جمعت مساوٍ لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مزيدًا عليها عدد هـ ونصف آحاد بعدة أعداد ح ز و هـ. فنسقط منها جميعًا عدد هـ، فيبقى عدد هـ مع مثلي أعداد ح ز و مساوٍ لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت مزيدًا عليها نصف آحاد بعدة أعداد ا ب جـ د. ومثلا أعداد ح ز و هو المجتمع من ضرب الاثنين في ح ز و، وعدد هـ هو المجتمع من ضرب هـ في واحد. فالمجتمع من ضرب هـ في واحد مع المجتمع من ضرب أعداد ح ز و في اثنين مساوٍ لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د إذا / جمعت مزيدًا عليه نصف آحاد بعدة ا – ٢٧ – ظ أعداد ا ب جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1-2 وفي ز: ناقصة [ب] – 2 مربعات: ناقصة [ب] / عليه: عليها [ب] – 4 برهان ذلك: برهانه [ا، ق] / أن أعداد: مكررة [ق] – 5 جمعا: جمعت [ا، ق] / مساويان: مساوية [ا، ق] – 5-6 ففضل ... د: ناقصة [ا، ق] – 6 نبين أيضًا: أيضا نبين [ب] – 7 وأعداد: فأعداد [ب] / هي أعداد: ناقصة [ا، ق] / ح: هـ [ب] – 8 أعداد: ناقصة [ب] / ب: ا ب [ا] / وهي: ناقصة [ا، ق] – 8-9 عدد ... من: مكررة [ا] وليست مكررة في [م] – 12 ز و: و ز [ق] و و [ا] / هـ (الثالثة): د هـ [ا] – 13 أعداد (الثانية): ناقصة [ب] – 14 ومثلا: ومثلي [ا، ب، ق] / وعدد: بعدد [ب] – 15 فالمجتمع: والمجتمع [ب] / واحد: الواحد [ق] – 16 عليه: عليها [ا، ق].

– ح – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبحيالها أعداد مساوية لها أعظمها بحيال الواحد من الأول وأصغرها وهو الواحد بحيال أعظم الأول وما بين ذلك على توالٍ، وضرب كل واحد منها في الذي / بحياله، فإن جملة المجتمع من ذلك مساوية لنصف مربعات تلك ق - ١٦٩ - و الأعداد الأفراد ⟨مجموعة⟩ مزيدًا عليه نصف آحادٍ بعدة الأعداد الأفراد.

فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد ا ب جـ د، وبحيالها أعداد مساوية لها وهي هـ و ز ح ط ك ل، وليكن ا مثل ل وعدد ب مثل ط ك وعدد جـ مثل ز ح وعدد د مثل هـ و. وليكن المجتمع من ضرب ا في هـ و عدد م والمجتمعُ من ضرب ب في ز ح عدد ن والمجتمعُ من ضرب جـ في ط ك عدد س والمجتمع من ضرب د في ل عدد ع.

فأقول: إن أعداد م ن س ع إذا جمعت مساوية لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د مزيدًا عليه نصف آحاد بعدتها.



برهان ذلك: أنّا نجعل كل واحد من هـ ف ز ص ط ق مثل ل الذي هو واحد، فتبقى أعداد ق ك ص ح ف و أزواجًا متوالية مبتدئة من الاثنين، ففضل ما بين كل واحد منها والذي يليه هو الاثنان. فننقص من كل واحد من هذه الأعداد مثل ق ك الذي هو اثنان. والأعداد المنقوصة أعداد ص ر ف ش، فيصير أيضًا عددا ر ح ش و زوجين متواليين مبتدئين من الاثنين. وننقص أيضًا من عدد ش و الباقي عددًا مثل ر ح الذي هو اثنان وهو ش ت، فيبقى ت و اثنين. فالذي يكون من ضرب ا في هـ ف وضرب ب في ز ص وضرب جـ في ط ق وضرب د في ل مساوٍ للمجتمع من ضرب أعداد ا ب / جـ د مجموعة في الواحد. والذي يكون من ضرب ا في ف ش ب - ١٢٥ - ظ وضرب ب في ص ر وضرب جـ في ق ك مساوٍ للمجتمع من ضرب أعداد ا ب جـ مجموعة في

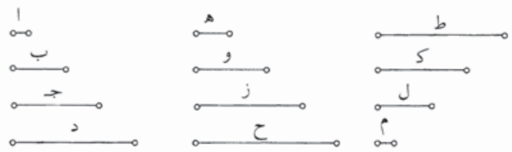
2 وهو الواحد: أثبتها في الهامش [ا] / وضرب: فضرب [ب] – 3 مساوية: مساو [ا، ق] / تلك: ناقصة [ب] – 4 نصف: ناقصة [ب] – 6 عدد: ناقصة [ا، ق] / ط ك: ك ط [ب] / عدد: ناقصة [ا، ق] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 8 ط ك: ط ل [ا] – 10 عليه: عليها [ا، ق] – 11 ط ق: ط و [ا] / فتبقى أعداد: مكررة [ا] وليست مكررة في [م] – 12 ق ك: ف ك [ا] / ففضل: وفضل [ا، ق] – 13 ق ك: ف ك [ا] / اثنان: الاثنان [ب] – 14 ف ش: س ف [ب] / ر ح ش و: ز ح ش ف [ب] – 15 ر ح: ذ ح [ب] ز ح [ا] / فيبقى: يبقى [ا، ق] / اثنين: اثنان [ا، ق] – 16 ضرب (الثانية والثالثة والرابعة): ناقصة [ا، ق] – 17-18 والذي ... في: ناقصة [ا] – 17 ف ش: ش ف [ق] – 18 ضرب: ناقصة [ق] / ص ر: ر ص [ق] / ضرب: ناقصة [ق] / ق ك: ك ق [ب].

الاثنين، والذي يكون من ضرب آ في ش ت وضرب ب في رح مساوٍ للمجتمع من ضرب عددي آ ب مجموعين في الاثنين، وضرب آ في ت ومساوٍ لضرب آ في الاثنين. فأما المجتمع من ضرب آ في هـ ف وفي ف ش وفي ش ت وفي ت و فهو عدد م. وأما المجتمع من ضرب ب في ز ص وفي ص ر وفي رح فهو عدد ن. وأما المجتمع من ضرب جـ في ط ق وفي ق ك فهو عدد س. وأما المجتمع من ضرب د في ل فهو عدد ع. فإذا ضربت أعداد آ ب جـ د مجموعة في الواحد وأعداد آ ب جـ مجموعة في الاثنين وكذلك عددا آ ب وعدد آ، وجمع ذلك كله كان مساويًا لأعداد م ن س ع مجموعة. والذي يكون من ضرب أعداد آ ب جـ د في واحد/ وأعداد آ ب ق – ١٦٩ – ظ جـ وعددي آ ب وعدد آ في اثنين إذا جمع مساوٍ لنصف مربعات أعداد آ ب جـ د إذا جمعت مزيدًا عليه نصف آحاد بعدتها، لأن أعداد آ ب جـ د أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فأعداد م ن س ع إذا جمعت مساوية لنصف مربعات آ ب جـ د إذا جمعت مزيدًا عليه نصف آحاد بعدتها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ط – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ووضعت أعداد أخر مساوية لفضل ما بين أعظم الأعداد الأزواج وبين كل واحد من الأفراد، فإن هذه الأعداد مساوية للأعداد الأفراد، كل واحد لصاحبه.

فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد آ ب جـ د، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها عليها هـ و ز ح. وليكن فضل ما بين عدد ح وعدد آ عدد ط وفضلُ ما بينه وبين عدد ب عدد ك وفضلُ ما بينه وبين عدد جـ عدد ل وفضل ما بينه وبين عدد د عدد م.

فأقول: إن ط مثل د وإن ك مثل جـ وإن ل مثل ب وإن م مثل آ.



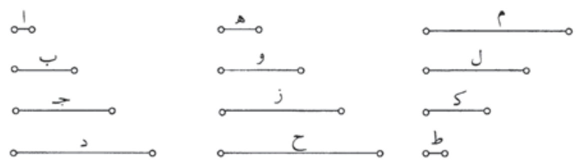
1 الاثنين: ناقصة [ا] / والذي يكون: وكذلك أيضًا المجتمع [ب] / ضرب (الثانية): ناقصة [ا، ق] / رح: د ح [ا] – 2 وضرب آ ... الاثنين: والمجتمع من ضرب آ ب في الاثنين [ا] ناقصة [ب] – 3 فهو: وهو [ا] / ب: جـ [ا] – 4 ق ك: ق ل [ا] – 5 مجموعة: ناقصة [ب] – 6 الاثنين: اثنين [ا، ق] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 8 عددي: ناقصة [ا، ق] عددا [ب] / عدد: ناقصة [ا، ق] عد [ب] – 9 عليه: عليها [ا، ق] / الواحد: الاثنين [ا] – 13 وبين: ومن [ا، ق] – 14 للأعداد الأفراد: للأفراد [ب] – 17 ك: ل [ا] / عدد (الخامسة): ناقصة [ب] – 17-18 وفضل (الثانية) ... م: ناقصة [ا] – 19 إن (الثانية والثالثة والرابعة): ناقصة [ا، ق].

برهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعداد هـ و ز ح أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. ففضل ما بين كل عدد من أعداد ا ب جـ د وقرينه من أعداد هـ و ز ح هو الواحد. وفضل ما بين ح وبين د هو م، فعدد م هو الواحد. فعددا د م إذا جمعا /كانا ا - ٢٩ - و مثل ح وعددا جـ ل إذا جمعا أيضًا مثل ح. فزيادة د على جـ مساوية لنقصان م عن ل. وزيادة د على جـ اثنان لأنهما عددان فردان متواليان، فزيادة ل على م اثنان. وكذلك أيضًا نبيّن أن كل واحدة من زيادات عدد ك على ل وعدد ط على ك اثنان. فأعداد م ل ك ط أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وكذلك كانت أعداد ا ب جـ د فهي إذن مساوية لها. أما ا فمثل م وأما ب فمثل ل وأما جـ فمثل ك وأما د فمثل ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- ي - إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أزواج متوالية / ب - ١٢٦ - و مبتدئة من الاثنين، فإن مربعات الأعداد الأفراد إذا جمعت وزيد / عليها ثلث آحاد بعدتها، ق - ١٧٠ - و كانت مساوية لثلثي المجتمع من ضرب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الأعداد الأزواج.

فلتكن الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد أعداد ا ب جـ د وأعظمُها د، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين عليها هـ و ز ح وأعظمها عدد ح.

فأقول: إن مربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها مساوية لثلثي المجتمع من ضرب أعداد ا ب جـ د مجموعة في عدد ح.



برهان ذلك: أنا نجعل زيادة عدد ح على عدد د مثل ط وزيادته على جـ مثل ك وزيادته على ب مثل ل وزيادته على ا مثل م. فتكون أعداد ط ك ل م مساوية لأعداد ا ب جـ د التي

1 أزواج: ناقصة [ا] – 2 عدد: عددين [ا، ق] / د: د هـ [ب] – 3 بين (الثانية): ناقصة [ا، ق] / فعدد م: ف م [ا، ق] / فعددا د م: ف د م [ا] و د م [ق] وعددا د م [ب] – 4 عددا: ناقصة [ق] / إذا جمعا أيضًا: أيضًا إذا جمعا [ب] / على جـ: ناقصة [ب] – 5 نبيّن: يتبين [ب] – 6 عدد: ناقصة [ا، ق] / ك: ل [ا] / ل: ن [ا] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 7 إذن: اذًا [ب] – 8 م: ب [ا] / د: ن [ا] – 10-11 وزيد ... كانت: أثبتها في الهامش [ا] – 11 الأفراد: ناقصة [ا، ق] / مجموعة: المجموعة [ا، ق] – 13 عدد: ناقصة [ا، ق] – 14 أعداد: ناقصة [ا، ق] – 16 د: ناقصة [ب] / زيادته (الثانية): ناقصة [ب] – 17 ب: ن [ا] / زيادته: ناقصة [ب] / فتكون: يكون [ا، ق].

هي أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعظمها م وأصغرها ط. فالذي يكون من ضرب ا في م ومن ب في ل ومن جـ في ك ومن د في ط إذا جمع مساوٍ لنصف مربعات أعداد ا ب جـ د مزيدًا عليه نصف آحاد بعدتها. ونجعل مربعات أعداد ا ب جـ د مشتركة. فيكون المجتمع من ضرب ا في م ومن ب في ل ومن جـ في ك ومن د في ط مع مربعات أعداد ا ب جـ د مساويًا لمرة ونصف مثل مربعات أعداد ا ب جـ د مزيدًا على ذلك نصف آحاد بعدة أعداد ا ب جـ د. والمجتمع من ضرب ا في م مع المربع الكائن من م مساوٍ للمجتمع من ضرب ا م مجموعين في م. والمجتمع من ضرب ب في ل مع المربع الكائن من ل مساوٍ للمجتمع من ضرب ب ل مجموعين في ل. والمجتمع من ضرب جـ في ك مع المربع الكائن من ك مساوٍ للمجتمع من ضرب جـ ك مجموعين في ك. والمجتمع من ضرب د في ط مع المربع الكائن من ط مساوٍ للمجتمع من ضرب د ط مجموعين في ط. فالمجتمع من ضرب عددي ا م مجموعين في م ومن ضرب ب ل مجموعين في ل ومن ضرب جـ ك مجموعين في ك ومن ضرب د ط مجموعين في ط مساوٍ لمرة ونصف مثل مربعات أعداد ا ب جـ د ⟨مزيدًا عليها⟩ نصف آحادٍ بعدة أعداد ا ب جـ د. وعددا ا م إذا جمعا فهما مثل عدد ح، وكذلك عددا ب ل وعددا جـ ك وعددا د ط. فالذي يكون من ضرب عدد ح في أعداد م ل ك ط مجموعة مساوية / لمرة ونصف مثل مربعات أعداد ا ب جـ د ق - ١٧٠ - ظ مجموعة مزيدًا على ذلك نصف آحاد بعدة أعداد ا ب جـ د. وإذا كان ذلك كذلك، فإن مربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها مساوية لثلثي المجتمع من ضرب عدد ح في أعداد م ل ك ط مجموعة. وأعداد م ل ك ط مجموعة مساوية لأعداد ا ب جـ د ⟨مجموعة⟩، فمربعات أعداد ا ب جـ د إذا جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها مساوية لثلثي المجتمع من ضرب أعداد ا ب جـ د في عدد ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

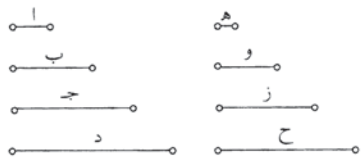
- **يا** - إذا كانت أعداد أزواج متوالية أوّلها الاثنان، وأخذت أعداد أوّلها نصف أوّل تلك،

2 مربعات: مربع [ب] - 4 د (الثانية): ناقصة [ا] / مساويًا: مساو[ب] - 5 على ذلك: عليه [ا، ق] - 6 ا م: ا و م [ا، ق] - 7 ب ل: ب ول [ق] - 8 ك: ل [ا] / ك: ناقصة [ا] / ك: ل [ا] وك [ق] - 9 ك: ل [ا] / د: و[ا] - 10 د ط: د وط [ق] / د ط ... ضرب (الأولى): ناقصة [ا] / فالمجتمع: والمجتمع [ب] / عددي: ناقصة [ا، ق] - 11 ك (الأولى): ل [ب] / مساوٍ: مساويًا [ب] - 12 أعداد: ناقصة [ب] / نصف: ونصف [ق] / نصف آحاد بعدة أعداد ا ب جـ د: ناقصة [ا، ب] / وعددا: وعدة [ا] - 13 فهما: هما [ا، ق] / عددا: عدد [ا] / وعددا: وعدد [ا] / وعددا: وعدد [ا] - 14 عدد: ناقصة [ا، ق] / ح: د ح [ا] / م: ناقصة [ا] - 15 على ذلك: عليها [ا، ق] / وإذا: وإذ [ا] وهو صحيح في [م] - 16 مساوية: مساو[ب] - 17 وأعداد ... مجموعة: مكررة [ا] وليست مكررة في [م] / مجموعة: ناقصة [ب] – 17-18 ا ب جـ د: د جـ ب ا [ب] – 20 أخذت: ناقصة [ا، ق].

والثاني منها نصف الأوّل والثاني / مجموعين، والثالث نصف الثاني والثالث مجموعين، وما بعد ذلك على هذا المثال، فإن الأعداد المأخوذة هي أعداد / أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. ا – ٢٩ – ظ / ب – ١٢٦ – ظ

فلتكن أعداد أزواج متوالية عليها آ بَ جَ دَ، وليكن عدد آ منها اثنين وليكن نصفه هَ ونصفُ عددي آ بَ عدد وَ ونصف عددي بَ جَ عدد زَ ونصفُ عددي جَ دَ عدد حَ.

فأقول: إن أعداد هَ وَ زَ حَ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد.



برهان ذلك: أن عدد آ اثنان وعدد هَ نصفه فهو واحد. وفضل ما بين أعداد آ بَ جَ دَ إذا أخذت على الولاء هو الاثنان. فإذا جمعنا اثنين منها متواليين وأخذنا نصفها، كان فضل ما بين النصف على كل واحد منها واحدًا. فزيادة بَ على وَ واحد، وكذلك زيادة جَ على زَ وزيادة دَ على حَ. وأعداد آ بَ جَ دَ أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فأعداد هَ وَ زَ حَ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من هَ الذي هو واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

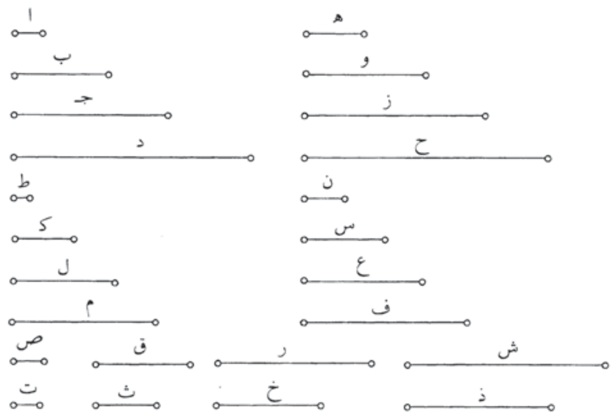
– **يب** – إذا كانت خطوط نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أولها أصغرها؛ وكانت خطوط أخر على عدتها مقارنة لها، وكانت نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وكان الأوّل من الخطوط الأوّل نصف الأول من الخطوط الأخر، فإنه إن ضرب الأول من الخطوط الأول، التي هي على نسب الأعداد الأفراد، في نصف قرينه من الخطوط الأخر، وضرب الثاني من الأُوَل في نصف الأول والثاني من الخطوط الأخر مجموعين،/ ق – ١٧١ – و

1 الأول: الثاني [ا] / والثاني: والثالث [ا] / الثاني: الثالث [ا] / والثالث: والرابع [ا] – 2 مبتدئة: أثبتها فوق السطر [ب] – 3 منها: ناقصة [ا، ق] – 3-4 جَ دَ وليكن ... عددي آ بَ: مكررة [ب] – 6 برهان ذلك: برهانه [ا، ق] – 7 فإذا: واذا [ا] واذا [م] / نصفها: نصفهما [ا، ق] – 8 منها: منهما [ا، ق] / واحدًا: واحد [ا، ق] وهو صحيح في [م] / وَ: ناقصة [ب] – 9 أعداد أزواج ... من الاثنين: أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد [ب] / أعداد أزواج ... هَ وَ زَ حَ: ناقصة [ا] – 11 نسبها: نسبة [ق] نسبتها [ا] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 12 أخر: آخر [ق]، ولن نشير إليها فيما بعد – 13 نسبها: نسبة [ق] ناقصة [ا] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 14 الأوّل: الأولى [ا، ق] – 15 الأعداد: ناقصة [ا، ق] – 16 الأول والثاني: الثاني والثالث [ا].

وضرب الثالث من الأوّل في نصف الثاني والثالث من الخطوط الأخر مجموعين، وما بعد ذلك على هذا المثال، وجمع ذلك كله وزيد عليه سطوح مساوٍ كل واحد منها للمجتمع من ضرب الخط الأول من الخطوط الأوّل في نصف الخط الأول من الخطوط الأخر، عدتها مثل ثلث عدة الخطوط الأول، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

فلتكن الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد خطوط آ بَ جَ دَ وأصغرها آ، ولتكن خطوط أخر بعدتها مقارنة لها على نسب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين عليها هَ وَ زَ حَ. وليكن آ نصف هَ.

فأقول: إنه إذا ضرب خط آ في نصف خط هَ وخط بَ في نصف خطي هَ وَ مجموعين وخط جَ في نصف خطي وَ زَ مجموعين وخط دَ في نصف خطي زَ حَ مجموعين وجمع ذلك كله وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط هَ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ بَ جَ دَ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط حَ الذي هو أعظم خطوط هَ وَ زَ حَ.



1 الثاني والثالث: الثالث والرابع [ا] / الأخر: ناقصة [ا] / مجموعين: ناقصة [ا، ب] – 2 الخط: ناقصة [ب] – 4 يجتمع: تجتمع [ق] – 5 الأفراد ... الأعداد: ناقصة [ب] مكررة [ا] وليست مكررة في [م] – 7 أخر: ناقصة [ا، ق] – 9 خط (الأولى والثانية): ناقصة [ا، ق] / وخط: وضرب [ق] / مجموعين: ناقصة [ب] – 9-10 هَ (الأولى) ... نصف (الثانية): ناقصة [ا] – 10 وخط: وضرب [ق] / مجموعين: ناقصة [ب] / وخط: وضرب [ق] / مجموعين: ناقصة [ا، ب] – 11 خط (الأولى والثانية) ناقصة [ا، ق] / هَ: ناقصة [ا] / مرات: مزادا [ب].

برهان ذلك: أنّا نجعل الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد ط ك ل م ، والأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين ن س ع ف . وليكن نصف خط هـ خط ص ، ونصف / ب - ١٢٧ - و خطي هـ و خط ق ، ونصف خطي و ز خط ر ، ونصف خطي ز ح خط ش . وليكن نصف عدد ن عدد ت ، ونصف عددي ن س عدد ث ، ونصف عددي س ع عدد خ ، ونصف عددي ع ف عدد ذ ، وخط ا هو نصف خط هـ . فنسبة خط ا إلى خط هـ كنسبة ط إلى عدد ن ، ولذلك تكون نسبة ط إلى ت ، الذي هو نصف عدد ن ، كنسبة خط ا إلى خط ص ، الذي هو نصف خط هـ . وأيضًا فإن نسبة خط ب إلى ا كنسبة عدد ك إلى ط ، ونسبة ا إلى هـ كنسبة ط إلى ن ، ونسبة هـ إلى و كنسبة ن إلى س . فنسب خطوط ب ا هـ و كنسب أعداد ك ط ن س . ولذلك تكون نسبة خط ب إلى هـ وإلى و وإلى هـ و مجموعين كنسبة عدد ك إلى ن وإلى س وإلى ن س مجموعين، ويكون نسبة خط ب إلى نصف هـ و – الذي هو ق – كنسبة ك إلى نصف ن س الذي هو ث . وأيضًا فإن نسبة خط جـ إلى ب كنسبة عدد ل إلى ك ونسبة ب إلى و كنسبة ك إلى س ونسبة / ا - ٣٠ - و و إلى ز كنسبة س إلى ع . فنسبة جـ إلى نصف و ز – الذي هو ر – كنسبة ل إلى نصف س ع / ق - ١٧١ - ظ الذي هو خ . وكذلك نبيّن أيضًا أن نسبة د إلى ش كنسبة م إلى ذ . فنسب خطوط ا ب جـ د إلى خطوط ص ق ر ش ، كل واحد إلى نظيره، كنسب أعداد ط ك ل م إلى أعداد ت ث خ ذ كل واحد إلى نظيره. وعدد ت نصف عدد ن ، وعدد ث نصف عددي ن س وعدد خ نصف عددي س ع وعدد ذ نصف عددي ع ف ، وأعداد ن س ع ف أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فأعداد ت ث خ ذ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وكذلك أعداد ط ك ل م . فأعداد ت ث خ ذ مساوية لأعداد ط ك ل م كل واحد لنظيره. وكذلك يكون خطوط ص ق ر ش مساوية لخطوط ا ب جـ د كل واحد لنظيره. فالذي يكون من ضرب ا في ص – الذي هو نصف هـ – مساوٍ لمربع خط ا ، والذي يكون من ضرب ب في ق – الذي هو نصف هـ و – مساوٍ لمربع خط ب ، والذي يكون من

1 أنا: أن [ا، ق] – 3 ر: ن [ا] – 4 عدد (الثانية): ناقصة [ا، ب] / عدد (الثالثة): ناقصة [ا] – 5 خط (الأربعة): ناقصة [ا، ق] / عدد (الثانية): ناقصة [ا، ق] – 6 ن: ت [ا] / ولذلك: وكذلك [ا، ق] / خط (الأولى والثانية): ناقصة [ا، ق] – 7 خط (الثانية): ناقصة [ا، ق] / ب: ا ب [ا] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 8 و: ز [ب] / ن: هـ [ا] / ب ا: ا ب [ق] – 9 ك ط: ط ك [ا، ق] / ولذلك: وكذلك [ا، ق] / خط: ناقصة [ا، ق] / وإلى و: ناقصة [ا، ق] / مجموعين: واحده عين [ا] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 10 وإلى س: ناقصة [ق] / خط: ناقصة [ا، ق] – 11 خط: ناقصة [ا، ق] / عدد: ناقصة [ا، ق] – 13 نبين أيضًا: أيضًا يتبين [ب] – 14 ذ: جـ [ا] / فنسب: فنسبة [ا، ق] – 15 كنسب: كنسبة [ا، ق] / وعدد ت: وت [ق] وث [ا] – 15-16 وعدد ت نصف عدد ن: كررها ناسخ [ب] – 16 عددي: عدد [ا] / عددي: عدد [ا] / ذ: ناقصة [ا] / عددي: عدد [ا] – 17 ن: ناقصة [ا] – 17-18 من الاثنين ... مبتدئة: أثبتها في الهامش [ا] / فأعداد: وأعداد [ا، ق] / أعداد: ناقصة [ب، ق] – 19-20 وكذلك ... لنظيره: ناقصة [ب] – 21 في: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [ا، ق].

ضرب جَ في رَ – الذي هو نصف وَ زَ – مساوٍ لمربع خط جَ ، والذي يكون من ضرب دَ في شَ – الذي هو نصف زَ حَ – مساوٍ لمربع دَ.

وأيضًا ، فإن نسب مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ بعضها إلى بعض كنسب مربعات خطوط آ بَ جَ دَ بعضها إلى بعض ، فنسبة مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة إلى مربع عدد مَ كنسبة مربعات خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة إلى مربع خط دَ. ونسبة مربع عدد مَ إلى المجتمع من ضرب مَ في فَ – التي هي كنسبة مَ إلى فَ – هي كنسبة مربع خط دَ إلى المجتمع من ضرب دَ في حَ التي هي كنسبة دَ إلى حَ . ففي نسبة المساواة ، تكون نسبة مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة إلى المجتمع من ضرب مَ في فَ كنسبة مربعات خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة إلى المجتمع من ضرب دَ في حَ . ونسبة المجتمع من ضرب مَ في فَ إلى المجتمع من ضرب أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة في فَ – التي هي كنسبة عدد مَ إلى أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة – هي كنسبة المجتمع من ضرب دَ في حَ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط حَ ، التي هي كنسبة خط دَ إلى خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة ، لأن نسبة عدد مَ إلى أعداد / طَ كَ لَ مَ مجموعة كنسبة خط دَ إلى خطوط ب – ١٢٧ – ظ
آ بَ جَ دَ مجموعة. ففي نسبة المساواة ، يكون نسبة مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة إلى المجتمع من ضرب أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة في عدد فَ كنسبة مربعات خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة إلى المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط حَ . وإذا أخذنا أضعافًا للمربع الذي يكون من طَ الذي هو الواحد بمثل ثلث عدة أعداد طَ كَ لَ مَ وأضعافًا لمربع خط آ بمثل ثلث عدة خطوط آ بَ جَ دَ ، كانت نسبة الأضعاف / المأخوذة للمربع الذي يكون من طَ إلى ق – ١٧٢ – و
مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة كنسبة الأضعاف المأخوذة لمربع خط آ إلى مربعات خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة ، فيكون نسبة مربعات أعداد طَ كَ لَ مَ مجموعة مع مربعات كائنة من ضرب طَ في نفسه عدتها مثل ثلث عدة أعداد طَ كَ لَ مَ إلى المجتمع من ضرب هذه الأعداد ⟨مجموعة⟩ في عدد فَ كنسبة مربعات خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة مع مربعات كائنة من خط آ عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ بَ جَ دَ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في

1 رَ: دَ [ا] / خط: ناقصة [ا، ق] – 2 نصف: ناقصة [ا] – 3 نسب: نسبة [ا، ق] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 6-7 مربع … كنسبة: ناقصة [ا، ق] – 7 تكون: ناقصة [ا، ق] – 11 هي: ناقصة [ا] – 12 مَ (الأولى): بَ [ب] – 13 طَ: ناقصة [ا] – 15 أضعافًا للمربع: أضعاف المربع [ا، ق] – 16 بمثل: بمثلي [ا] وهو صحيح في [م] / خط: ناقصة [ا، ق] – 16-17 أعداد … عدة: مكررة [ا] – 17 للمربع: ناقصة [ب] – 18 خط: ناقصة [ا، ق] – 19 مجموعة (الأولى): ناقصة [ا، ق] – 20 ثلث: أثبتها فوق السطر [ا] – 21 من خط آ: من ضرب خط آ في نفسه [ق] من خطوط [ا] – 22 مثل: ناقصة [ا، ق].

خط ح. وقد كنا بيّنا أن مربعات خطوط آ ب جـ د مجموعة مساوية للمجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ وَومن ضرب جـ في نصف وَ ز ومن ضرب د في نصف ز ح ، فنسبة مربعات أعداد ط ك ل م مجموعة مع مربعات كائنة من ضرب ط في نفسه عدتها مثل ثلث عدة ⟨أعداد⟩ ط ك ل م إلى المجتمع من ضرب أعداد ط ك ل م ⟨مجموعة⟩ في عدد ف كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ وَومن ضرب جـ في نصف وَ ز ومن ضرب د في نصف ز ح مع مربعات كائنة من خط آ عدتها مثل ثلث عدة ⟨خطوط⟩ آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح. ولكن أعداد ط ك ل م هي أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعداد ن س ع ف هي أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. فربعات أعداد ط ك ل م إذا / جمعت وزيد عليها ثلث آحاد بعدتها، ا – ٣٠ – ظ كانت مساوية لثلثي المجتمع من ضرب أعداد ط ك ل م ⟨مجموعة⟩ في عدد ف. وثلث الآحاد الذي فيه أعداد ط ك ل م هو مثل مربعات كائنة من ضرب ط في نفسه عدتها مثل ثلث عدة ⟨أعداد⟩ ط ك ل م – لأن المربع الكائن من ط واحد، فيكون المجتمع – من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ وَومن ضرب جـ في نصف وَ ز ومن ضرب د في نصف ز ح إذا جمع وزيد عليه مربعات مثل / مربع خط آ عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ ب جـ د، ق – ١٧٢ – ظ كان مساويًا لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح. ولكن مربع آ مساوٍ للمجتمع من ضرب آ في نصف هـ. فالمجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ وَومن ضرب جـ في نصف وَ ز ومن ضرب د في نصف ز ح – إذا جمع وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب آ في نصف هـ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ ب جـ د – كان ذلك مساويًا لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

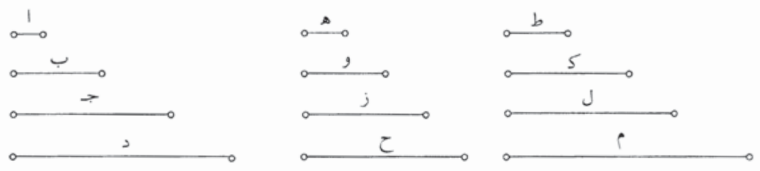
– **يج** – إذا كانت خطوط نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد ب – ١٢٨ – و أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أولها أصغرها، وكانت خطوط أخر مقارنة

1 خط : ناقصة [ا] – 2 ب : ناقصة [ا] / وَ(الأولى) : ناقصة [ا] / ومن (الثانية) : من [ب] – 4 ثلث : أثبتها فوق السطر [ا] ناقصة [ب] – 5 ب : ناقصة [ب] / هـ : ناقصة [ا] – 6 ثلث : ناقصة [ب] – 7 ولكن : لكن [ا، ق] – 8 أعداد : ناقصة [ا، ق] / مبتدئة : أثبتها في الهامش [ا] – 9 بعدتها : بعدة [ب] – 10-11 كانت ... فيه : ناقصة [ب] – 11 هو : ناقصة [ب] / مربعات كائنة : المربعات الكائنة [ق] / ثلث : ثلثي [ا، ق] ناقصة [ب] – 13 وَ(الأولى) : ناقصة [ا، ب] – 14 جمع : جمعت [ا، ق] / عليه : عليها [ا، ق] / ثلث : ناقصة [ب] – 15 خطوط : ناقصة [ا، ق] – 16 فالمجتمع : والمجتمع [ا] – 17 و : ناقصة [ا] – 18 كان ذلك : ناقصة [ق] وذلك [ا] – 19 مساويًا : مساو [ا، ق] – 20 نسبها : نسبة [ق] نسبتها [ا] / كنسب : كنسبة [ا، ق].

لها على عدتها، وكانت نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ولم يكن الأول من الخطوط الأوَل نصف الأول من الخطوط الأخر، فإنه إن ضرب الأول من الخطوط الأول، التي هي على نسب الأعداد الأفراد، في نصف قرينه من الخطوط الأخر، وضرب الثاني من الأول في نصف الأول والثاني من الخطوط الأخر، وضرب الثالث من الأول في نصف الثاني والثالث من الخطوط الأخر، وما بعد ذلك فعلى هذا المثال، وجمع ذلك كله وزيد عليه سطوح مساوٍ كل واحد منها للمجتمع من ضرب الخط الأول من الخطوط الأول في نصف الخط الأول من الخطوط الأخر، عدتها مثل ثلث عدة الخطوط الأول، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

فلتكن الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد خطوط آ بَ جَ دَ، وأصغرها آ. ولتكن خطوط أخر بعدتها مقارنة لها على نسب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين عليها هـَ وَ زَ حَ، ولا يكون آ نصف هـَ.

فأقول: إنه إذا ضرب آ في نصف خط هـَ وضرب بَ في نصف خطي هـَ وَ جميعًا، وضرب جَ في نصف خطي وَ زَ، وضرب دَ في نصف خطي زَ حَ، وجمع ذلك كله وزيد عليه مثل المجتمع من ضرب آ في نصف هـَ مرات عدتها مثل ثلث عدة خطوط آ بَ جَ دَ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط حَ الذي هو أعظم خطوط هـَ وَ زَ حَ.



1 نسبها: نسبة [ا، ق] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 3 الأول (الثانية): ناقصة [ا، ق] / هي: ناقصة [ا، ق] / نسب: نسبة [ا، ق] – 4 الأول والثاني: الثاني والثالث [ا] – 5 الثاني والثالث: الثالث والرابع [ا] / فعلى: على [ب] – 6 عليه: عليها [ا، ق] وهو صحيح في [م] – 7 ثلث: ناقصة [ب] – 9 الأزواج: ناقصة [ا، ق] – 10 خطوط: ناقصة [ا، ق] – 11 مقارنة: مساوية [ا، ق] – 13 خط: ناقصة [ب، ق] / هـَ: ناقصة [ا] / ضرب: ناقصة [ا، ق] / في: وفي [ا] / خطي: ناقصة [ب] / جميعًا: ناقصة [ا، ق] / ضرب: ناقصة [ا، ق] – 14 في: وفي [ا] / خطي: ناقصة [ب] / ضرب: ناقصة [ا، ق] / خطي: ناقصة [ب] / مثل: ناقصة [ب] – 15 خطوط: ناقصة [ا، ب].

برهان ذلك: أنّا نجعل خط ط مثلي خط آ، ونجعل نسب خطوط ط ك / [ق - ١٧٣ - و] ل م بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط هـ و ز ح، إذا أخذت على الولاء. فنسبة هـ إلى ط كنسبة و إلى ك وكنسبة ز إلى ل وكنسبة ح إلى م وكنسب أنصافها إلى أنصافها. ولكن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب آ في نصف ط كنسبة نصف هـ إلى نصف ط. ونسبة المجتمع من ضرب ب في نصف هـ و إلى المجتمع من ضربه في نصف ط ك كنسبة نصف هـ و إلى نصف ط ك. ونسبة المجتمع من ضرب جـ في نصف و ز إلى المجتمع من ضربه في نصف ك ل كنسبة نصف و ز إلى نصف ك ل. ونسبة المجتمع من ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضربه في نصف ل م كنسبة نصف ز ح إلى نصف ل م.

فنسبة الجميع وهو المجتمع من ضرب / [ا - ٣١ - و] آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن / [ب - ١٢٨ - ظ] ضرب د في نصف ل م كنسبة نصف خط هـ إلى نصف خط ط. ونسبة هـ إلى ط كنسبة ح إلى م ونسبة ح إلى م كنسبة المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح إلى المجتمع من ضربها في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م كنسبة المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح إلى المجتمع من ضربها في خط م. وإذا بدّلنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب جـ في نصف و ز، ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م.

1 مثلي: مثل [ا، ب، ق] وهو صحيح في [م] / نسب: نسبة [ا، ق] – 2 إذا... الولاء: ناقصة [ب] أثبتها في الهامش [ا] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 3 و إلى ك وكنسبة: ناقصة [ا] / وكنسب: وكنسبة [ا، ق] / إلى أنصافها: ناقصة [ب] – 6 ك: ل [ب] – 10 نصف (الأولى): ناقصة [ا] – 9 الجميع وهو: ناقصة [ب] – 9-10 آ ... ضرب (الثالثة): ناقصة [ا، ق] – 11 د: هـ [ب] – 12 نصف (الأولى): ناقصة [ا، ق] / خط: ناقصة [ا، ق] / خط: ناقصة [ا، ق] / ونسبة هـ إلى ط كنسبة: وكنسبة هـ إلى ط وكنسبة [ب] وهي مكررة / م (الثانية): ن [ا] – 13 خطوط: ناقصة [ا، ق] / خط (الأولى): ناقصة [ا، ق] – 14 من (الثانية): ناقصة [ب] / نصف: ناقصة [ق] / من: ناقصة [ب] / من: ناقصة [ب] – 16 جـ: ب حـ [ا] / ك ... نصف: ناقصة [ا] – 17 مجموعة: مكررة [ا] ناقصة [ب] – 18 ب: هـ [ب] – 19 خطوط: ناقصة [ب] / ب: ف [ا].

وأيضًا، فإن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح مؤلفة من نسبة خط آ إلى خطوط آ ب جـ د مجموعة ومن نسبة نصف خط هـ إلى خط ح. ونسبة نصف هـ إلى ح كنسبة نصف ط إلى م، فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح مؤلفة من نسبة / خط آ ق – ١٧٣ – ظ إلى خطوط آ ب جـ د مجموعة ومن نسبة ⟨نصف⟩ ط إلى م. والنسبة المؤلفة من هاتين النسبتين هي كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف خط ط إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط هـ إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف خط ط إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م. ولذلك تكون نسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط هـ مرات بعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب خط آ في نصف خط ط مرات بعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م.

وقد كنا بيّنا أن نسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م. فنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف هـ ومن ضرب ب في نصف هـ و ومن ضرب جـ في نصف و ز ومن ضرب د في نصف ز ح مع المجتمع / من ضرب آ في نصف هـ ب – ١٢٩ – و مرات بعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط ح كنسبة المجتمع من ضرب آ في نصف ط ومن ضرب ب في نصف ط ك ومن ضرب جـ في نصف ك ل ومن ضرب د في نصف ل م مع المجتمع من ضرب آ في نصف ط مرات بعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ ب جـ د إلى المجتمع من ضرب خطوط آ ب جـ د مجموعة في خط م.

1 نصف: ناقصة [ب] / هـ: ناقصة [ا] – 2-3 ومن نسبة ... ح (الأولى): ناقصة [ق] في خط ح [ا] – 3 نصف (الأولى والثانية): ناقصة [ا، ق] – 4 نصف: ناقصة [ا، ق] – 6 هي: ناقصة [ا، ق] / آ ... ضرب: ناقصة [ب] – 8 نصف: ناقصة [ا، ق] – 9 ولذلك: وكذلك [ق] – 10 خط: ناقصة [ب] / خطوط ... ضرب: مكررة [ب] / خطوط (الثانية): ناقصة [ا، ق] / آ: ناقصة [ا] – 11 خط (الثانية): ناقصة [ا، ق] / نصف: ناقصة [ب] / بعدة: عدتها كعدة [ب] – 14 ز (الثانية): و[ب] – 18 ز (الثانية): هـ [ا] وهو صحيح في [م] – 19 إلى ... د: ناقصة [ب] – 22 خطوط (الثانية): ناقصة [ا] / آ ب جـ د: ناقصة [ق].

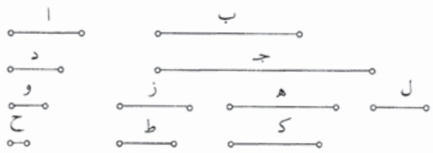
ونسب خطوط آ بَ جَ دَ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، ونسب خطوط طَ كَ لَ مَ بعضها إلى بعض كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين بعضها إلى بعض، لأنها كنسب خطوط هَ وَ زَ حَ بعضها إلى بعض. فالمجتمع من ضرب آ في نصف طَ ومن ضرب بَ في نصف طَ كَ ومن ضرب جَ في نصف كَ لَ ومن ضرب دَ في نصف لَ مَ مع المجتمع من ضرب آ في نصف طَ مرات بعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ بَ جَ دَ مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط مَ. ولذلك يكون المجتمع / من ضرب آ في نصف هَ ومن ضرب بَ في نصف هَ وَ ومن ضرب جَ / ق – ١٧٤ – و
في نصف وَ زَ ومن ضرب دَ في نصف زَ حَ مع المجتمع من ضرب آ في نصف هَ مرات عدتها ا – ٣١ – ظ
كعدة ⟨ثلث عدة⟩ خطوط آ بَ جَ دَ مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب خطوط آ بَ جَ دَ مجموعة في خط حَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يد** – إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، فقد يمكن أن نجد أعدادًا أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد وبعدتها أعدادًا أزواجًا متوالية مبتدئة من الاثنين، تكون متى أخذنا آحادًا بعدة الأعداد الأفراد منها، كانت نسبتها إلى المجتمع من ضرب تلك الأعداد الأفراد مجموعة في أعظم الأعداد الأزواج التي أخذت، أقل من النسبة المعلومة.

فلتكن النسبة المعلومة نسبة آ إلى بَ. فإن كانت لمقدار آ نسبة إلى مقدار بَ، فقد يمكننا أن نضاعفه حتى تصير أضعافه أعظم من مقدار بَ. فلتكن أضعافه التي هي أعظم من بَ هي مقدار جَ. ونجعل ما في عدد دَ من الآحاد مساويًا لعدد ما في جَ من أمثال آ. وليكن مثلا عدد دَ عدد هَ، فيكون عدد هَ زوجًا. ونجعل الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين المنتهية إلى عدد هَ أعداد وَ زَ هَ. وننقص من كل واحد منها واحدًا، ولتكن الأعداد الباقية أعداد حَ طَ كَ. فتكون أعداد حَ طَ كَ أعدادًا أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد وعدتها كعدة أعداد وَ زَ هَ الأزواج. وليكن في عدد لَ آحاد بعدة أعداد حَ طَ كَ.

1 كنسب: نسب [ا، ق] – 2 طَ كَ لَ مَ: كَ لَ مَ نَ [ا] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 3-4 لأنها ... بعض: ناقصة [ب] – 4 فالمجتمع: والمجتمع [ا، ق] – 5 بعدة: عدتها كعدة [ب] – 7 ولذلك: وكذلك [ق] – 11 يد: يا، بخط آخر [ب] / وكانت: وكان [ا، ق] / يمكن: يمكنا [ب] – 12 أعدادًا أزواجًا: أعداد أزواج [ا] – 13 أخذنا آحادًا: احدت احاد [ب] / تلك: تلك الى [ا] / الأفراد: ناقصة [ا، ق] – 15 فإن: فاذا [ب] / كانت: كان [ا، ق] – 16 هي (الثانية): ناقصة [ق] في [ا] – 18 المنتهية: غير مقروءة [ب] / وَ زَ هَ: وَ هَ زَ [ا] / منها: منها [ا، ق] – 20 أعدادًا أفرادًا: أعداد أفراد [ا، ب، ق] / هَ: حَ [ب] – 21 لَ: آ [ا].

فأقول: إن نسبة عدد لَ إلى المجتمع من ضرب أعداد حَ طَ كَ مجموعة في عدد هَ أقل من نسبة آ إلى بَ.



برهان ذلك: أن أعداد حَ طَ كَ أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وأعظمها عدد كَ. وعدد هَ أعظم من عدد كَ بواحد. فمربع نصف عدد هَ / مساوٍ لأعداد حَ طَ كَ مجموعة. ب - ١٢٩ - ظ فنسبة نصف عدد هَ إلى مربعه كنسبته إلى أعداد حَ طَ كَ مجموعة، ونسبته إلى المجتمع من ضربه في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل من نسبته إلى أعداد حَ طَ كَ مجموعة، لأن المجتمع من ضرب نصف عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أعظم من أعداد حَ طَ كَ مجموعة. فنسبة نصف عدد هَ إلى المجتمع من ضرب نصف عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل من نسبته / ق - ١٧٤ - ظ إلى مربعه. ونسبة نصف عدد هَ إلى مربع نصف عدد هَ كنسبة الواحد إلى نصف عدد هَ. فنسبة نصف عدد هَ إلى المجتمع من ضرب نصف عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل من نسبة الواحد إلى نصف عدد هَ، الذي هوكنسبة آ إلى جَ، فنسبة نصف عدد هَ إلى المجتمع من ضرب نصف عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل من نسبة آ إلى جَ. فأما المجتمع من ضرب نصف عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة فهو أقل من المجتمع من ضرب عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة. وأما مقدار جَ فهو أعظم من مقدار بَ. فنسبة نصف عدد هَ إلى المجتمع من ضرب عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل كثيرًا من نسبة آ إلى بَ. وأعداد وَ زَ هَ أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ففضل ما بين كل واحدٍ منها والذي يليه هو الاثنان. ففي عدد هَ أمثال للاثنين بعدة أعداد وَ زَ هَ، وفي نصف عدد هَ آحاد بعدة أعداد وَ زَ هَ، وكذلك في عدد لَ من الآحاد. فنسبة عدد لَ إلى المجتمع من ضرب عدد هَ في أعداد حَ طَ كَ مجموعة أقل من نسبة آ إلى بَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

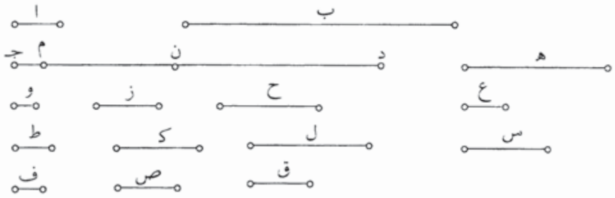
1 لَ: كَ [ا] – 4 هَ (الثانية): حَ [ا] – 5 كنسبته إلى: كنسبة [ب] – 7 مجموعة (الأولى): مجموعها [ا، ق] – 8-11 نسبته .. أقل من: مكررة [ب] – 9 مربع: مربعه [ب] / نصف عدد هَ (الثانية): ناقصة [ب] – 10 من ضرب: أثبتها في الهامش [ا] / نصف: ضرب عليها بالقلم [ق] / كَ: كَ لَ [ا] – 11 الذي هوكنسبة: الذي هو (حرف غير مقروء) كنسبة [ب] ونسبة الواحد إلى نصف عدد هَ كنسبة [ا، ق] – 12 نصف: ناقصة [ق] – 14 حَ: حَ حَ [ا] – 15 في: الى [ا] – 16 أعداد: ناقصة [ق] – 17 عدد: عدة [ا] / أعداد: آحاد [ا، ق] / وفي ... هَ (الثانية): ناقصة [ب] / آحاد: أزواجا [ا] / أعداد: آحاد [ا، ق] / وَ زَ هَ: ناقصة [ا].

– يه – إذا كان مقداران وكانت نسبة أحدهما إلى الآخر معلومة، وكان خطان معلومان، فقد يمكننا أن نقسم أحد الخطين أقسامًا تكون نسب بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وأن تؤخذ مع الخط الآخر خطوط، تكون عدتها معه كعدة أقسام الخط الأول، ويكون أعظمها ذلك الخط الآخر، وتكون نسب بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وتكون نسبة المجتمع من ضرب أصغر/ أقسام الخط الأول في نصف أصغر الخطوط المأخوذة مع الخط الثاني ا – ٣٢ – و مرات عدتها كعدة أقسام الخط الأول إلى المجتمع من ضرب الخط الأول في الخط الثاني أقلَّ من نسبة أحد المقدارين المعلومي النسبة إلى المقدار الآخر منهما.

فليكن مقداران عليهما آ بَ ولتكن نسبة آ إلى بَ معلومة. وليكن خطان معلومان عليهما جـ د هـ. فإذا أردنا أن نقسم جـ د أقسامًا، تكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ونأخذ خطوطًا تكون عدتها مع / خط هـ كعدة ب – ١٣٠ – و أقسام خط جـ د، وتكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ويكون أعظمها خط هـ، وتكون نسبة / المجتمع من ضرب أصغر ق – ١٧٥ – و أقسام خط جـ د في نصف أصغر الخطوط التي مع هـ مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب خط هـ في خط جـ د أقلَّ من نسبة آ إلى بَ، فإنا نأخذ أعدادًا أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد عليها وَ زَ حَ والواحد منها وَ، وبعدتها أعدادًا أزواجًا متوالية مبتدئة من الاثنين عليها طَ كَ لَ، والاثنان منها طَ. ولتكن نسبة الآحاد التي بعدة أعداد وَ زَ حَ إلى المجتمع من ضرب أعداد وَ زَ حَ مجموعة في عدد لَ أقل من نسبة مقدار آ إلى مقدار بَ. ونجعل نسبة مقدار جـ م إلى مقدار جـ د كنسبة وَ إلى أعداد وَ زَ حَ مجموعة، ونجعل نسبة م نَ إلى م د كنسبة زَ إلى عددي زَ حَ مجموعين. فيكون قد قسمنا خط جـ د على مثل نسب أعداد وَ زَ حَ، إذا أخذت على الولاء، وأصغر أقسامه جـ م. ونجعل نسبة هـ إلى سَ كنسبة لَ إلى كَ ونسبة سَ إلى عَ كنسبة كَ إلى طَ.

1 يه : يب، بخط آخر [ب] / معلومان : وهذا جائز على اعتبار «كان» تامة، ولن نشير إلى مثلها مرة أخرى – 3 كنسب : كنسبة [ا، ق] / أفراد : ناقصة [ا] / تؤخذ : يوجد [ق] / خطوط : خطوطا [ق] / نسب : نسبتها [ا] نسبة [ب] – 5 كنسب : كنسبة [ا، ق] / متوالية : ناقصة [ا] – 7 الثاني : الباقي [ب] – 8 المعلومي : المعلومين [ا، ق] – 10 نسبها : نسبة [ا، ق] – 11 كنسب : كنسبة [ا، ق] – 12 نسبها : نسبة [ا، ق] / كنسب : كنسبة [ا، ق] – 13 متوالية : ناقصة [ا] – 14 مع هـ : معه [ب] – 15 أعدادًا : أعداد [ا، ق] / أفرادًا : أفراد [ق] – 16 أعدادًا أزواجًا : أعداد أزواج [ا، ق] – 17 أعداد : ناقصة [ا، ق] – 18 مجموعة : ناقصة [ب] – 19-18 مقدار جـ م إلى مقدار جـ د : جـ م إلى جـ د [ق] جـ إلى د [ا] – 19 زَ (الثانية) : وَ [ب] / عددي : عدد [ا] – 20 زَ : وَ [ب] / مثل : أثبتها فوق السطر [ا] / نسب : نسبة [ا، ق].

فأقول: إن نسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف خط ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ أقل من نسبة آ إلى ب.



برهان ذلك: أن نسب أعداد و ز ح بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط جـ م م ن ن د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء. فنسبة و إلى أعداد و ز ح مجموعة كنسبة خط جـ م إلى ⟨خط⟩ جـ د. ولذلك تكون نسبة المربع الكائن من و إلى مربع أعداد و ز ح مجموعة كنسبة مربع خط جـ م إلى مربع خط جـ د. ونسبة مربع أعداد و ز ح مجموعة إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د. ففي نسبة المساواة تكون نسبة المربع الكائن من و إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ م إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د. وعدة أعداد و ز ح كعدة أقسام جـ م م ن ن د. فإذا ضوعف المربع الكائن من و، الذي هو الواحد، مرات بعدة أعداد و ز ح، كانت نسبته إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة مربع خط جـ م إذا ضوعف مرات بعدة أقسام / خط جـ د إلى المجتمع من ضرب خط جـ د في ن د. ق – ١٧٥ – ظ

ونسبة جـ م إلى ع إما أن تكون كنسبة و إلى ط وإما ألّا تكون كذلك. فلتكن أولاً مثلها، فتكون نسبة المجتمع من ضرب و، الذي هو الواحد، في نصف ط، الذي هو أيضًا واحد، إلى المربع الكائن من و كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع إلى مربع جـ م. فنسبة آحاد بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ن د. وأيضًا، فإن

1 جـ م: حـ ح [ا] / خط (الثانية): ناقصة [ب] – 3 نسب: نسبة [ا، ق] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 5 مجموعة: ناقصة [ا، ق] / خط: ناقصة [ا، ق] / جـ د: م د [ا] / ولذلك: وكذلك [ق] – 6 خط: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [ا، ق] – 7 إلى المجتمع ... مجموعة: ناقصة [ب] – 8 ن د: ب د [ا] – 9 ضرب (الثانية): ناقصة [ا] – 10 ن د (الأولى): د ن: [ب] / ضوعف: ضوعفت [ا، ق] – 11 الواحد: واحد [ا] / أعداد: آحاد [ا، ق] – 12 خط (الثانية): ناقصة [ا، ق] – 13 ن د: ب د [ا] – 15 الذي (الثانية): للذي [ا] – 17 أعداد (الأولى): ناقصة [ا، ق] – 18 ن د: ب د [ا].

نسبة ح إلى و كنسبة ن د إلى جـ م / ونسبة و إلى ط كنسبة جـ م إلى ع ونسبة ط إلى ل كنسبة ع إلى هـ. فنسبة ح إلى ل كنسبة ن د إلى هـ. فأما نسبة ح إلى ل، فهي كنسبة المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح إلى المجتمع من ضربها في عدد ل. وأما نسبة ن د إلى هـ، فهي كنسبة المجتمع من ضرب جـ د في ن د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ. فنسبة المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح إلى المجتمع من ضربها في عدد ل كنسبة المجتمع من ضرب جـ د في ن د إلى المجتمع من ضربه في هـ. وقد كنا بينا أن نسبة الآحاد التي بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ح كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى / المجتمع من ضرب جـ د في ن د. ففي نسبة المساواة، تكون نسبة آحاد بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح مجموعة في عدد ل كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ. وقد كانت نسبة الآحاد التي بعدة أعداد و ز ح إلى المجتمع من ضرب أعداد و ز ح ⟨مجموعة⟩ في عدد ل أقل من نسبة آ إلى ب، فنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ أقل من نسبة آ إلى ب.

ب – ١٣٠ – ظ / ا – ٣٢ – ظ

وأيضـًا، فإنّا لا نجعل نسبة جـ م إلى ع كنسبة و إلى ط، ولكن نسبة جـ م إلى ف كنسبة و إلى ط. ولتكن نسب خطوط ف ص ق، إذا أخذت على الولاء، بعضها إلى بعض كنسب أعداد ط ك ل بعضها إلى بعض إذا أخذت على الولاء. فتكون نسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ق أقل من نسبة آ إلى ب.

وأيضـًا، فإن نسبة المجتمع من ضرب / جـ م في نصف ف إلى المجتمع من ضربه في نصف ع كنسبة نصف ف إلى نصف ع، التي هي كنسبة ف إلى ع. ونسبة ف إلى ع كنسبة ق إلى هـ، لأن نسب خطوط ع س هـ بعضها إلى بعض كنسب خطوط ف ص ق بعضها إلى بعض. فنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف إلى المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع كنسبة ق إلى

ق – ١٧٦ – و

3 ح: ناقصة [ا] – 5 مجموعة: ناقصة [ب] – 8 خط: ناقصة [ا، ق] – 9 نسبة: ناقصة [ب] / ل: آ [ا] – 10 المجتمع من: مكررة [ب] / ضرب: كتب بعدها «أعداد و ز ح مجموعة» [ا] / خط: ناقصة [ا، ق] / جـ د: جـ هـ [ا] – 11 أعداد (الثانية): ناقصة [ا، ق] – 13 جـ د (الثانية): جـ هـ [ا] – 14 ولكن: فليكن [ب] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 17 ق: ف [ق] مطموسة [ا] – 19 ف: ب [ب] – 19-22 ضربه في نصف ع. ونسبة ف إلى ع ... ق إلى: مكررة [ب] مع سقوط «كنسبة نصف ف إلى نصف ع التي هي كنسبة ف إلى ع» – 21 ص ق: ق ص [ا].

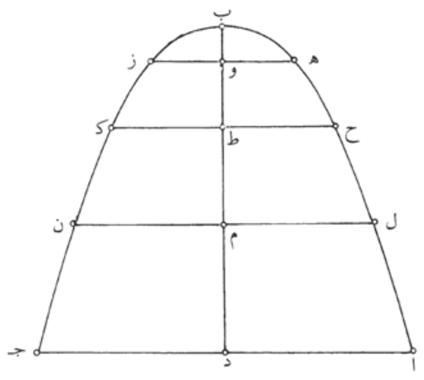
هـ. ونسبة ق إلى هـ كنسبة المجتمع من ضرب جـ د في ق إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ. فنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف إلى المجتمع من ضربه في نصف ع كنسبة المجتمع من ضرب جـ د في ق إلى المجتمع من ضربه في هـ. وإذا بدلنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف إلى المجتمع من ضرب جـ د في ق كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع إلى المجتمع / من ضرب جـ د في هـ. ولذلك تكون نسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في ق كنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ. ولكن المجتمع من ضرب جـ م في نصف ف مرات بعدة أقسام خط جـ د قد كان تبين أن نسبته إلى المجتمع من ضرب جـ د في ق أقل من نسبة ا إلى ب. فنسبة المجتمع من ضرب جـ م في نصف ع مرات بعدة أقسام خط جـ د إلى المجتمع من ضرب جـ د في هـ أقل من نسبة ا إلى ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ب – ١٣١ – و

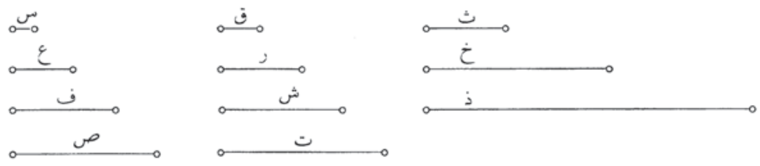
– يو – إذا أخرج في القطع المكافئ قطر من أقطاره وخطوط ترتيب على ذلك القطر، فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد إذا أخذت على الولاء، فإن نسب خطوط الترتيب التي تخرج في القطع بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، إذا أخذت على الولاء.

فليكن القطع المكافئ ا ب جـ وب د قطر من أقطاره، وليكن في القطع خطوط الترتيب على القطر عليها هـ وز ح ط ك ل م ن ا د جـ، ولتكن أعداد س ع ف ص أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ولتكن نسب ب و وط ط م م د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء كنسب أعداد س ع ف ص إذا أخذت على الولاء. ولتكن بعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين عليها ق ر ش ت.

فأقول: إن نسبها بعضها إلى بعض/< إذا أخذت على الولاء> كنسب خطوط هـ وز ح ط ك ل م ن ا د جـ بعضها إلى بعض إذا أخذت على الولاء. ق – ١٧٦ – ظ

1 هـ ... ق إلى المجتمع: مكررة [ب] – 2 ضرب ... المجتمع من: ناقصة [ا] / نصف (الأولى): ناقصة [ب] – 4 نصف (الأولى): ناقصة [ا] – 5 ولذلك: وكذلك [ق] – 6 بعدة: عدتها كعدة [ب] – 8 خط: ناقصة [ا، ق] / قد: وقد [ب] – 9 ضرب: ناقصة [ا] / خط: ناقصة [ا، ق] – 11 يو: ناقصة [ب] / أخرج: خرج [ب] / المكافئ: المكافئ ف [ب] / وخطوط: خطوط [ب] / فكانت: وكانت [ا، ق] – 12 بها: ناقصة [ق] / كنسب: كنسبة [ا، ق] – 16 وب د قطر من أقطاره: وقطر من أقطاره ب د [ب] – 19 أزواج: ناقصة [ا] – 21 نسبها: نسب [ا، ق] / إلى بعض: ناقصة [ا]، غير ناقصة في [م] – 22 ا د جـ: ا هـ جـ [ا].





برهان ذلك: أنّا نجعل عدد ث مساويًا لعددي س ع مجموعين، ونجعل عدد خ مساويًا لأعداد س ع ف مجموعة ونجعل عدد ذ مساويًا لأعداد س ع ف ص مجموعة. فأعداد س ث خ ذ مبتدئة من الواحد وزيادة بعضها على بعض، إذا أخذت على الولاء، أعداد ع ف ص التي هي أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، فأعداد س ث خ ذ هي مربعة متوالية مبتدئة من الواحد.

ونسبة س إلى ع كنسبة ب و إلى و ط، فنسبة / س إلى س ع مجموعين كنسبة ب و إلى ب ط. ا – ٣٣ – و
ولكن س ع مجموعين مثل عدد ث، فنسبة س إلى ث كنسبة ب و إلى ب ط. وقد تبيّن في الشكل العشرين من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط معمًا في / آخر الشكل الحادي ب – ١٣١ – ظ
والخمسين منها أن نسبة ب و إلى ب ط كنسبة مربع خط ه و إلى مربع خط ح ط. فنسبة س إلى ث كنسبة مربع خط ه و إلى مربع خط ح ط.

وكذلك أيضًا نبيّن أن نسبة ث إلى خ كنسبة مربع خط ح ط إلى مربع خط ل م، وأن نسبة خ إلى ذ كنسبة مربع خط ل م إلى مربع خط ا د. فنسب مربعات خطوط ه و ح ط ل م

2 س ع ف ... لأعداد: ناقصة [ب] / س ث: ش ت [ا] – 3 أعداد: هي أعداد [ب] / التي: للتي [ا] – 4 س ث: ش ت [ا] / هي: ناقصة [ب] / مربعة: مربعات [ب] – 5 مجموعين: مجموعة [ا، ق] – 6 ولكن: فلأن [ق] / ب ط: وط [ا] / قد: ناقصة [ب] – 7-8 الشكل الحادي والخمسين: شكل ٥١: [ا، ق] – 8 ح ط: ه ط [ا].

ا د بعضها إلى بعض كنسب أعداد س ث خ ذ بعضها إلى بعض. وقد كنا بيّنا أن أعداد س ث خ ذ أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. فنسب مربعات خطوط هـ و ح ط ل م ا د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. فلذلك تكون نسب الخطوط أنفسها بعضها إلى بعض كنسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد. وأضعاف هذه الأعداد إذًا كانت أعدادًا أزواجًا متوالية مبتدئة من الاثنين، فهي أعداد ق ر ش ت، وأضعاف هذه الخطوط التي ذكرنا هي خطوط هـ ز ح ك ل ن ا ج. فنسب الأعداد الأزواج المتوالية التي عليها ق ر ش ت بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط هـ ز ح ك / ل ن ا ج بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ق – ١٧٧ – و

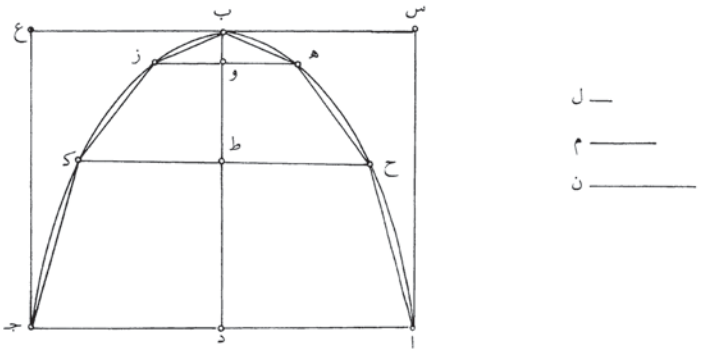
وهنالك استبان أنه إن كانت نسب خطوط هـ ز ح ك ل ن ا ج بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فإن نسب ب و و ط ط م م د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض.

– **يز** – إذا أخرج في قطعة من القطع المكافئ قطرها وخطوط الترتيب على ذلك القطر، فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أصغر تلك الأقسام القسم الذي يلي رأس القطع، ووصلت فيما بين أطراف خطوط الترتيب التي في جهة واحدة وفيما بين رأس القطع أيضًا وطرفي الخط الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت خطوط مستقيمة، فإن الشكل المستقيم الأضلاع الحادث في تلك القطعة من القطع أقل من ثلثي السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته قاعدة تلك القطعة وارتفاعه كارتفاعها بمثل المجتمع من ضرب العمود الواقع من رأس القطع على أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت في ذلك القطع في 〈نصف〉 ذلك الخط الأصغر مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام القطر.

1 كنسب: كنسبة [ا] / س (الأولى): ت [ا] – 2 فنسب: فنسبة [ا، ق] – 3 فلذلك: ولذلك [ب] – 5 وأضعاف: فأضعاف [ا، ق] – 6 هـ ز: مكررة [ا] / ا ج: ل د [ا] – 8 ا ج: ل د [ا] ا د [ق] / إذا ... الولاء: ناقصة [ا، ق] – 9 خطوط: الخطوط [ا] / ا ج: ل د [ا] ا د [ق] – 10 كنسب: كنسبة [ا، ق] / نسب: نسبة [ب] – 11 م د: ناقصة [ب] – 13 أخرج: خرج [ب] / في: ناقصة [ب] / قطعة: قطع [ا، ق] / الترتيب: ترتيب [ب] – 14 خطوط: الخطوط [ا] – 16 القسم: من القسم [ب] / يلي: ناقصة [ب] – 20 القطع: القطر [ا، ق].

فلتكن قطعة من القطع المكافئ عليها ا ب جـ وعلى قطرها ب د وعلى قاعدتها ا جـ. ولتكن في هذه القطعة خطوط الترتيب على قطر ب د عليها هـ وز ح ط ك ا د جـ. ولتكن نسب خطوط ب و وط ط د بعضها / إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة ب – ١٣٢ – و
من الواحد عليها ل م ن وليكن أصغرها ل. ونصل خطوط ا ح ح هـ هـ ب ب ز زك ك جـ، ونخرج خطي ا س جـ ع موازيين لخط ب د، ونجيز على نقطة ب خطًا موازيًا لخط ا جـ عليه س ع.

فأقول: إن شكل ا ح هـ ب زك جـ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح ا س ع جـ المتوازي الأضلاع بمثل المجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة ب على خط هـ ز في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة ب و وط ط د.



برهان ذلك: أن نسب خطوط ب و وط ط د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد ل م ن الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد. فنسب خطوط / هـ ز ح ك ا جـ بعضها ا – ٣٣ – ظ
إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين./ وإذا كان ق – ١٧٧ – ظ
ذلك كذلك، فإن المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز ومن ضرب وط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ مع المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ⟨ثلث⟩ عدة أقسام قطر ب د مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب ب د في ا جـ.

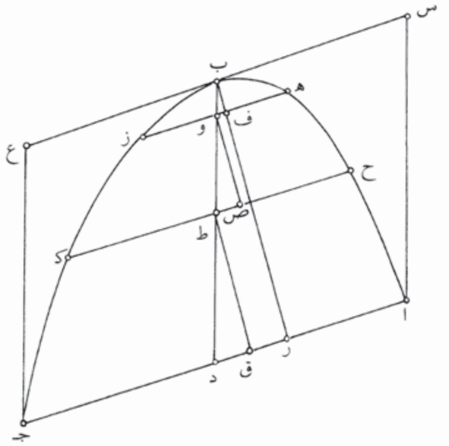
2 الترتيب: ترتيب [ب] – 4 ل (الثانية): ب و [ا، ب، ق] – 5 موازيين: متوازيين [ب] / لخط: ل [ا، ق] / لخط: ل [ا، ق] / عليه: ناقصة [ب] – 6 س ع: ناقصة [ب] س ب ع [ق] – 7 ا ح هـ ب زك جـ: ح هـ ب زك جـ [ا] / ا س ع جـ: ا س وح [ا] – 11 المبتدئة: ناقصة [ا، ق] / ح ك: ح ط [ا] – 13 ح ك: حـ د [ا] – 14 ح ك: حـ ك [ا] / ا جـ: نصف ا جـ [ا، ب]، ضرب على «نصف» بالقلم [ق].

وأيضـًا، فإن خطوط الترتيب، إما أن تكون أعمدة على قطر ب د وإما ألا تكون كذلك. فلتكن أولاً أعمدة عليه، فيكون المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مثل مثلث ب هـ ز، والمجتمع من ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك مثل منحرف هـ ز ك ح، والمجتمع من ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ مثل منحرف ح ك جـ ا. ويكون المجتمع من ضرب ب د في ا جـ مثل سطح ا س ع جـ. وقد بيّنا أن المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ مع المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. فشكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح ا س ع جـ المتوازي الأضلاع بمثل المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د.

وأيضـًا، فإنا نجعل خطوط الترتيب ليست أعمدة على قطر ب د. ونخرج من نقطة ب إلى هـ ز عمودًا عليه ب ف ومن نقطة و إلى ح ك عمودًا عليه و ص ومن نقطة ط إلى خط ا جـ عمودًا عليه ط ق ومن نقطة ب إلى ا جـ عمودًا عليه ب ر. فتكون مثلثات ب و ف و ط ص ط د ق ب د ر قائمة الزوايا، فزوايا ب و ف و ط ص ط د ق ب د ر متساوية لأن خطوط الترتيب متوازية، فالمثلثات متشابهة. ولذلك تكون نسبة ب ف إلى ب و كنسبة و ص إلى و ط وكنسبة ط ق إلى ط د وكنسبة ب ر إلى ب د وكنسبة المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز إلى المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز وكنسبة المجتمع من ضرب و ص في نصف هـ ز ح ك إلى المجتمع من ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك وكنسبة المجتمع من ضرب ط ق في نصف ح ك ا جـ إلى المجتمع من ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ وكنسبة المجتمع من ضرب ب ر في ا جـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. وإذا جمعنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز ومن
ضرب و ص في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط ق في نصف ح ك ا جـ إلى المجتمع / من ضرب ب – ١٣٢ – ظ
ب و في نصف هـ ز / ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ ق – ١٧٨ – و

2 هـ ز: هـ و [ا] / ب هـ ز: د هـ ز [ا] – 3-4 هـ ز ... نصف: ناقصة [ا] – 4 نصف: ناقصة [ق] / ح ك: ح ل [ا] / ح ك جـ ا: ح ك جـ [ا] / ويكون: فيكون [ا، ق] / ضرب: ناقصة [ا، ق] / ب د: ن د [ا] / ا جـ: ا د [ا] – 5 ا س ع جـ: ا س ف هـ [ا] / ب و: ن و [ا] / هـ ز (الثانية): هـ و [ا] – 5-6 ومن ... ح ك (الأولى): مكررة [ا] مع سقوط «هـ ز» – 6 ح ك (الأولى): حـ ك [ا] / ا جـ: ا د [ب] / ب و: ن و [ا] – 7 قطر ب د: ح ط ب د [ب] قطر ن د [ا] – 8 سطح: ناقصة [ا، ق] / ا س ع جـ: ا س ب جـ [ا] – 9 هـ ز: هو [ب] / ثلث: ناقصة [ب] – 11 ح ك ... إلى: ناقصة [ب] / خط: ناقصة [ا، ق] – 11-12 ومن نقطة ط ... ط ق: مكررة [ا] – 12 ب ر: ب ز [ا، ب] / ط د ق: ص د ق [ا] – 13 فزوايا: وزوايا [ا، ق] – 16 هـ ز (الثانية): هـ و [ب] – 17 هـ ز ... نصف: ناقصة [ا] – 17-18 إلى ... ا جـ (الأولى): ناقصة [ب] – 18 ب ر: ب ذ [ا] – 20 ط ق: ب و [ا].

كنسبة المجتمع من ضرب ب ر في ا جـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. والمجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز ومن ضرب و ص في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط ق في نصف ح ك ا جـ هو مثل شكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع. فنسبة شكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع إلى المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ كنسبة المجتمع من ضرب ب ر في ا جـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. ونسبة المجتمع من ضرب ب ر في ا جـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ كنسبة المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د إلى المجتمع



من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د. وإذا جمعنا، كانت نسبة شكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د إلى المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ مع المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د كنسبة المجتمع من ضرب ب ر في ا جـ،

1-2 ب د ... هـ ز (الأولى): مكررة [ا] – 2 ح ك: ب ل [ا] / ح ك: حـ ك [ا] – 3 ا جـ: ا ح [ا] / مثل: ناقصة [ب] – 3-4 فنسبة ... الأضلاع: أثبتها في الهامش [ا] – 4 و ط ... ومن ضرب: ناقصة [ا] – 5 ب ر: ب ز [ا، ب] – 6 ب ر: ب ز [ا، ب] – 7 ثلث: ناقصة [ا، ب] أثبتها تحت السطر مع «صح» [ق] / هذا الشكل ليس في المخطوطات – 7-8 عدة ... ثلث: ناقصة [ب] – 8 ثلث: أثبتها فوق السطر [ق] – 10 ثلث: أثبتها فوق السطر مع «صح» [ق] / ب و في نصف: ناقصة [ا] – 11 هـ ز ح ك: ح ك هـ ز [ا] – 12 ثلث: ناقصة [ا، ب] أثبتها فوق السطر مع «صح» [ق] / عدة: نجد ثلاث نقط فوقها وبإزائها كلمة «بلغ» في الهامش [ب]، مما يعني أن في هذا الموضع بلغ القراءة / ب ر: ب د [ب].

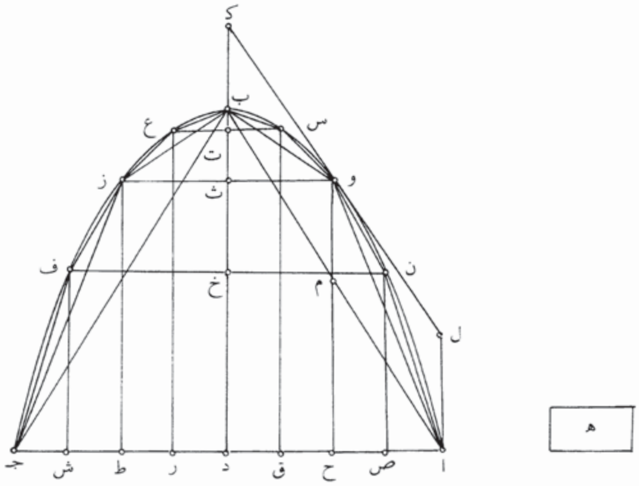
الذي هو سطح ا س ع جـ، إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. وإذا بدلنا، كانت نسبة شكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د إلى سطح ا س ع جـ كنسبة المجتمع من ضرب / ب و في نصف ا – ٣٤ – و هـ ز ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب/ ط د في نصف ح ك ا جـ مع المجتمع من ق – ١٧٨ – ظ ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. وقد كنا بيّنا أن المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز ومن ضرب و ط في نصف هـ ز ح ك ومن ضرب ط د في نصف ح ك ا جـ مع المجتمع من ضرب ب و في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د مساوٍ لثلثي المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. فشكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع مع المجتمع من ضرب ب ف في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د مساوٍ لثلثي سطح ا س ع جـ. فشكل ا ح هـ ب ز ك جـ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح ا س ع جـ بمثل المجتمع من ضرب ب ف، الذي هو عمود على هـ ز، في نصف هـ ز مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د التي هي ب و و ط ط د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يح** – إذا كانت قطعة من القطع المكافئ معلومة وسطح معلوم، فقد يمكن أن نخرج في تلك القطعة من القطع خطوط ترتيب على قطره تقسم القطر أقسامًا نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ويكون أصغرها الذي يلي رأس القطع. وإذا وصل فيما بين أطراف خطوط الترتيب وفيما بين رأس القطع وطرفي / الخط ب – ١٣٣ – و الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت، خطوط مستقيمة، فحدث من ذلك في القطعة شكل مستقيم الأضلاع يحيط به القطع، كانت زيادة تلك القطعة من القطع على الشكل الذي تحيط به أقل من السطح المعلوم.

فلتكن قطعة من القطع المكافئ معلومة عليها ا ب جـ وقطرها ب د وقاعدتها ا جـ وسطحٌ معلوم عليه هـ.

5 ب و: ز و [ا] – 6 ب د: ناقصة [ب] / ثلث: ناقصة [ا] / قطر: ناقصة [ق] / ب د: ناقصة [ب] – 7 نصف (الأولى): ناقصة [ا] – 8 ثلث: ناقصة [ا] / فشكل: شكل [ا] – 9 ا ح هـ ب ز ك جـ: ا ح هـ ب ز ك [ب] – 12 ثلث: ناقصة [ب] أثبتها في الهامش [ا] / التي هي: الذي هو [ا، ق] – 14 يمكن: يمكنا [ب] – 15 نسبها: نسبة [ا، ق] – 16 كنسب: كنسبة [ا، ق] – 17 القطع: القطر [ا، ب، ق] / وفيما بين: وهما [ا] وبين [ب] – 19-20 الذي تحيط به: ناقصة [ب].

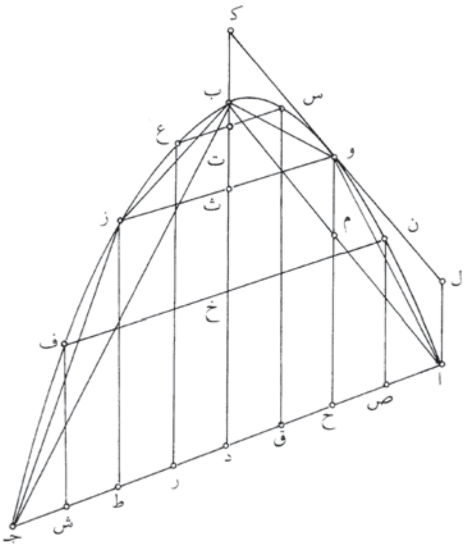
فأقول: إنه يمكن أن نخرج في قطعة ا ب جـ من القطع خطوط ترتيب تقسم قطر ب د على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وتكون زيادة قطعة ا ب جـ من القطع على الشكل الحادث فيها، إذا وصلت خطوط ⟨مستقيمة⟩ فيما بين أطراف خطوط الترتيب وفيما بين رأس القطع أيضًا وطرفي أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت، أقلَّ من سطح هـ.



برهان ذلك: أنّا نصل خطي ا ب ب جـ، فإن كانت قطعتا ا و ب ب ز جـ من القطع أقلَّ من سطح هـ، وإلاّ قسمنا خطي ا د د جـ بنصفين نصفين على نقطتي ح ط، وأخرجنا من هاتين النقطتين خطين موازيين لقطر ب د عليها ح و ط ز، ووصلنا خطوط ا و و ب ب ز ز جـ، وأجزنا على نقطة و خطًا مماسًا للقطع عليه ك و ل، وأخرجنا / من نقطة ا خطًا موازيًا لقطر ب د عليه ا ل. وخط ح و قد كان موازيًا لقطر ب د. وقد بيّن أبلونيوس في الشكل السادس والأربعين من المقالة الأولى من كتابه في المخروطات أن ذلك إذا كان كذلك، فإن ح و قطر من أقطار القطع. ونسبة ا ح إلى ح د كنسبة ا م إلى م ب. وخط ا ح مثل ح د فخط ا م مثل م ب وخط م و قطر من أقطار القطع وقد قسم ا ب بنصفين. وقد بيّن أبلونيوس في الشكل هـ من مقالة ب من كتابه ق – ١٧٩ – و

2 ويكون: يكون [ق] / قطعة: قطع [ا، ق] – 3-4 وفيما ... الترتيب: ناقصة [ا، ق] – 5 ا و ب: ا و جـ [ا] – 7 موازيين: متوازيين [ا، ق] / ح و: حـ و [ا] / و ب: و جـ [ا] – 9 وخط: فخط [ا، ق] / ح و: حـ و [ا] / الشكل السادس والأربعين: شكل مو [ا، ق] – 10 المقالة الأولى: مقالة آ [ا، ق] / المخروطات: المخروط [ب] / ح و: جـ و [ا، ب] – 11 خط: ناقصة [ا، ق] / فخط ا م: فـ ا م [ا، ق] / م ب: م ف [ب] / خط: ناقصة [ا، ق] – 12 الشكل: ناقصة [ب] / مقالة: ناقصة [ب].

في المخروطات أن ذلك إذا كان كذلك، فإن خط ك ول موازٍ لخط ا ب، لأن خط ك ول مماس لقطعة ا وب من القطع على نقطة و التي هي رأس قطرها وخط ا ل موازٍ لخط ب ك، فسطح ا ب ك ل متوازي الأضلاع وهو محيط بقطعة ا وب من القطع، فهو أعظم منها. ومثلث ا و ب هو نصف سطح ا ب ك ل، فمثلث ا وب أكثر من نصف قطعة ا وب من القطع.



وكذلك نبيّن أن مثلث ب زجـ أكثر من نصف قطعة ب زجـ من القطع. فإن كانت قطع ا ن ووس ب ب ع ززف جـ من القطع أقل من سطح هـ، وإلاّ قسمنا أيضًا أقسام ا ح ح د د ط ط جـ بنصفين نصفين على نقط ص ق ر ش وأخرجنا من هذه النقط خطوطًا موازية لقطر ب د عليها ص ن/ ق س رع ش ف. ووصلنا خطوط ا ن ن و وس س ب ب ع ع ززف ا – ٣٤ – ظ ف جـ. ونبيّن كما بيّنا آنفًا أن مثلثات ا ن ووس ب ب ع ززف جـ أكثر من نصف قطع ا ن و

1 المخروطات: المخروط [ب] / ك ول (الأولى): ك زل [ا] – 2 وخط ا ل: وا ل [ق] وا و [ا] / لخط ب ك: ل ب ك [ا، ق] / فسطح: فشكل [ا، ق] – 3 ا وب (الثانية): ا وز [ا] – 4 ا وب (الأولى والثانية): ا وز [ا] / أكثر: أكبر، ولن نشير إليها فيما بعد [ق] – هذا الشكل ليس في المخطوطات – 5 نبين: أيضًا يتبين [ب] / ب زجـ: ب زد [ب] / قطعة: قطر [ا] / ب زجـ: ب زد [ب] / فإن: فإذا [ق] / قطع: ناقصة [ب] – 6 ا ن و: ا ب و [ا] / وس ب: رس ب [ا] / تكرر في النص مثل هذا البناء وسنتركه كما هو دون أن نضيف جواب الشرط، فالمقصود «فإذا كانت ... ⟨كان ما أردنا⟩ وإلا ...» وسنضيف الجواب في الترجمة فقط، ولن نعلق عليها فيما بعد – 7 ص: ناقصة [ب] – 8 ص ن: ص ق [ب] ص هـ [ا] / ق س: ف س [ا] / رع ... وس: ناقصة [ب] / ش ف ووصلنا خطوط: ناقصة [ا] / ن و: ب و [ا] – 8-9 ع ززف ف جـ: ب د [ا] – 9 ونبين: وقد بينا [ا، ق] / آنفًا: ناقصة [ا، ق] / أن مثلثات: ناقصة [ب] / ا ن و: ا ب و [ا] / ب ع ززف جـ: ناقصة [ا] / ف جـ: ف جـ إن كانت [ب] / ا ن و: ا ب و [ا].

وس ب ب ع ز زف جـ. فإن كانت قطع ا ن و وس ب ب ع ز زف جـ الباقية من القطع أقل من سطح هـ، وإلا فلا بدّ من فعلنا مثل هذا الفعل مرارًا كثيرة حتى ننتهي إلى قطع تفضل من هذه القطعة من القطع أقل من سطح هـ. لأن كل مقدارين يكون أحدهما أعظم من الآخر ويُنقص من الأعظم منها أكثر من نصفه ومما تبقى منه أكثر من نصفه ومما تبقى من ذلك أكثر من نصفه، وما بعد ذلك على هذا المثال، فلا بدّ من أن ننتهي إلى شيء يفضل من الأعظم أقل من الأصغر. فليكن الذي يفضل من القطع ويكون أقل من سطح هـ قطع ا ن ن و وس س ب ب ع ز زف ف جـ. ونصل خطوط س ع / وز ن ف. فخطا ق س رع موازيان لقطر ب د ق – ١٧٩ – ظ
وخط ق د مثل خط ر د فخط س ت مثل خط ت ع. وقد تبيّن مما قال أبلونيوس في شكل هـ من مقالة ب من كتاب المخروطات أن/ ذلك إذا كان كذلك، فإن خط س ع خط ترتيب على قطر ب – ١٣٣ – ظ
ب د. وكذلك أيضًا يتبيّن أن خطي وز ن ف خطا ترتيب على قطر ب د وخطوط ترتيب س ع وز ن ف مساوية لخطوط ق ر ح ط ص ش كل واحد لنظيره. وأيضًا، فإن أقسام ا ص ص ح ح ق ق د متساوية، فنسب خطوط د ق د ح د ص د ا بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد. وإذا أُخذ مثلا كل واحد منها، كانت نسب الأضعاف المأخوذة لها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، لأن كل واحد من هذه الأعداد مثلا نظيره من الأعداد المتوالية، ومثلا د ق هو رق ومثلا د ح هو ط ح ومثلا د ص ش ص ومثلا د ا جـ ا. فنسب ر ق ط ح ش ص جـ ا، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وقد كنا بيّنا أن خطوط رق ط ح ش ص مساوية لخطوط س ع وز ن ف. فنسب خطوط س ع وز ن ف، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. ولذلك تكون نسب خطوط ب ت ت ث ث خ خ د، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وقد

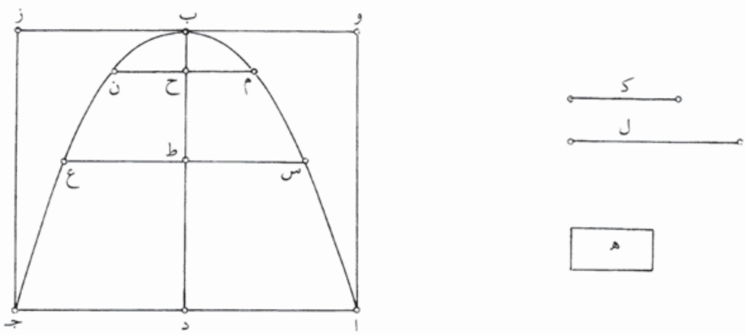
1 ب ع ز زف جـ: ا د ع د جـ [ا] / كانت قطع: ناقصة [ب] / ا ن و: ا ب و [ا] ا ن ن و [ب، ق] / وس ب ... زف جـ: رس ع رب و وجـ [ا] وس س ب ب ع ع ز زف ف جـ [ب، ق] – 2 مثل: ناقصة [ا، ق] / حتى: من ان [ا، ب] – 3 القطعة من: ناقصة [ب] – 4 وينقص: ونقص [ب] / تبقى: تبقا [ا] / منه: ناقصة [ا، ق] – 4-5 ومما تبقى من ذلك أكثر من نصفه: ناقصة [ا، ق] – 5 من (الأولى): ناقصة [ا، ق] – 7 رع: د ع [ب] / ب د: ا ب جـ [ا] – 8 ق د: ف د [ا] / خط: ناقصة [ا، ق] / ر د: جـ د [ا] / فخط س ت: وس ب [ا] وس ت [ق] / خط: ناقصة [ا، ق] / شكل: ناقصة [ب] – 9 مقالة: ناقصة [ب] / كتاب: كتابه [ب] / المخروطات: في المخروط [ب] – 10 يتبين: نبين [ا، ق] / وز ن ف: ب و ون [ا] / وخطوط ترتيب: وخطوط س ت [ا، ق] / وز: ون [ب] – 11 ق ر: ق د ق ر [ق] / ص ش: ط س [ا] – 11-12 ص ح ح ق: ص حـ حـ ف [ا] – 12 د ص: وص [ا] – 13 أخذ مثلا: ضوعف [ق] ناقصة [ا] / منها: منهما [ا، ب، ق] / نسب: نسبة [ا، ق] – 16 هو: ناقصة [ا، ق] / رق: ق ر [ق] هـ ر [ا] / هو: ناقصة [ا، ق] / ط ح: ح ط [ق] / جـ ا: ا جـ [ق] / رق ط ح ش ص جـ ا: ق ر ح ط ص ش ا جـ [ق] / رق: ق ر [ق] ط د ق [ا] / ط ح ش ص: ح ط ص س [ق] – 18 فنسب ... ن ف: ناقصة [ب] / إذا: مكررة [ا] وليست مكررة في [م] – 20 كنسب: كنسبة [ا، ق].

عمل في قطعة ا ب جـ شكل ا ن و س ب ع ز ف جـ المستقيم الأضلاع الذي تزيد عليه قطعة ا ب جـ من القَطْع أقل من سطح هـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يط** – إذا كانت قطعة من القطع المكافئ معلومة وسطح معلوم، فقد يمكن أن نعمل في تلك القطعة من القطع شكلاً مستقيم الأضلاع، يكون نقصانه عن ثلثي السطح الذي قاعدته قاعدة تلك القطعة وارتفاعه كارتفاعها بمقدار أقل من السطح المعلوم.

فلتكن قطعة من القطع المكافئ معلومة عليها ا ب جـ وقطرها ب د وقاعدتها ا جـ وسطح معلوم عليه هـ. وليكن سطح قاعدته ا جـ وارتفاعه كارتفاع قطعة ا ب جـ عليه ا و ز جـ.

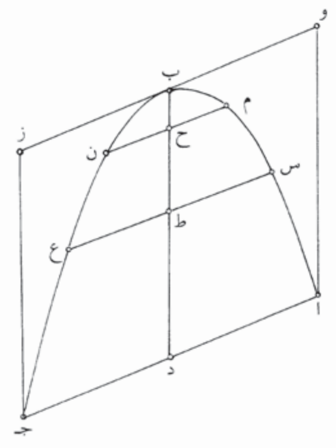
فأقول: إنه يمكن أن نعمل في قطعة ا ب جـ من القطع شكلاً مستقيم الأضلاع تحيط به القطعة وينقص عن ثلثي سطح ا و ز جـ بمقدار أقل من سطح هـ.



برهان ذلك: أن نسبة سطح هـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ معلومة، وخطا ب د ا جـ معلومان. فنقسم ب د أقسامًا يكون نسبها، إذا أخذت على الولاء، /كنسب أعداد أفراد ق – ١٨٠ – و
متوالية مبتدئة من الواحد، ويكون أصغرها مما يلي نقطة ب، و⟨نجد خطوطًا⟩ تكون إذا أخذت مع خط ا جـ خطوطًا على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وكان أعظمها خط ا جـ، وكانت نسبة المجتمع من ضرب أصغر أقسام خط ب د/ في نصف أصغر الخطوط المأخوذة مع ا – ٣٥ – و

1 ا ن و س ب ع ز ف جـ: ا ب و س ن ع ز ف جـ [ا] – 4 شكلاً: شكل [ا، ب، ق] – 6 وقطرها: ناقصة [ب] / ب د: ناقصة [ب] – 7 ا جـ: ا د [ب] / عليه ا و ز جـ: أثبتها في الهامش [ا] – 8 شكلاً: شكل [ا، ب، ق] – 9 القطعة: القطع [ا، ق] / عن: على [ا] – 10 ضرب: ناقصة [ب] – 11 فنقسم: فيقسم [ق] / نسبها: نسبتها [ق] – 12 نقطة: ناقصة [ا، ق] – 13 الاثنين: كتب بعدها «عليها ك ل» [ق] / ا جـ: ل [ق] ل د [ا] – 14 وكانت: كانت [ا، ب] / أقسام: الأقسام من [ا، ق].

خط ا جـ مرات بعدة أقسام خط ب د إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ أقل من نسبة سطح هـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ.



ولتكن أقسام خط ب د خطوط ب ح ح ط ط د، والخطوط المأخوذة مع ا جـ خطا ك ل وأصغرهما ك. ونجيز على نقطتي ح ط خطين من خطوط الترتيب الواقعة على قطر ب د عليها م ح ن س ط ع. ونصل خطوط ا س س م م ب ب ن ن ع ع جـ. فنسب خطوط ب ح ح ط ط د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، ونسب خطوط م ن س ع ا جـ ⟨بعضها إلى بعض⟩، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية / مبتدئة من الاثنين، وأعظمها خط ا جـ. وكذلك كانت نسب ب – ١٣٤ – و خطوط ك ل ا جـ. فخطا م ن س ع مساويان لخطي ك ل كل واحد لنظيره. فنسبة المجتمع من ضرب ب ح في نصف خط ك مرات بعدة أقسام قطر ب د إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ أقل من نسبة سطح هـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. فنسبة المجتمع من ضرب خط ب ح في نصف خط م ن مرات بعدة أقسام قطر ب د إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ أقلّ من نسبة سطح هـ إلى المجتمع من ضرب ب د في ا جـ. ولذلك يكون المجتمع من ضرب خط ب ح في نصف خط م ن مرات بعدة ثلث أقسام خط ب د أقل من سطح هـ ، فإن كان ب ح عمودًا

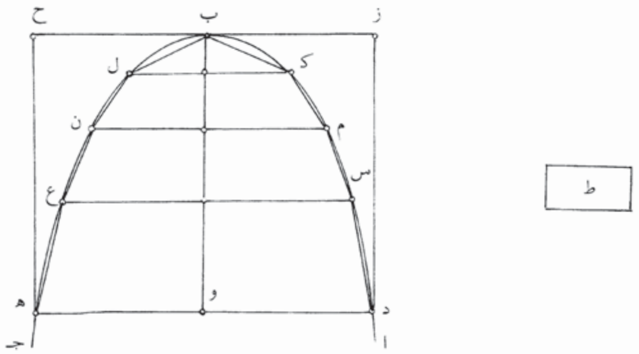
1 بعدة: بعدة ثلث [ق] / نسبة: ناقصة [ب] – هذا الشكل ليس في المخطوطات – 3 ولتكن: فليكن [ب] / ب د: د ب [ب] – 4 أصغرهما: أصغرها [ق] / الواقعة: الواقع [ا، ق] – 5 م ح ن: م حـ ر [ا] / ع جـ: ع و ف جـ [ا] – 6 ط د: ط ب [ا، ق] – 7 ونسبة: فنسب [ب] – 8 خط: ناقصة [ا، ق] – 9 فنسبة: ونسبة [ب] – 10 خط: ناقصة [ا، ق] / بعدة: بعدة ثلث [ق] – 11-13 فنسبة... في ا جـ: ناقصة [ا، ق] / – 11 خط: ناقصة [ا، ق] – 12 خط: ناقصة [ا، ق] – 14 ثلث: ناقصة [ب، ا].

على م ن وإلاّ فإن العمود أقل منه. فالمجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة ب على م ن في نصف م ن مرات عدتها ثلث أقسام قطر ب د أقل من سطح هـ، ⟨إن كان ب ح عمودًا على م ن، وإلا⟩ فالمجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة ب على خط م ن في نصف خط م ن مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د أقل كثيرًا من سطح هـ. وشكل ا س م ب ن ع جـ المستقيم الأضلاع أقل من ثلثي سطح ا و ز جـ بمثل المجتمع من ضرب العمود الواقع من نقطة ب على خط م ن في نصف خط م ن / مرات عدتها مثل ثلث عدة أقسام قطر ب د. فنقصان شكل ا س م ب ن ع جـ المستقيم الأضلاع عن ثلثي سطح ا و ز جـ بمقدار أقل من سطح هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ق – ١٨٠ – ظ

– ك – القطع المكافئ لا نهاية له، ومساحة كل واحدة من قطعه مساوية لثلثي مساحة السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته كقاعدته وارتفاعه كارتفاعه.

فليكن القطع المكافئ ا ب جـ، ولتكن قطعة منه د ب هـ، وليكن قطر هذه القطعة ب و وقاعدتها د و هـ. وليكن سطحٌ قاعدته د و هـ وارتفاعه كارتفاع قطعة د ب هـ من القطع عليه د ز ح هـ.

فأقول: إن القطع كله لا نهاية له، وإن مساحة قطعة د ب هـ منه مساوية لثلثي مساحة سطح د ز ح هـ.



2 عدتها: بعدة [ا، ق] عدتها كعدة [ب] / ثلث: ناقصة [ا، ب] – 3 خط (الأولى): ناقصة [ا، ق] – 4 عدتها: بعدة [ا، ق] / مثل: ناقصة [ق] أثبتها فوق السطر [ا] / ثلث: ناقصة [ب] – 5 سطح: ناقصة [ا، ق] / نقطة: ناقصة [ا، ق] – 6 خط (الثانية): ناقصة [ق] / عدتها: ناقصة [ا، ق] – 9 ك: ناقصة [ب، ق] – 10 كقاعدته: قاعدته [ا، ب] – 12 وقاعدتها: وقاعدته [ا، ق] / د و هـ: حـ و هـ [ا] / سطح ... القطع: ناقصة [ب] / د و هـ: ا جـ [ا] د هـ [ق] – 13 د ز ح هـ: كتبها د ز حـ هـ في كل الشكل [ا] – 14 منه: ناقصة [ا، ق] / مساوية لثلثي: منه ثلثي [ب].

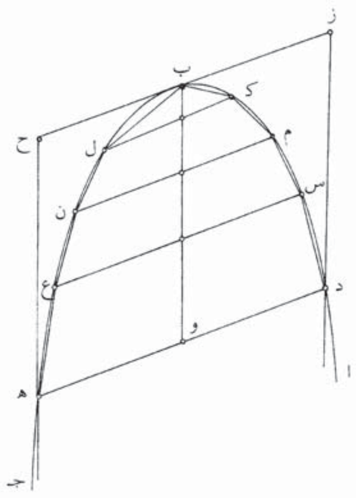
برهان ذلك: أن قطع ا ب ج يخرج إلى ما لا نهاية، ولا يلتقي خطا ب ا ب ج من ناحية ا ج، فيحيطان بسطح، فليس للقطع المكافئ نهاية.

وأقول: إن قطعة د ب هـ منه مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ.

فإن لم يكن كذلك فهي أكثر من الثلثين أو أقل منها. فلتكن أولاً أكثر من الثلثين، ولتكن زيادتها على الثلثين مثل سطح ط. فقد يمكن أن نخرج في قطعة د ب هـ خطوط ترتيب تقسم القطر على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. وإذا وصل فيما بين أطرافها خطوط مستقيمة وفيما بين رأس القطع وطرفي أصغرها، حدث في هذه القطعة من القطع شكل مستقيم الأضلاع تزيد عليه قطعة د ب هـ بمقدار أقل من سطح ط. فلتكن خطوط الترتيب التي ذكرنا ك ل م ن س ع د هـ، والخطوط الموصلة خطوط د س س م م ك ك ب ب ل ل ن ن ع ع هـ. فشكل د س م ك ب ل ن ع هـ المستقيم الأضلاع مزيدًا عليه سطح ط أعظم من قطعة د ب هـ من القطع. وقطعة د ب هـ من القطع مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ مزيدًا على ذلك سطح ط، فشكل د س م ك ب ل ن ع هـ المستقيم الأضلاع مزيدًا عليه سطح ط أكثر من ثلثي سطح د ز ح هـ مزيدًا على ذلك سطح ط. فلنسقط المشترك وهو سطح ط، فيبقى شكل د س م ك ب ل ن ع هـ المستقيم الأضلاع أكثر / من ثلثي سطح د ز ح هـ. وقد تبيّن فيما تقدم ا – ٣٥ – ظ من الأشكال أنه أقل من ثلثيه، هذا خلف. فليست قطعة د ب هـ بأكثر من ثلثي سطح د ز ح هـ.

وأقول: إن قطعة د ب هـ ليست بأقل من ثلثي سطح د ز ح هـ.

1 ب ج: ا ج [ا] / من: من محيط من [ق] – 3 وأقول: فأقول [ا، ق] / قطعة: قطع [ا، ب، ق] – 4 فهي: فهو [ا، ق] / الثلثين: ثلثي السطح [ق] / منها: منه [ب] / أولاً: ناقصة [ا، ق] – 5 مثل: بمثل [ب] / في: من [ب] / ترتيب: ناقصة [ا، ق] – 6 نسب: نسبة [ا، ق] – 7 من القطع: ناقصة [ا، ق] – 9 الموصلة: الموصولة [ا، ب، ق] / خطوط: خط [ب] / م ك: هـ ك [ا] – 12-13 فشكل ... ذلك سطح ط: ناقصة [ب] – 12 أكثر: ناقصة [ا] – 17 وأقول: فأقول [ا].



فإن كان يمكن / فلتكن أقل من الثلثين بمقدار سطح ط. فقد يمكن أن يعمل في هذه القطعة ب - ١٣٤ - ظ
من القطع شكل مستقيم الأضلاع/ تحيط به القطعة، ويكون نقصانه عن ثلثي سطح د ز ح هـ ق - ١٨١ - و
بمقدار أقل من سطح ط؛ فليكن ذلك الشكل شكل د س م ك ب ل ن ع هـ. فشكل د س م ك ب ل ن ع هـ مع سطح ط أكثر من ثلثي سطح د ز ح هـ. ولكن قطعة د ب هـ مع سطح ط مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ. فشكل د س م ك ب ل ن ع هـ مع سطح ط أعظم من قطعة د ب هـ مع سطح ط. فنسقط المشترك وهو سطح ط، فيبقى شكل د س م ك ب ل ن ع هـ المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة د ب هـ من القطع؛ فهو أعظم منها وهي تحيط به، هذا خلف. فليست قطعة د ب هـ بأقل من ثلثي سطح د ز ح هـ. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأكثر من ثلثيه. فهي إذن مساوية لثلثي سطح د ز ح هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تم كتاب ثابت بن قره الحرّاني
في مساحة قطع المخروط الذي يُسمى المكافئ.

هذا الشكل ليس في المخطوطات – 1 يعمل: نعمل [ق] – 4 ولكن: وليكن [ا] – 5 فشكل: وفشكل [ق] – 8 تحيط: محيطة [ب] / بأقل: أقل [ا، ق] – 9 بأكثر: بأكبر [ق] / إذن: إذًا [ب] / نبين: كتب بعدها «والله أعلم والحمد لله وحده والصلاة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه وشيعته أجمعين» [ق] – 10 كتاب: قول [ب] / الحراني: ناقصة [ب] – 10-11 ثابت ... المكافئ: مساحة القطع المكافئ لثابت بن قرة الحراني، وكتب بعدها «رحمة الله عليه في ليلة يسفر صباحها عن نهار الجمعة الغرّاء، ثاني عشر ذي القعدة لسنة تسع وخمسين ومائة بعد الألف بقلم أضعف الضعفاء صدقي الحاج مصطفى بن صالح كتخدا غفر الله لها ولجميع المسلمين بجاه نبيّه الأمين صلوات الله وسلامه عليه وعلى آله وأصحابه أجمعين م» [ق] – أ 11 في ... المكافئ: نجد بعدها «وهو عشرون شكلاً والحمد لله ربّ العالمين وصلى الله على محمد وآله» [ب]؛ في مساحة القطع المكافئ [ا]، ونجد بعدها «وهو ٢٠ شكلاً والحمد لله ربّ العالمين والصلاة على محمد خاتم النبيين» [ا].

٢-٣ مساحة المجسّم المكافئ

٢-٣-١ تنظيم وبنية كتاب ثابت بن قرّة

هل كان ثابت بن قرّة عندما كان يُحرِّر كتابه "في مساحة القطع المكافئ" قد بنى، أو على الأقل قد تصَوَّر، كتابه "في مساحة المجسّمات المكافئة" ؟ السؤال يفرض نفسه بشكل طبيعي تماماً عند قراءة الكتاب الأول، إذ نجد نفس الأفكار ونفس اللغة، إلا أنّ الكتاب الثاني يتناول المجسَّمات بدلاً من المستويات. بالإضافة إلى ذلك، يذكر ثابت بوضوح، في الكتاب الأول، ثلاث قضايا من الكتاب الثاني. سنتوقّف قليلاً عند هذا التشابه في المسار، الذي، كما سنرى لاحقاً، هو أيضاً تشابه في البنية. ولذلك سنتتبّع ثابت بن قرّة وهو يقوم بتحديد حجم المجسّم المكافئ.

يتألف هذا الكتاب من ست وثلاثين قضيّة تتوزّع على عدّة مجموعات. تتضمّن المجموعة الأولى القضايا الإحدى عشرة الأولى التي تتناول، جميعها، متساويات عدديّة خاصّة بأعداد صحيحة. وقد أثبتها ثابت بواسطة مقدّمتين وقضيّتين من نفس النوع، استعارها من كتابه "في مساحة القطع المكافئ". هذه المجموعة من القضايا الحسابيّة، هي في أساس القضيّتين الثانية عشرة والثالثة عشرة اللتين توسّعان نتيجة القضيّة الحادية عشرة إلى المقادير، أي التي تعمّمها على الأعداد الحقيقيّة. وهذه النتيجة المعمّمة هي التي ستُستخدَم في القضيّة الثانية والثلاثين.

يُقدِّم ثابت بن قرّة بعد ذلك، مجموعة قضايا حسابيّة تتناول هذه المرّة متباينات عدديّة، تحضيراً لإدخال مسلّمة أرشيمدس ولتحديدات من الأعلى ضروريّة. وتنقسم هذه المجموعة المؤلَّفة من إحدى عشرة قضيّة إلى ثلاث مجموعات جزئيّة. تتناول القضايا، من الثانية والعشرين إلى السابعة والعشرين، المتباينات العدديّة؛ وتوسّع القضايا، من الثامنة والعشرين إلى الحادية والثلاثين، هذه المتباينات إلى المقادير أي إلى الأعداد الحقيقيّة (تدرس القضيّتان الأخيرتان متتاليَتَي الأعداد الحقيقيّة: متتالية تزايديّة في القضيّة الثلاثين ومتتالية تناقصيّة في القضيّة الحادية والثلاثين) وتستخدمان مسلّمة أرشميدس. وتشكّل القضيّة الحادية والعشرون، وحدها، مجموعة جزئيّة من القضايا، وتتناول متساويتين بين أربعة مقادير.

هاتان المجموعتان –الأولى من القضيّة ١ إلى القضيّة ١١ مع القضيّتين ١٢ و ١٣، والثانية من القضيّة ٢١ إلى القضيّة ٣١- تشكّلان، وحدهما، مستويين في الرسم البياني لهذا الكتاب: يتناول الأوّل، الذي يتضمّن القضايا الحسابيّة، متساويات أو متباينات؛ أمّا المستوى الثاني، المبني على الأوّل، فهو مكرَّسٌ للمقادير، ويتعلّق أيضاً بإدخال مسلّمة أرشيمدس.

تأتي بعد ذلك مجموعة مقدّمات ضروريّة بالنسبة إلى المستوى الأخير من الرسم البياني، وهي تتضمّن القضايا من الرابعة عشرة إلى العشرين. وتحضُر هنا القضيّة الرابعة عشرة لتأمين احتياجات الحساب في القضايا الثلاث التالية، من أجل تحديد أحجام جذع المخروط وجذع المخروط الأجوَف وجذع المعيّن المجسّم. وتُستخدَم نتائج القضايا الخامسة عشرة والسادسة عشرة والسابعة عشرة في برهان القضيّة الثانية والثلاثين. وتُستَخدم القضيّة الثامنة عشرة لدراسة إحدى خواصّ خطّ تماسّ القطع المكافئ. في القضيّة التاسعة عشرة يبيّن ثابت أنّ المجسّمين الناتجين من دوران متوازيَي أضلاع لهما ارتفاعان متساويان حول قاعدتهما المشتركة، متكافئان. وهكذا، فإنّ أسطوانة "جوَفاء" – سمّاها ابن الهيثم لاحقاً "منخرِطة"– تكون مكافئة لأسطوانة قائمة. أخيراً، يدرس ثابت في القضيّة العشرين حجم المجسّم الناتج من دوران متوازي أضلاعٍ حول خطّ موازٍ لإحدى قواعده، وهذا المجسّم يدعى "حلقة". وتستخدم نتائج القضايا الثامنة عشرة والتاسعة عشرة والعشرين في إثبات القضيّتين الثالثة والثلاثين والرابعة والثلاثين.

بعد تقديم هذه القضايا، يُصبح كلُّ شيء جاهزاً لإثبات القضايا الأساسيّة من المستوى الثالث في الرسم البياني للكتاب، ولتحديد حجم المجسّمات المكافئة.

نرى من خلال هذا الوصف السريع _ وسنتحقّق من ذلك لاحقاً_ أنّ بنية الدلالات، في هذا الكتاب أيضاً، تتطابق مع البنية التركيبيّة، وهما مشابهتان للبنيتين اللتين أمكننا رؤيتهما في حالة القطع المكافئ. لكننا نلاحظ أيضاً نفس المَيل إلى التحسيب (الاستخدام المكثّف للحساب)، وإلى الاستفادة من خصائص الحدّ الأعلى لمجموعة

محدّبة ومن وحدانيّتها أيضاً، كما نلاحظ استخدام القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، بعد تعميمها بحيث تتلاءم مع حالة المجسّم المكافئ. باختصار، سنبيّن (في الفقرة ٢-٣-٢-٨، أدناه) التماثل بين الطريقة المستخدَمة في حالة القِطْع المكافئ وتلك المستخدَمة في حالة المجسّم المكافئ؛ وهذا ما سيُوضِّح هذا التشابه في البنية.

لقد عرف كتاب ثابت بن قرّة هذا مصيراً تاريخيّاً، حيث أنّه أسّس تقليداً في البحث ساهم فيه القوهي[١]، ثمّ ابن الهيثم[٢].

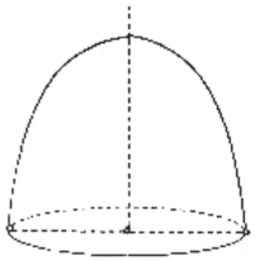
إذا عمدنا إلى التحليل التفصيلي لهذا الكتاب، سنجد في البداية تعاريف المجسّمات المكافئة المختلفة. وهكذا، يبدأ ثابت بتمييز مختلف أنواع المجسّمات المكافئة الدورانيّة. يتناول في البداية مجموعة أولى، حيث يكون محور الدوران قطراً من أقطار القِطْع. ويحدّد حينئذ ثلاثة أنواع من المجسّمات، وفقاً للحالة التي تكون فيها الزاوية، الواقعة بين القطر ونصف الوتر المعني بالأمر، قائمة أو منفرجة أو حادّة. وفي الحالات الثلاث يسمّى المجسّم الناتج من الدوران "قبّة مكافئة"، رأسها هو النقطة المشتركة بين محور الدوران وقوس القطع المكافئ المستخدَمة. يكون لدينا إذاً على التوالي قبّة "معتدلة الرأس"، وأخرى "ناتئة الرأس"، وثالثة "غائرة الرأس".

في المجموعة الثانية، يكون محورُ الدوران قاعدة قطعة القطع المكافئ، أي وتراً من القطع المكافئ. ويسمّى المجسّم الناتج "الكرة المكافئة"، ويكون طرفا الوتر الثابت قطبَيه. وهناك صنفان من الكرات المكافئة: الأوّل عندما يكون الوتر عموديّاً على محور القطع المكافئ – وتسمّى الكرة المكافئة "الشبيهة بالبطّيخة"؛ الثاني عندما يكون الوتر كيفما اتفق- وتسمّى الكرة المكافئة "الشبيهة بالبيضة".

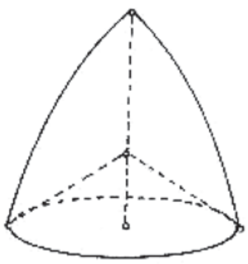
أخيراً يُعرِّف ثابت "المخروط الأجوَف" و"المعيّن المجسّم". نحصل على المخروط الأجوَف بواسطة دوران مثلث ذي زاوية منفرجة حول أحد ضلعَي هذه الزاوية، أي أننا نحصل على الفرق بين مخروطين لهما نفس القاعدة؛ في حين أنّ دوران مثلث حول أحد ضلعَي إحدى زواياه الحادّة، يُنتِج المجسّم الذي يسمّى "المعيّن

[١] انظر الفصل الخامس: القوهي.
[٢] انظر المجلد الثاني، الفصل الثاني، ص. ٢٠٣ وما يليها.

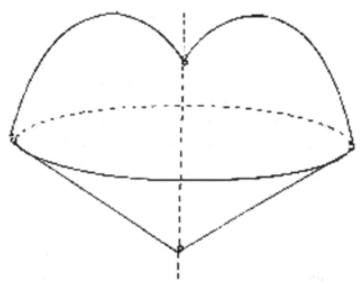
المجسّم"، أي مجموع مخروطين قاعدتهما مشتركة. ثم ينتقل ثابت إلى القضايا الحسابيّة، مع التذكير بأنّ هذا الكتاب يتضمّن سبع عشرة قضيّة تتناول الأعداد الصحيحة.



قبّة معتدلة الرأس



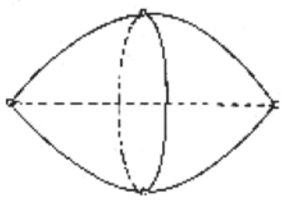
قبّة ناتئة الرأس



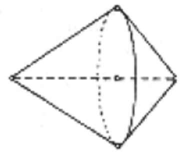
قبّة غائرة الرأس



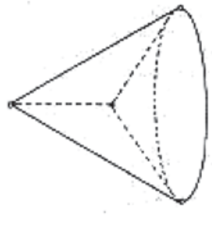
كرة مكافئة شبيهة بالبيضة



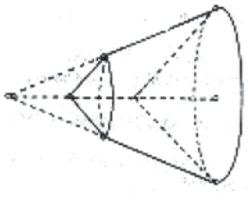
كرة مكافئة شبيهة بالبطيخة



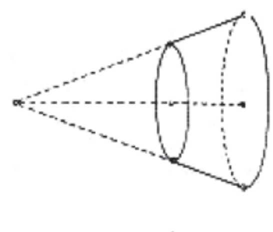
معيَّن مجسَّم



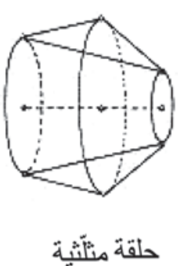
مخروط أجوف



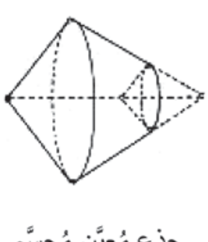
جذع مخروط أجوف



جذع مخروط دوراني



حلقة مثلّثية



جذع مُعيَّن مُجسَّم

لنذكّر بالخصائص التي يستخدمها الكتاب، وهي خصائص يأخذ ثابت معظمها كمسلّمات، ونشير إليها بالحرف A؛ اثنتان من بينها هما مقدّمتان مُثبتتان بواسطة برهان الخـُلف، ونرمز إليها بالحرف L. أمّا القضايا التي يستخدمها ثابت بن قرّة هنا، والتي توجد في كتابه السابق حول مساحة القطع المكافئ، فنرمز إليها بالحرف p.

A_0: الفرق بين عددين صحيحين متتاليين هو ١.

A_1: الفرق بين عددين زوجيّين* متتاليين هو ٢.

A_2: الفرق بين عددين فرديّين** متتاليين هو ٢.

A_3: بين عددين زوجيّين متتاليين، يوجد عدد فردي.

A_4: حاصل ضرب عدد صحيح بـِ٢ هو عدد زوجي.

A_5: كل عدد فردي يُضاف إليه ١ يعطي عدداً زوجيّاً.

L_6: مربّعان متواليان هما مربّعا عددين صحيحين متواليين وهي مقدّمة مثبتة في p_1 (أي في القضيّة الأولى من الكتاب السابق) وهنا في القضيّة الأولى.

A_7: يكون المربّع فرديّاً إذا، وفقط إذا، كان مربّعَ عدد فردي.

L_8: مربّعان فرديّان متواليان هما مربّعا عددين فرديّين متواليين – هذه مقدّمة مثبتة في p_6 (أي في القضيّة السادسة من الكتاب السابق).

A_9: يكون المكعّب فرديّاً إذا، وفقط إذا، كان مكعبَ عدد فرديّ.

A_{10}: مكعّبان متواليان هما مكعّبا عددين صحيحين متواليين.

A_{11}: مربّعان_مربّعان متواليان هما مربّعان لمربّعين متواليين.

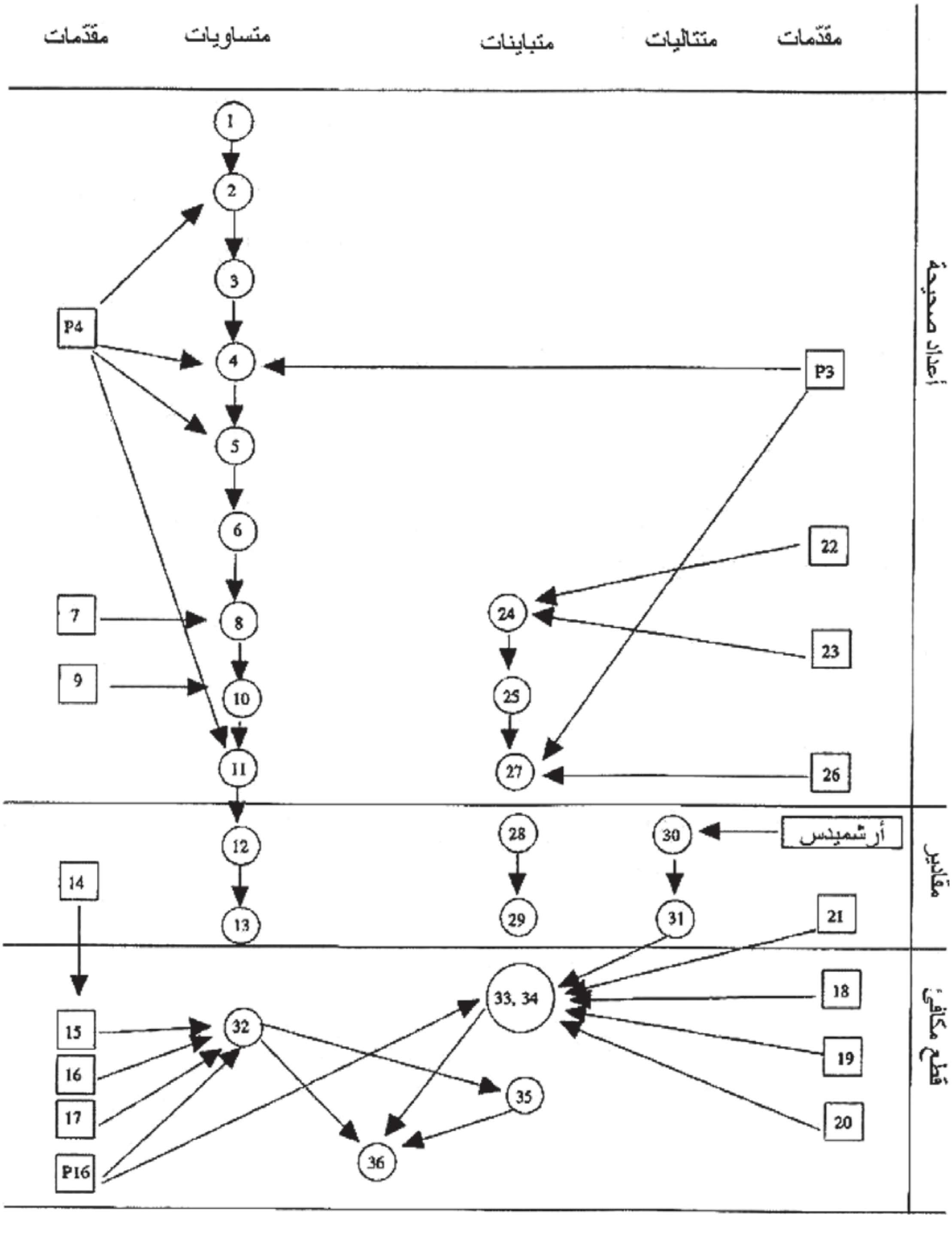
يظهر جليّاً استخدام هذه الخصائص، في النصّ، كما في القِطَع التي تمثّل الأعداد (انظر الشكل في أسفل الصفحة ٢٧٦ على سبيل المثال)، إلّا أننا لا نذكرها إلّا في الحالات التي يُشير إليها المؤلِّفُ نفسه.

لنلاحظ أيضاً أنّ ثابتَ بن قرّة يستخدم المتطابقات:

$(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$ ، $(x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$ ، $(x+y)(x-y) = x^2-y^2$ ،

* العدد "الزوجي" هو عدد "زَوج" (جمعه "أزواج") بحسب تعبير ثابت (المترجِم).
** العدد "الفردي" هو عدد "فرد" (جمعه "أفراد") بحسب تعبير ثابت (المترجِم).

ويفترض أنّ الصيغة التي تعطي حجم المخروط معروفة.



مصطلحات الرسم البياني: n : مقدّمة؛ Pn : قضية مبرهنة ضمن "في مساحة القطع المكافئ؛ n : قضيّة.

ملاحظة: 33 وَ 34 لا تشكّلان سوى قضيّة واحدة، كما أنَّ براهين 15 ، 16 وَ 17 مستقلة ومستخرَجة من 14 .

٢-٣-٢ الشرح الرياضي

٢-٣-٢-١ القضايا الحسابيّة

القضيّة ١- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ [n^2 - (n-1)^2 = 2n-1]$.

هذه القضيّة هي p_1 نفسها. يثبتها ابن قرّة باستخدام L_6.

القضيّة ٢- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ [(2n-1)^2 + 1 = 2(2n-1) + 4\sum_{p=1}^{n-1}(2p-1)]$.

يستنتج ابن قرّة هذه النتيجة من القضيّة ١، مستخدماً A_7 و A_5 و p_4 التي تعطي مجموع الأعداد الفرديّة.

القضيّة ٣-

$$(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[(2n-1)^3 + (2n-1) = 2(2n-1)\left(2n-1+2\sum_{p=1}^{n-1}(2p-1)\right)\right].$$

يستخدم البرهان المسلمتين A_7 و A_9 ويُستنتَج مباشرة من القضيّة ٢، وذلك بواسطة ضرب جميع الحدود بـِ $2n-1$.

القضيّة ٤- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ [(2n-1)^3 + (2n-1) = 2\left(n^4 - (n-1)^4\right)]$.

نحصل على هذه النتيجة من تحويل كتابة الطرف الأيمن من القضيّة ٣. فإذا أخذنا بعين الاعتبار p_4، يكون لدينا:

$$2(2n-1)\left[2n-1+2\sum_{1}^{n-1}(2p-1)\right] = 2(2n-1)\left[2n-1+2(n-1)^2\right]؛$$

لكن، وفقاً للقضيّة ١، لدينا: $2n-1 = n^2 - (n-1)^2$، فيكون:

$$2n-1+2(n-1)^2 = n^2 + (n-1)^2$$

غير أنّ : $\left[n^2-(n-1)^2\right]\left[n^2+(n-1)^2\right] = n^4-(n-1)^4$، فنحصل على النتيجة.

يستخدم البرهان إذاً القضيّة ٣ و A_9 و A_{11} وكذلك القضيّتين p_3 و p_4.

ملاحظة. لغاية الآن يُعبّر ثابت بن قرّة عن مجموع الأعداد الـ n الأولى الفرديّة بواسطة مربّع نصف العدد الزوجي الذي يلي أكبر هذه الأعداد؛ ويُعبَّر عنه هنا بواسطة مربّع n، أي مربّع العدد الصحيح ذي الرتبة نفسها.

القضيّة ٥. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[\sum_{1}^{n} (2p-1)^3 + \sum_{p=1}^{n} (2p-1) = 2 \left(\sum_{p=1}^{n} (2p-1) \right)^2 \right]$.

يُطبّق ثابت بن قرّة القضيّة ٤، من $p = 1$ إلى $p = n$.

$$s_1 = 1^3 + 1 = 2 \cdot 1^4 \Rightarrow \sigma_1 = 2 \cdot 1^4$$

$$s_2 = (2 \cdot 2 - 1)^3 + (2 \cdot 2 - 1) = 2(2^4 - 1^4) \Rightarrow \sigma_2 = s_1 + s_2 = \sigma_1 + s_2 = 2 \cdot 2^4$$

$$s_3 = (2 \cdot 3 - 1)^3 + (2 \cdot 3 - 1) = 2(3^4 - 2^4) \Rightarrow \sigma_3 = s_1 + s_2 + s_3 = \sigma_2 + s_3 = 2 \cdot 3^4.$$

لنفترض أنّه لدينا $\sigma_{p-1} = 2(p-1)^4$، حتى الرتبة $p-1$؛ عند ذلك، بما أنّ لدينا:

$s_p = (2p-1)^3 + (2p-1) = 2\left[p^4 - (p-1)^4 \right]$، نحصل على: $\sigma_p = \sigma_{p-1} + s_p = 2p^4$.

تكون النتيجة إذاً صحيحة بالنسبة إلى أيّة رتبة p، فيكون لدينا $\sigma_n = 2n^4$؛ لكن وفقاً للقضيّة p_4، لدينا: $n^4 = \left[\sum_{p=1}^{n} (2p-1) \right]^2$؛ فنحصل على النتيجة المطلوبة، انطلاقاً من القضيّة ٤ ومن p_4.

يعمل ثابت بن قرّة بطريقة استقراء تكراري[٣]، فيبيّن، من خلال استنتاجه لـِ σ_p من σ_{p-1}، أنّ النتيجة المُثبتة بالنسبة إلى σ_{p-1} صحيحة بالنسبة إلى σ_p.

القضيّة ٦. $(\forall n \in \mathbb{N}^*) \left[\sum_{p=1}^{n} (2p-1)\left(3(2p-1)^2 + 3\right) = 6 \left(\sum_{p=1}^{n} (2p-1) \right)^2 \right]$.

---

[٣] انظر ر. راشد

R. Rashed, «L'induction mathématique: al-Karajī – as-Samaw'al», *Archive for History of Exact Sciences*, 9, 1 (1972), pp. 1-21;

الذي استعيد في

Entre arithmétique et algèbre: Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes (Paris, 1984), pp. 71-91.

تُستنتَج هذه النتيجة مباشرة من القضيّة ٥، إذا ضربنا الطرفين بـِ 3 وإذا أختزلنا العامِل $(2p-1)$ الذي هو مشترك بين $(2p-1)^3$ و $(2p-1)$، وهذا ما يرجع إلى استخدام A_9.

القضيّة ٧- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left[(2n-2)\cdot 2n+1=(2n-1)^2\right]$.

البرهان مباشر، وهو يستدعي A_1 و A_3. وهذه القضيّة السابعة هي مقدّمة للانتقال من القضيّة ٦ إلى القضيّة ٨.

القضيّة ٨ - $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\ \left[6+\sum_{p=2}^{n}(2p-1)\big(3(2p-2)\cdot 2p+6\big)=6\left(\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right)^2\right]$.

وفق القضيّة ٧، لكلّ عدد صحيح p، حيث $1 \le p \le n$، لدينا:

$(2p-2)\cdot 2p+1=(2p-1)^2$؛

فيكون: $3(2p-2)\cdot 2p+6=3(2p-1)^2+3=3\left[(2p-1)^2+1\right]$.

ونستنتج: $\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\left[3(2p-2)\cdot 2p+6\right]=3\left\{\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\left[(2p-1)^2+1\right]\right\}$؛

لذلك، ووفق القضيّة ٦، يكون

$$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\left[3(2p-2)\cdot 2p+6\right]=6\left[\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right]^2 . \qquad (1)$$

لكن بالنسبة إلى $p=1$ لدينا: $6=(2p-1)\left[3(2p-2)\cdot 2p+6\right]$،

يمكن إذاً كتابة (1) وفق الصيغة التي أعطاها ثابت:

$$6+\sum_{p=2}^{n}(2p-1)\left[3(2p-2)\cdot 2p+6\right]=6\left[\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right]^2 .$$

القضيّة ٩- $(\forall n \in \mathbb{N}^*)\left[(2n-2)^2+(2n)^2+2n(2n-2)=3\cdot 2n(2n-2)+4\right]$.

تُستنتَج هذه النتيجة من المتطابقة $a^2+b^2=2ab+(b-a)^2$، بإضافة ab إلى الطرفين، مع $a=2n-2$ و $b=2n$، فينتج $b-a=2$ (وفقاً لِـ A_1).

القضيّة ١٠-

$$(\forall n\in\mathbb{N}^*)\left[6+\sum_{p=2}^{n}(2p-1)\Big((2p-2)^2+(2p)^2+2p(2p-2)+2\Big)=6\left(\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right)^2\right].$$

وفق القضيّة ٩، لدينا، لكلّ p، حيث $1\le p\le n$،

$$(2p-2)^2+(2p)^2+2p(2p-2)+2=3\cdot 2p(2p-2)+4$$

ويمكن إذاً تقديم القضيّة ٨ على شكل القضيّة ١٠.

القضيّة ١١- لكل عدد صحيح n، $(n\in\mathbb{N}^*)$، لدينا:

$$(\text{r}):\left[\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}\Big[(2p-1)\Big((2p-2)^2+(2p)^2+2p(2p-2)\Big)\Big]+\frac{2}{3}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right]$$

$$=\frac{1}{2}(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)$$

يمكن كتابة القضيّة ١٠ على الشكل التالي:

$$\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\Big[(2p-2)^2+(2p)^2+2p(2p-2)+2\Big]=6\left[\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right]^2 \qquad (1)$$

لأنّ لدينا إذا كان $p=1$:

$$(2p-1)\Big[(2p-2)^2+(2p)^2+2p(2p-2)+2\Big]=6\text{؛}$$

لكنّ $\sum_{p=1}^{n}(2p-1)=n^2=\frac{1}{4}\cdot(2n)^2$ (وفق p_4)، فيكون:

$$6\left[\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\right]^2=\frac{3}{2}(2n)^2\cdot\sum_{p=1}^{n}(2p-1).$$

إذا قسمنا طرفي (1) على 3، نحصل على النتيجة المطلوبة.

٢-٣-٢-٢ التعميم إلى متتاليات قِطَعٍ مستقيمة

القضيّة ١٢- لتكن $(b_p)_{p\geq 1}$، حيث $1\leq p\leq n$، متتالية قِطَع مستقيمة متناسبة مع الحدود ذات الرُتَب نفسها من متتالية الأعداد الفرديّة المتوالية $(2p-1)_{p\geq 1}$، ولتكن $(a_p)_{p\geq 1}$ متتالية قِطَع مستقيمة متناسبة مع الحدود ذات الرُتَب نفسها من متتالية الأعداد الزوجيّة المتوالية $(2p)_{p\geq 1}$؛ إذا وضعنا $a_0=0$ وافترضنا $b_1=\frac{a_1}{2}$، يكون لدينا:

$$(r'):\quad \frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}b_p\left[a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_p+a_p^2\right]+\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\sum_{p=1}^{n}b_p=\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p.$$

وبرهان ذلك هو التالي: يكون لكلّ عدد صحيح p، حيث $1\leq p\leq n$،

$\frac{a_p}{a_1}=\frac{2p}{2}$، $\frac{b_p}{b_1}=\frac{2p-1}{1}$ مع $b_1=\frac{a_1}{2}$، فيكون $\frac{b_p}{a_p}=\frac{2p-1}{2p}$؛ من جهة أخرى

$$\frac{a_{p-1}}{a_p}=\frac{2p-2}{2p} \quad \text{و} \quad \frac{a_{p+1}}{a_p}=\frac{2p+2}{2p}.$$

لدينا إذاً

$$\frac{b_p\cdot\left(a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_p+a_p^2\right)}{a_p^3}=\frac{(2p-1)\left[(2p-2)^2+2p(2p-2)+(2p)^2\right]}{(2p)^3}$$

(حيث لِـ $p=1$، $2p-2=0$ وحيث $a_0=0$)؛ لكن لدينا $\frac{a_p^3}{a_n^3}=\frac{(2p)^3}{(2n)^3}$

و $\frac{a_n^3}{a_n^2\cdot\sum_{p=1}^{n}b_p}=\frac{(2n)^3}{(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}$، فيكون :

$$(1)\qquad \frac{b_p\left(a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_p+a_p^2\right)}{a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p}=\frac{(2p-1)\left[(2p-2)^2+2p\cdot(2p-2)+(2p)^2\right]}{(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}.$$

ويكون، من جهة أخرى:

$$(2)\qquad \frac{\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\cdot\sum_{p=1}^{n}b_p}{a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p}=\frac{\frac{2}{3}\cdot\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}{(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}.$$

إذا رمزنا بـِ A و A' ($A'=A'(b,a)$) على التوالي إلى الطرف الأيسر لكلٍّ من العلاقتين (r) و (r') (في القضيّتين ١١ و ١٢)، فإنّ (1) و (2) تعطيان:

$$\frac{A'}{a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p}=\frac{A}{(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)}\cdot$$

لكن وفق القضيّة ١١ لدينا: $A=\frac{1}{2}(2n)^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)$ ، فيكون $A'=\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$.

ملاحظة - إنّ الفرضيّة $b_1=\frac{a_1}{2}$ تعادل اختيار قطعة مستقيمة مأخوذة كوحدة وهي b_1.

عند ذاك يمكن التعبير عن قِطَع المتتاليتين بواسطة b_1، $b_p=(2p-1)b_1$ و $a_p=p\cdot a_1=2p\cdot b_1$، فيكون:

$$A'=b_1^3\cdot A=b_1^3\cdot\frac{1}{2}(2n)^2\sum_{1}^{n}(2p-1)=\frac{1}{2}(2n\cdot b_1)^2\cdot\sum_{1}^{n}b_1(2p-1)=\frac{1}{2}a_n^2\sum_{1}^{n}b_p$$

لكنّ ثابتاً لم يسلك هذا المسار، بل أسند برهانه على متساويات بين النِسب. فحسب فرضيّات القضيّة، لدينا: $\frac{a_{p-1}}{a_p}=\frac{2p-2}{2p}$ و $\frac{a_{p+1}}{a_p}=\frac{2p+2}{2p}$، والمقامان a_p و $2p$ هما نفسهما في النسبتين.

لكي نحصل على النسبة $\frac{b_p}{a_p}$، ننطلق من النسبتين $\frac{a_1}{a_p}=\frac{2}{2p}$ و $\frac{b_p}{b_1}=\frac{2p-1}{1}$؛ فيكون $\frac{b_p}{a_p}\cdot\frac{a_1}{2b_1}=\frac{(2p-1)}{2p}$. وإذا وضعنا $\frac{a_1}{2b_1}=1$، أي $b_1=\frac{a_1}{2}$، نحصل على النسبة $\frac{b_p}{a_p}=\frac{2p-1}{2p}$، حيث يكون المقامان a_p و $2p$.

هذا ما يفسّر اختيار الشرط $b_1=\frac{a_1}{2}$، من أجل تطبيق مباشر للقضيّة ١١.

القضيّة ١٣ - النصّ هنا يستعيد نصّ القضيّة ١٢، ويصل إلى النتيجة نفسها، لكن هذه المرّة مع الافتراض $b_1\neq\frac{a_1}{2}$.

لتكن إذاً المتتالية $(c_p)_{1\leq p\leq n}$، المحدّدة بـ $b_1=\frac{c_1}{2}$ و $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_p}{a_p}$. يكون لدينا،

$\frac{a_p^2}{c_p^2}=\frac{a_{p-1}a_p}{c_{p-1}c_p}=\frac{a_1^2}{c_1^2}$ لكلّ p مع $1\leq p\leq n$؛

فنستنتج استناداً إلى ما سبق:

$$\frac{\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}b_p\left(a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_p+a_p^2\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\sum_{p=1}^{n}b_p}{\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}b_p\left(c_{p-1}^2+c_{p-1}\cdot c_p+c_p^2\right)+\frac{2}{3}\left(\frac{c_1}{2}\right)^2\sum_{p=1}^{n}b_p}=\frac{a_1^2}{c_1^2}=\frac{a_n^2}{c_n^2}.$$

لكن، ووفق القضيّة ١٢، فإنّ المقام ("المخرَج") يساوي: $\frac{1}{2}c_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$؛ فنستنتج أنّ البَسط ("الصورة") يساوي: $\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$.

نجد إذاً نفس النتيجة الحاصلة في القضيّة ١٢.

ملاحظة - ترتكز الطريقة المستخدَمة أيضاً على متساويات بين النِسَب.

يُنسَب هنا الحدّان b_p و a_p إلى قطعتين مأخوذتين كوحدتين مختلفتين، b_1 و a_1.

يُدخِل ثابت في هذه الحالة المتتالية (c_p) بحيث يكون $b_1=\frac{c_1}{2}$، $\frac{c_1}{a_1}=\frac{c_p}{a_p}=\frac{c_n}{a_n}$؛

في هذه الحالة تحقّق المتتاليتان (b_p) و(c_p) شروط القضيّة ١٢، فيكون $A'(b,c)=\frac{1}{2}c_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$، حيث نرمز بـ $A'=A'(b,a)$ إلى الطرف الأوّل من المعادلة (r') للقضيّة ١٢، فيكون لدينا : $\frac{A'(b,c)}{A'(b,a)}=\frac{c_n^2}{a_n^2}$؛ فنحصل على : $A'(b,a)=\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$.

والتمييز بين الحالتين $b_1=\frac{a_1}{2}$ و $b_1\neq\frac{a_1}{2}$ ليس ضروريّاً، وبالإمكان إعطاء برهان واحد.

يمكن كتابة القضيّة ١١ على الشكل التالي: لكل عدد صحيح n، $(n\in\mathbb{N}^*)$، لدينا

$$\cdot\frac{4}{3}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\left[(p-1)^2+p^2+p(p-1)\right]+\frac{2}{3}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)=\frac{(4n)^2}{2}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)$$

يمكن كتابة فرضيّتي القضيّتين ١٢ و١٣ على الشكل التالي: لكل عدد صحيح p، $1\le p\le n$: $b_p=(2p-1)b_1$ وَ $2a_p=2p\cdot a_1$ أي $a_p=p\cdot a_1$ ؛ فنستنتج:

$$\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}b_p\left[a_{p-1}^2+a_p\cdot a_{p-1}+a_p^2\right]=\frac{1}{3}b_1\cdot a_1^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)\left[(p-1)^2+p\cdot(p-1)+p^2\right]$$

$$\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\sum_{p=1}^{n}b_p=\frac{2}{3}b_1\cdot\frac{a_1^2}{4}\sum_{p=1}^{n}(2p-1)$$

$$\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p=\frac{1}{2}n^2\cdot b_1\cdot a_1^2\sum_{p=1}^{n}(2p-1)$$

من هنا، إذا ضربنا طرفَيْ العلاقة (r) (في القضيّة ١١) بـِ $b_1\cdot\frac{a_1^2}{4}$، يكون لدينا:

$$\cdot\frac{1}{3}\sum_{p=1}^{n}b_p\left[a_{p-1}^2+a_p\cdot a_{p-1}+a_p^2\right]+\frac{2}{3}\left(\frac{a_1}{2}\right)^2\sum_{p=1}^{n}b_p=\frac{1}{2}a_n^2\sum_{p=1}^{n}b_p$$

القضيّة ١٤ـ إذا كان ثمّة خمسة مقادير a_1، a_2، a_3، a_4، a_5، بحيث يكون $\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_3}{a_4}=\frac{a_4}{a_5}$ و $a_1<a_2$، عند ذاك يكون $a_1(a_5-a_3)=(a_2-a_1)(a_3+a_4)$.

تؤدّي الفرضيّة $a_1<a_2$ إلى $a_3<a_4<a_5$. يكون لدينا: $\frac{a_1}{a_2-a_1}=\frac{a_3}{a_4-a_3}=\frac{a_4}{a_5-a_4}$،

فيكون $\frac{a_1}{a_2-a_1}=\frac{a_3+a_4}{a_5-a_3}$ ؛ ويكون بالتالي: $a_1(a_5-a_3)=(a_2-a_1)(a_3+a_4)$.

ملاحظات ـ

١) لم يحدّد المؤلِّف طبيعة المقادير. من الضروري أن نأخذ a_1 و a_2 من نوع واحد، وذلك لأنّ الفرضيّة تُدخل نسبتهما والنتيجة تُدخل الفرق بينهما، كما أنّه من الضروري أن نأخذ أيضاً a_3، a_4 و a_5 من نوع واحد، للأسباب نفسها. فإذا كان، على سبيل المثال، a_1 و a_2 طولين و a_3، a_4، a_5 مساحات، فإنّ النتيجة تتناول الأحجام (ستكون هذه حالة القضايا ١٥ و ١٦ و ١٧).

٢) تَدخُل الفرضيّة $a_1 < a_2$ في عبارة الفرقين $a_2 - a_1$ و $a_5 - a_3$. وإذا كان $a_1 > a_2$، تكون النتيجة $a_1 \left(a_3 - a_5\right) = \left(a_1 - a_2\right)\left(a_3 + a_4\right)$.

٣) إذا رمزنا بـ $\frac{1}{k}$، $k \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$، إلى القيمة المشتركة للنِسَب، يكون لدينا $a_2 = ka_1$، $a_4 = ka_3$، $a_5 = k^2 a_3$؛ وتُستخرَج عندئذ نتيجة القضيّة من المتطابقة:

$$k^2 - 1 = \left(k - 1\right)\left(k + 1\right).$$

٢-٣-٢-٣ أحجام المخروطات، والمعيّنات المجسّمة، ومجسّمات أخرى

المجسّم الدوراني موضوع الدرس في القضايا ١٥ و ١٦ و ١٧ هو الفرق بين مجسّمين متحاكِيَين، حيث تكون نسبة التحاكي مساوية لنسبة القطرين اللذين نفترضهما معلومين. وبما أنّ حجم المخروط الدوراني معروف، فإنَّ الحجم المطلوب، يُعبَّر عنه في الحالات الثلاث بمجاميع أو بفروق أحجام مخروطاتٍ دورانيّة، والصيغة هي نفسها في الحالات الثلاث.

القضيّة ١٥ - حجم جذع مخروط دوراني

الشكل مرسوم في أحد المستويات المارَّة بمحور المخروط، ويكون المركزان L و M للقاعدتين الدائريّتين لجذع المخروط، مُتسامِتين مع النقطة K التي هي نقطة التقاطع للقطعتين AD و BE المُمَدَّدتين على استقامة.

حجم جذع مخروط دوراني، ارتفاعه h ونصفا قطري قاعدتيه الدائريّتين r و R، يكون $V = \frac{1}{3}\pi h\left(R^2 + rR + r^2\right)$.

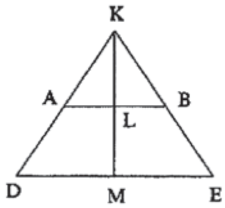
الحجم المطلوب هو $V = V\left(KDE\right) - V\left(KAB\right)$.* إذا وضعنا $H = KM$، يكون $H - h = KL$. يكون لدينا $\frac{r}{R} = \frac{H - h}{H}$، لأنّ $LA // MD$. يُدخِل ثابت دائرة إضافيّة

---

* الآن وفي ما يلي، نرمز بـ $V(ABC)$، إلى حجم مخروط رأسه A وقطر قاعدته BC؛ ونرمز بـ $V(H)$ أو أيضاً بـ vol.(H) إلى حجم أي مجسّم H (المترجِم).

نصف قطرها r'، حيث يكون $r' = \sqrt{rR}$، فيكون لدينا $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R} = \frac{rR}{R^2} = \frac{r^2}{rR}$

وَ $\frac{\pi rR}{\pi R^2} = \frac{\pi r^2}{\pi rR} = \frac{H-h}{H}$؛



وبتطبيق القضيّة ١٤ يكون لدينا: $(H-h)(\pi R^2 - \pi r^2) = h(\pi r^2 + \pi rR)$.

وإذا أضفنا إلى الطرفين πhR^2، يُصبح لدينا:

$$\pi hR^2 - \pi(H-h)r^2 = h(\pi r^2 + \pi rR + \pi R^2)؛$$

فيكون $V = \frac{1}{3}h(\pi r^2 + \pi rR + \pi R^2)$.

ملاحظة. التحاكي $\left(K, \frac{r}{R}\right)$، يعطينا بالفعل: $\frac{H-h}{H} = \frac{r}{R}$، فيكون $\frac{H-h}{h} = \frac{r}{R-r}$؛

ويكون إذاً $H - h = \frac{h \cdot r}{R-r}$، $H = \frac{R \cdot h}{R-r}$، فيكون:

$$V = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot \frac{R^3 - r^3}{R-r} = \frac{1}{3}\pi \cdot h \cdot (R^2 + rR + r^2).$$

وهكذا تحلُّ القضيّة ١٤ محلَّ المتطابقة: $R^2 + rR + r^2 = \frac{R^3 - r^3}{R-r}$.

القضيّة ١٦ـ حجم المخروط الأجوَف، وحجم جذع المخروط الأجوَف

الشكل مرسوم في أحد المستويات المارَّة بمحور المخروط. والنقاط التالية: الرأسان H و G ومركزا الدائرتين ونقطة التقاطع M للقطعتين المستقيمين DA و EB، كلها متسامتة؛ فضلاً عن ذلك لدينا $AB // DE$ و $AG // DH$ (انظر التعريفات في المقدّمة). نصّ القضيّة هو التالي:

حجم جذع مخروط أجوَف طول محوره h ونصفا قطري قاعدتيه الدائريَّـتين R و r، هو: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot h\left(R^2 + rR + r^2\right)$.

يبدأ ثابت بحساب حجم المخروطين الأجوَفين:

$$V\left(MEHD\right) = \frac{1}{3}\pi MS \cdot R^2 - \frac{1}{3}\pi HS \cdot R^2 = \frac{1}{3}\pi H_1 \cdot R^2$$

و

$$V\left(MAGB\right) = \frac{1}{3}\pi MN \cdot r^2 - \frac{1}{3}\pi GN \cdot r^2 = \frac{1}{3}\pi\left(H_1 - h\right)\cdot r^2$$

حيث يكون $H_1 = MH$. فيكون حجم جذع المخروط الأجوَف:

$$V = \frac{1}{3}\pi h \cdot R^2 + \frac{1}{3}\pi\left(H_1 - h\right)\left(R^2 - r^2\right).$$

إذا وضعنا، كما في القضيّة ١٥، $r'^2 = rR$، يكون لدينا:

$\frac{r}{r'} = \frac{r'}{R}$ و $\frac{r^2}{r'^2} = \frac{r'^2}{R^2} = \frac{r}{R} = \frac{H_1 - h}{H_1}$؛ فيكون $\frac{H_1 - h}{H_1} = \frac{\pi r^2}{\pi rR} = \frac{\pi rR}{\pi R^2}$.

ننهي الحساب، كما في القضيّة ١٥، بتطبيق القضيّة ١٤.

القضيّة ١٧ـ حجم معيّن مجسّم، وجذع معيّن مجسّم

بمـا أنّ المعـيّن المجسّـم هـو بالتحديـد مجمـوع مخـروطين قاعـدتهما واحـدة، فـإنّ الطريقـة المسـتخدَمة هنـا هـي نفسـها الـواردة فـي القضـيّة ١٦، كمـا أنّ الصـيغة التـي تعطي الحجم هي نفسها: $V = \frac{1}{3}\pi \cdot h\left(R^2 + rR + r^2\right)$.

القضيّة ١٨ـ لتكن $\widehat{AB}$ قوساً من قطع مكافئ قطره CD، ولـتكن E و F نقطتـان مـن القـوس $\widehat{AB}$. نـُخرج مـن A و E و F ، ثلاثـة خطـوط مسـتقيمة متوازيـة فيمـا بينهـا وتقطع قطر القِطع على النقاط G و H و I على التوالي؛ ونخرج من جهة أخرى، ثلاثة خطوط مستقيمة موازية للقطر تقطع خطّ التماسّ فـي النقطـة E علـى النقـاط K

و E و L علـــــى التـــــوالي. إذا كـــــان $AG-EH=EH-FI$، يكـــــون $AK=FL=\frac{1}{2}(GH-HI)$. [انظر الشكل، ص. ٢٩٦]

يكون لدينا: $IF // AG$ و $IG // FM$، فيكون $IF=GM$؛ كذلك $HG // ES$ و $HE // AG$، فيكون $HE=GS$. يكون لدينا، إذاً، $AG-EH=EH-FI$، أي $EH=\frac{1}{2}(AG+FI)$، أي $\frac{1}{2}(AG+GM)$، فتكون النقطة S منتصف MA، ويقطع الخطّ ES الخطّ AF في منتصفه N. لكن $ES // CD$، فيكون ES القطرَ المرافق للوتر AF، ويكون AF موازياً لخطّ المماسّ في E. يكون لدينا إذاً

$$AK=LF=NE=SE-SN=GH-\frac{1}{2}MF=GH-\frac{1}{2}(GH+HI)=\frac{1}{2}(GH-HI)$$

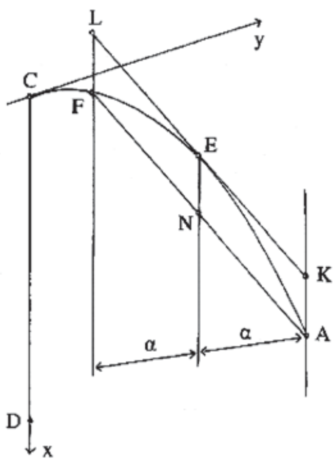
في الحالة الخاصّة حيث تكون النقطة F مندمجة مع C، يكون لدينا $H=O$ و $M=G$، فإذا كان $MS=\frac{1}{2}MA$، يكون لدينا :

$$.LF=AK=\frac{1}{2}(MO-OF)=\frac{1}{2}(GH-HI)$$

ملاحظتان -

١) لا تتعلق النتيجة المثبتة بالاتجاه المشترك للخطوط AG و EH و FI.

٢) المتســاوية $GS=\frac{1}{2}(AG+GM)$ تعنــي أنّ القطــرين الخــارجين مــن A و F متوازيان ومتساويا البعد عن القطر الخارج من E.



لننسُب القطعَ المكافئ إلى المَعْلَم (C,Cx,Cy) الذي يكون أصله في النقطة C والذي يكون فيه القطر DC محور الإحداثيّات الأولى، ويكون خطّ التماس في النقطة C محور الإحداثيّات الثانية. ولتكن $y^2=ax$، معادلة القطع المكافئ حيث يكون a الضلع القائم المُرفَق بالقطر DC. يكون لدينا:

$y_F=y_E-\alpha$، $y_A=y_E+\alpha$ و $x_N=\dfrac{x_A+x_F}{2}$.

لكنَّ $x_A+x_F=\dfrac{1}{a}\left(y_A^2+y_F^2\right)=\dfrac{1}{a}\left(2y_E^2+2\alpha^2\right)$، فيكون $x_N=\dfrac{x_A+x_F}{2}=\dfrac{1}{a}\left(y_E^2+\alpha^2\right)$؛

ولكنَّ $x_E=\dfrac{1}{a}y_E^2$، فيكون $EN=x_N-x_E=AK=\dfrac{1}{a}\cdot\alpha^2$.

لأيّة قوس $\widehat{AF}$ من قطع مكافئ، يُحدّد إذاً خطّ التماسّ الموازي للوتر AF، على القطرين المارّين بالنقطتين A و F، قطعتين مستقيمتين متساويتين:

$$AK=FL=\frac{\left(y_F-y_A\right)^2}{4a}.$$

القضيّة ١٩- "إذا كان لمتوازيَي أضلاع $ABCD$ و $AEFD$ قاعدة مشتركة AD، وإذا كانت قاعدتاهما BC و EF على خطّ واحد Δ موازٍ لـِ AD، فإنّهما، بدورانهما حول Δ، يولدان مجسّمين لهما حجمان متساويان".

يعطي الشكلُ، الموجود في النصّ، النقاطَ على Δ وفق الترتيب $BECF$. لدينا $BC=EF$، فيكون $BE=CF$. ويولد المثلثان EAB و FDC، بواسطة الدوران حول Δ، مُجسَّمين ذويْ حجمين متساويَين، فيكون:

$$^{*}\ \mathrm{vol}\cdot(ABCD)=\mathrm{vol}\cdot(ABFD)-\mathrm{vol}\cdot(DCF)$$

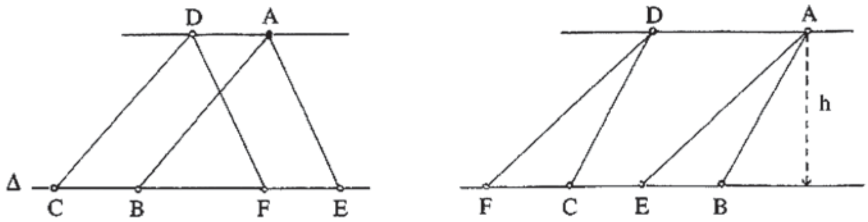
$$\mathrm{vol}\cdot(AEFD)=\mathrm{vol}\cdot(ABFD)-\mathrm{vol}\cdot(ABE)$$

فيكون: $\mathrm{vol}\cdot(ABCD)=\mathrm{vol}\cdot(AEFD)$.

* الآن وفي ما يلي، نرمز بـ $V(H)$، أو بـ $v(H)$ أو بـ $vol.(H)$ إلى حجم الجسم H (المترجِم).

ملاحظتان -

١) قد يكون ترتيب النقاط E، B، F، C، على Δ، مختلفاً عن ترتيبها الوارد في النصّ. ولكن، في جميع حالات الشكل، يتوافق المثلّثان DFC و AEB في الانسحاب المحدّد بالمُتجِه AD، ويولّدان إمّا معيّنين مجسّمين، وإمّا مخروطين أجوَفين، متساويَي الحجم.



٢) الحجم المولّد من كلٍّ من متوازيَي الأضلاع هو إمّا أسطوانة قائمة وإمّا مخروط أجوَف[٤] مكافئ لأسطوانة قائمة. في جميع الحالات، هذا الحجم هو $V = \pi AD \cdot h^2$، حيث تكون h المسافة بين المستقيمين AD و Δ، أي ارتفاع كلٍّ من متوازيَي الأضلاع.

القضيّة ٢٠ - ليكن $ABCD$ و $EFGH$ متوازيَي أضلاع واقعين في مستوٍ واحد ومن جهة واحدة بالنسبة إلى المستقيم Δ الذي توجد عليه القاعدتان BC و FG؛ إذا كان $BC = FG$، فإنّ $ADHE$ متوازيُ الأضلاع، وتحقّق المجسّمات المولّدة من دوران متوازيات الأضلاع الثلاثة حول Δ العلاقة:

$\mathrm{vol}\cdot(ADHE) = |\mathrm{vol}\cdot(ABCD) - \mathrm{vol}\cdot(EFGH)|$. [انظر الشكل، ص. ٢٩٩]

الطريقة المستخدَمة هنا هي نفس الطريقة المستخدمة في القضيّة ١٩، حيث يجري العمل بواسطة مجاميع الأحجام أو فروقها. من الواضح أنّ رباعيَي الأضلاع $BAEF$ و $CDHG$ متساويان، لأنّ $CDHG$ يستنتَج من $BAEF$ بواسطة الانسحاب المحدَّد بالمتجه BC. والمجسّمان المولدان من دوران هذين الرباعيَّين للأضلاع حول Δ، يتوافقان في نفس الانسحاب، وبالتالي فإنّ حجميهما متساويان:

---

[٤] نشير إلى انّ ابن الهيثم يسمّيه "الأسطوانة المنخرطة".

$$\text{vol}\cdot(ABFE)=\text{vol}\cdot(CDHG)$$

لكنَّ:

$$\text{vol}\cdot(BAEHG)-\text{vol}\cdot(CDHG)=\text{vol}\cdot(ABCD)+\text{vol}\cdot(ADHE)$$

و

$$\text{vol}\cdot(BAEHG)-\text{vol}\cdot(ABFE)=\text{vol}\cdot(EFGH)$$

فيكون

$$\text{vol}\cdot(ADHE)=\text{vol}\cdot(EFGH)-\text{vol}\cdot(ABCD)$$

ملاحظة ـ في الشكل الموجود في النصّ، تكون h ، مسافة AD إلى Δ أكبر من h' مسافة HE إلى Δ فيكون: $\text{vol}\cdot(EFGH)>\text{vol}\cdot(ABCD)$ ، وتـُكتب المتساويات وفقاً لهذه الفرضيّة. ولكن يمكن أن يكون $h\leq h'$ ، فيكون $\text{vol}\cdot(EFGH)\leq\text{vol}\cdot(ABCD)$ ، وتكون النتيجة العامّة إذاً:

$$\text{vol}\cdot(ADHE)=\left|\text{vol}\cdot(ABCD)-\text{vol}\cdot(EFGH)\right|$$

٢-٣-٢-٤ خاصيّة القِطَع المستقيمة الأربع

القضيّة ٢١ - "إذا كانت a ، b ، c ، d أربع قِطَع مستقيمة بحيث يكون $a=\frac{b}{3}$ و $c=\frac{d}{2}$ ، يكون $ac^2+b\left(c^2+d^2+cd\right)-(a+b)d^2>ad^2$.

يكون لدينا: $c=\frac{d}{2}\Rightarrow c^2=\frac{d^2}{4}$ $\qquad$ $a=\frac{b}{3}\Rightarrow a=\frac{a+b}{4}$ ،

فيكون: $\frac{c^2}{d^2}=\frac{a}{a+b}$ أي $c^2(a+b)=ad^2$.

ولكن، وفق الفرضيّة لدينا $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$ ، فيكون $\frac{a}{b}>\frac{c\,d}{d^2}$ وبالتالي $bcd>ad^2$ ؛ فيكون $bcd+(a+b)\cdot c^2>2a\cdot d^2$ ؛ وإذا طرحنا $a\cdot d^2$ من الطرفين، يكون لدينا:

$ac^2+b\left(c^2+cd\right)-ad^2>ad^2$ ؛ فنحصل على النتيجة:

$$.ac^2+b\left(c^2+cd+d^2\right)-(a+b)d^2>ad^2$$

ملاحظة ـ

تناول ثابت الحالة الخاصّة التي يكون فيها $\frac{b}{a}=3$ و $\frac{d}{c}=2$، وهذه هي القيم التي تدخل في القضيّة ٣٣. لكن هذه القيم العدديّة لا تدخل إلّا للتعبير عن الشرطين:

$$(1)\quad \frac{b}{a}>\frac{d}{c} \qquad \text{و} \qquad (2)\quad 1+\frac{b}{a}=\frac{d^2}{c^2}.$$

القضيّة إذاً صحيحة في ظلّ الفرضيّتين (1) و (2)، وهما تتضمَّنان فرضيّة النصّ كحالة خاصَّة. ونلاحظ أنّ لكلّ عدد صحيح n، $n\geq 2$، فإنّ النسبتين $\frac{d}{c}=n$ و $\frac{b}{a}=n^2-1$ تحقّقان الشرطين (1) و (2).

٢ـ٣ـ٢ـ٥ القضايا الحسابيّة

القضيّة ٢٢ـ $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\ [p(p+1)=(p-1)^2+(p-1)+2p]$.

برهان هذه القضيّة مباشر. ويستخدم ثابت هنا الخاصة A_0 المتعلّقة بعددين صحيحين متتاليين.

القضيّة ٢٣ـ $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\left[(p+1)^2+(p-1)^2=p\big((p-1)+(p+1)\big)+2\right]$.

إذا وضعنا $a=p-1$، $b=p$، $c=p+1$، يكون لدينا:

$c=b+1$، فيكون $c^2=cb+c$

$b=a+1$، فيكون $ba=a^2+a$

$$c^2+a^2=cb+ba+(c-a)=b(c+a)+2$$

(باستخدام A_0).

الفرضيّات في القضايا ٢٤ و ٢٥ و ٢٧، هي نفسها، وتتناول ثلاثة أعداد صحيحة متتالية $B=p-1$، $C=p$، $D=p+1$ وترفق بهذه الأعداد، الأعداد الفرديّة F و G و H، على التوالي: $F=2(p-1)-1$ $\quad G=2p-1$ $\quad H=2(p+1)-1$.

نلاحظ أنّ العددين $A=1$ و $E=1$ اللذين ذكرهما ثابت لا يظهران في البراهين. وهو لا يدخلهما إلّا ليوضّح أنّه يتناول هنا متتالية الأعداد الصحيحة الطبيعيّة ومتتالية الأعداد الفرديّة، والاثنتان تبدآن بالعدد ١، بحيث يكون للأعداد B، C، D من جهة، وللأعداد F، G، H من جهة أخرى، على التوالي نفس المراتب، في كلّ واحدة من المتتاليتين التي توجد فيها هذه الأعداد.

القضيّة ٢٤- $(\forall p\in\mathbb{N}^*)\left[\begin{array}{l} p(2p-1)\left((p-1)+(p+1)\right)+2p(p+1)> \\ (2p-1)\left((p-1)^2+(p+1)^2\right)+2(p-1)^2 \end{array}\right]$

لنسمِّ I و II طرفي المتباينة؛ إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيّتين ٢٢ و ٢٣، يكون لدينا: $\mathrm{I}=(2p-1)\left[(p+1)^2+(p-1)^2\right]-2(2p-1)+2(p-1)^2+2(p-1)+4p$؛

لكن: $2(p-1)+4p-2(2p-1)=2p$، فيكون $\mathrm{I}=\mathrm{II}+2p$، ويكون بالتالي $\mathrm{I}>\mathrm{II}$ (وقد تمّ استخدام A_2 و A_4).

القضيّة ٢٥-

$$(\forall p\in\mathbb{N}^*)\left[\begin{array}{l} (2p-1)\left((p-1)^2+p^2+p\cdot(p-1)\right)+(2p+1)\left(p^2+(p+1)^2+p\cdot(p+1)\right)> \\ \left((2p-1)+(2p+1)\right)\left((p-1)^2+p^2+(p+1)^2\right) \end{array}\right]$$

يمكن كتابة القضيّة ٢٤ على الشكل التالي:

$$p(p-1)(2p-1)+p(p+1)(2p+1)>(2p+1)(p-1)^2+(2p-1)(p+1)^2$$ ؛

وإذا أضفنا إلى الطرفين العبارة: $(2p-1)\left[(p-1)^2+p^2\right]+(2p+1)\left[p^2+(p+1)^2\right]$، نحصل على النتيجة المطلوبة.

القضيّة ٢٦- $\forall p\in\mathbb{N}^*,\ (p-1)(p+1)+1=p^2$.

هذه القضيّة هي مقدّمة وبرهانُها مباشر (باستخدام A_0).

القضيّة ٢٧ـ

$$(\forall p \in \mathbb{N}^*)\left[\begin{array}{l}(2p-1)\left((p-1)^2+p^2+p\cdot(p-1)\right)+(2p+1)\left(p^2+(p+1)^2+p\cdot(p+1)\right)\\ -\left((2p-1)+(2p+1)\right)\left((p-1)^2+(p-1)(p+1)+(p+1)^2\right)>(p+1)^2-(p-1)^2\end{array}\right]$$

ننطلق من القضيّة ٢٥ التي نحوّل الطرف الثاني منها، آخذين بالاعتبار القضيّة ٢٦ والمتساوية: $(2p-1)+(2p+1)=4p=(p+1)^2-(p-1)^2$، التي تُستنتَج مباشرة من p_3.

٢ـ٣ـ٢ـ٦ متتالية القِطَع المستقيمة والتحديد من الأعلى

القضيّة ٢٨ـ لكلّ عدد p، $1\le p\le n$، لتكن (a_p) متتالية قِطَع متناسبة مع الـ p أعداد الصحيحة المتتالية، ولتكن (b_p) متتالية قِطَع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتتالية $2p-1$. إذا افترضنا $a_1=b_1$، يكون

$$\begin{cases}b_p\left(a_{p-1}^2+a_p\cdot a_{p-1}+a_p^2\right)+b_{p+1}\left(a_p^2+a_p\cdot a_{p+1}+a_{p+1}^2\right)\\ -\left(b_p+b_{p+1}\right)\left(a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_{p+1}+a_{p+1}^2\right)>b_1\left(a_{p+1}^2-a_{p-1}^2\right)\end{cases}.$$

يكون لدينا، لكلّ عدد p، $1\le p\le n$: $\frac{a_1}{a_p}=\frac{1}{p}$ و $\frac{b_1}{b_p}=\frac{1}{2p-1}$ مع $a_1=b_1$، فيكون: $\frac{b_p}{a_p}=\frac{2p-1}{p}$. يكون لدينا أيضاً، إذا وضعنا $a_0=0$، $\frac{a_{p-1}}{a_p}=\frac{p-1}{p}$ و $\frac{a_{p+1}}{a_p}=\frac{p+1}{p}$،

فنستخرج:

$$\frac{b_p\left(a_{p-1}^2+a_p\cdot a_{p-1}+a_p^2\right)}{a_p^3}=\frac{(2p-1)\left[(p-1)^2+p\cdot(p-1)+p^2\right]}{p^3}،$$

$$\frac{b_{p+1}\left(a_p^2+a_p\cdot a_{p+1}+a_{p+1}^2\right)}{a_p^3}=\frac{(2p+1)\left[p^2+p\cdot(p+1)+(p+1)^2\right]}{p^3}،$$

$$\frac{\left(b_p+b_{p+1}\right)\left(a_{p-1}^2+a_{p-1}\cdot a_{p+1}+a_{p+1}^2\right)}{a_p^3}=\frac{\left[(2p-1)+(2p+1)\right]\left[(p-1)^2+(p-1)(p+1)+(p+1)^2\right]}{p^3}$$

وكذلك يكون: $\frac{a_p^3}{b_1\left(a_{p+1}^2-a_{p-1}^2\right)}=\frac{p^3}{(p+1)^2-(p-1)^2}$.

إذا رمزنا، إذاً، بـِ A إلى الطرف الأيسر من المتباينة التي نبحث عنها وبـِ A' إلى الطرف الأيسر من المتباينة في القضيّة ٢٧، يكون لدينا:

$$\frac{A}{b_1\left(a_{p+1}^2-a_{p-1}^2\right)}=\frac{A'}{(p+1)^2-(p-1)^2}\text{؛}$$

لكن، وفقاً للقضيّة ٢٧، لدينا: $A'>(p+1)^2-(p-1)^2$، فيكون معنا، إذاً،

$$A>b_1\left(a_{p+1}^2-a_{p-1}^2\right).$$

القضيّة ٢٩ـ النصّ هنا هو نفس نصّ القضيّة ٢٨، لكن نفترض أنّ $a_1\neq b_1$.

يُدخل ثابت، لكلّ عدد p، $1\le p\le n$، المتتالية (c_p)، بحيث يكون $\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_p}{c_p}$ و $c_1=b_1$؛ فتحقّق المتتاليتان (c_p) و (b_p) متباينة القضيّة ٢٨:

$$\begin{aligned}&b_p\left(c_{p-1}^2+c_p\cdot c_{p-1}+c_p^2\right)+b_{p+1}\left(c_p^2+c_p\cdot c_{p+1}+c_{p+1}^2\right)\\&-\left(b_p+b_{p+1}\right)\left(c_{p-1}^2+c_{p-1}\cdot c_{p+1}+c_{p+1}^2\right)>b_1\left(c_{p+1}^2-c_{p-1}^2\right)\end{aligned}$$

لنرمز بـِ C و D إلى طرفـَي هذه المتباينة و بـِ A و B إلى طرفي المتباينة التي نبحث عنها.

نستخرج من العلاقة $\frac{a_1}{c_1}=\frac{a_p}{c_p}$، التي يُحقّقها كلّ عدد p، $1\le p\le n$:

$$\frac{a_p^2}{c_p^2}=\frac{a_{p-1}^2}{c_{p-1}^2}=\frac{a_{p+1}^2}{c_{p+1}^2}=\frac{a_{p-1}\cdot a_p}{c_{p-1}\cdot c_p}=\frac{a_p\cdot a_{p+1}}{c_p\cdot c_{p+1}}=\frac{a_{p-1}\cdot a_{p+1}}{c_{p-1}\cdot c_{p+1}}\text{؛}$$

فنحصل على: $\frac{A}{C}=\frac{B}{D}$؛ لكنّ لدينا $C>D$، فيكون $A>B$.

ملاحظةـ نستطيع أن نستنتج القضيّتين ٢٨ و ٢٩ من القضيّة ٢٧ بدون أن نميّز بين الحالتين $a_1=b_1$ و $a_1\neq b_1$. وذلك، لأنّه، لكلّ عدد p، $1\le p\le n$ (إذا وضعنا $a_0=0$)، يكون لدينا: $\frac{a_p}{a_1}=p$، $\frac{a_{p-1}}{a_1}=p-1$، $\frac{a_{p+1}}{a_1}=p+1$، $\frac{b_p}{b_1}=2p-1$، $\frac{b_{p+1}}{b_1}=2p+1$.

إذا أدخلنا هذه التعابير في متباينة القضيّة ٢٧، نُبرز $b_1a_1^2$ كمقامٍ في الطرف الأيسر و a_1^2 كمقام في الطرف الأيمن. وإذا ضربنا الطرفين بـِ $a_1^2b_1$، نحصل على المتباينة المطلوبة (نرى هنا تماثلاً مع القضيّتين ١٢ و١٣).

ولكننا إذا قمنا بالاستدلال هندسيّاً، ندرك أنّ ابن قرّة قد فصل ما بين الحالتين، الأولى منهما تـُدخِل تحاكياً، في حين أنّ الثانية تُدخِلُ تآلفاً.

القضيّة ٣٠ـ "لتكن a، و b، و c ثلاثة مقادير تحقّق العلاقة $a<b<c$. نفترض أنَّ نِسَب هذه المقادير معلومة ثناءً. نأخذ المتتالية التزايديّة $(a_p)_{p\geq 1}$ المحدّدة بالعلاقة

$\frac{a_p}{a_{p+1}}=\frac{a}{b}$ مع $a_1=a$ و $a_2=b$؛ عند ذلك يوجد عدد n بحيث يكون $a_{n+1}>c$".

إذا كانت النسبتان $\frac{c}{a}$ و $\frac{b}{a}$ معلومتين، فإنّ النسبة $\frac{b-a}{a}$ هي أيضاً كذلك. ولدينا $a<b<c$، فيكون $c-a>b-a$؛ يوجد إذاً عددٌ، n، $n>1$، بحيث يكون $n(b-a)>c-a$.

يكون لدينا من جهة أخرى $\frac{a_p}{a_{p+1}}=\frac{a}{b}$، فيكون $\frac{a_{p+1}-a_p}{a_p}=\frac{b-a}{a}$؛ لكنّ $a<a_p$، فيكون $a_{p+1}-a_p>b-a$، بالنسبة إلى كلّ p، حيث $p\geq 2$، وبالتالي يكون:

$$b-a+\sum_{p=2}^{n}\left(a_{p+1}-a_p\right)>n(b-a)>c-a$$

فيكون : $a_{n+1}-a>c-a$ و $a_{n+1}>c$.

الخلاصة: إذا كان $n(b-a)>c-a$، فإنّ $a_{n+1}>c$.

ملاحظات ـ

١) ينتج وجود العدد n من مسلمة أرشميدس. إذا كان n أصغر عدد صحيح يشكّل حلّاً للمسألة، يكون لدينا $a_n<c<a_{n+1}$.

٢) يَعمد المؤلّف إلى عمليّة تكرار (عند افتراضه أنّ $n=3$).

٣) حدود المتتالية التزايديّة $(a_p)_{p\geq 1}$ هي في تناسب متصل

$$\frac{a_1}{a_2}=\frac{a_2}{a_3}=\cdots=\frac{a_n}{a_{n+1}}=\cdots،$$

حيث تكون $\frac{a}{b}$ القيمة المشتركة للنِسَب؛ لذا يكون

$$(\forall n \geq 2)\left[\frac{a}{a_{n+1}}=\left(\frac{a}{b}\right)^{n}\right]، \quad \text{مع} \quad \frac{a}{c}<\frac{a}{b}<1؛$$

ويكون لدينا التكافؤ: $(\exists n>1)\left[\left(\frac{a}{b}\right)^{n}<\frac{a}{c}\right] \Leftrightarrow (\exists n>1)\left[a_{n+1}>c\right]$؛

والمتتالية $u_p=\left(\frac{a}{b}\right)^{p}$ هي متتالية تناقصيّة و $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$.*

لنذكر بأنّ مسلّمة أرشميدس تأخذ شكلين: الأوّل جَمعي والثاني ضَربيّ. نَصُّ الشكل الأوّل يُعادل التالي: "إذا كان α و β مقدارين من نفس الصنف، فإنَّه يوجد عدد صحيح n بحيث يكون $n\alpha>\beta$"؛ و نَصُّ الشكل الثاني يُعادل التالي: "إذا كان a، و b، و c مقادير من الجنس نفسه، وكان $b>a$، فإنَّه يوجد عدد صحيح n بحيث يكون $\left(\frac{b}{a}\right)^{n}>\frac{c}{a}$. نستنتج الشكل الثاني من الأوّل عندما نضع $\frac{b}{a}=1+\theta$ أو $\theta=\frac{b-a}{a}$ وعندما نبيّن أنّ $(1+\theta)^{n}>1+n\theta$؛ فيكون لدينا:

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{n}=(1+\theta)^{n}>1+n\theta>\frac{c}{a}$$ ، بمجرّد أن يكون $n\theta a>c-a$.

يعمل ثابت بالطريقة التالية ليثبّت القضيّة ٣٠: يبيّن أنّ: $a_{n+1}-a>n(b-a)$

لكلّ عدد n، كبير بما يكفي، لأنّ المتتالية (a_p) مُحدَّدة بالعلاقة العامّة: $\frac{a_p}{a_{p+1}}=\frac{a}{b}$.

يؤدّي بناء هذه المتتالية الهندسيّة إلى الشَكل الضربي، في حين أنّ الشَكلَ الجمعي يبرز عندما نأخذ الفروق $a_{p+1}-a_p$ والمتباينة $a_{p+1}-a_p>b-a$ التي تأتي من:

$$\frac{a_{p+1}-a_p}{a_p}=\frac{b-a}{a} \quad \text{و} \quad a_p>a.$$

---

* نرمز بـ $\lim_{n\to\infty} u_n$ إلى حدّ المتتالية $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ عندما تسعى n إلى ما لا نهاية؛ أي أنّ u_n تسعى إلى الصِفر عندما تسعى n إلى ما لا نهاية (المترجِم).

يمكن التعبير عن هذا المسار المطبّق على $(1+\theta)^n > 1+n\theta$، على الشكل التالي:

$(1+\theta)^n - 1 = \sum_{p=0}^{n-1}\left((1+\theta)^{p+1} - (1+\theta)^p\right)$، $(1+\theta)^{p+1} - (1+\theta)^p = (1+\theta)^p\,\theta > \theta$.

يبيّن هذا الشرح أنّ ثابتاً استطاع الانطلاق من القضيّة الأولى من المقالة العاشرة لأقليدس، التي هي أكثر حصراً، لأنّها تفترض أنّ $\frac{1}{2} < \frac{a}{b}$؛ بينما لا يستخدم ثابت سوى الفرضيّة $1 < \frac{a}{b}$.

القضيّة ٣١- لتكن المقادير AB، و CD، و E و FG بحيث يكون $AB > CD$ و $E < FG < AB$. إذا طرحنا من AB المقدار X_1 بحيث يكون $\frac{X_1}{AB} \geq \frac{E}{FG}$، وإذا طرحنا من الباقي $(AB - X_1)$، المقدارَ X_2 بحيث يكون $\frac{X_2}{AB - X_1} \geq \frac{E}{FG}$، وإذا تابعنا على هذا المنوال، نصل بالضرورة إلى باقٍ أصغر من CD.

لتكن النقطة H على GF بحيث يكون $GH = E$ والنقطة I على امتداد CD المستقيم من جهة D بحيث يكون: $\frac{DI}{DC} = \frac{HG}{HF}$. يكون لدينا: $CI > CD$ و

$$\frac{CI}{CD} = \frac{CD + DI}{DC} = \frac{HG + HF}{HF} = \frac{GF}{HF}.$$

ويُمكن أن يكون لدينا: ١) $CD < AB < CI$ أو ٢) $CD < CI < AB$.

١) إذا كان $CI > AB$، يكون لدينا $\frac{CI}{CD} > \frac{AB}{CD}$، فيكون $\frac{FG}{FH} > \frac{AB}{CD}$؛ فنأخذ النقطة L على AB بحيث يكون: $\frac{GH}{GF} = \frac{BL}{AB}$، فيكون إذاً $\frac{FG}{FH} = \frac{AB}{AL}$، فيكون إذاً:

$$\frac{AB}{AL} > \frac{AB}{CD}،$$

فيكون $AL < CD$؛ وتكون AL هي القطعة المستقيمة المطلوبة.

٢) إذا كان $CD < CI < AB$، نستطيع انطلاقاً من القضيّة ٣٠، أن نجد مقادير بنِسَبٍ متصلة، تبدأ بـِ CD و CI وتَصِلُ إلى مقدار أكبر من AB:

$$\frac{CD}{CI}=\frac{CI}{CK}=\frac{CK}{CK_1}=\cdots=\frac{CK_{n-1}}{Ck_n}$$ حيث $CK_n > AB$.

لنفتــرض أنّ المســتقيم CK يســتجيب لهــذه الشــروط مــع $AB < CK$ ؛ فيكــون $\frac{GH}{HF}=\frac{IK}{IC}=\frac{DI}{DC}$. لتكن النقطتان L و M على AB بحيث يكون:

$$\frac{BL}{BA} \geq \frac{E}{FG} \qquad (1)$$

و

$$\frac{LM}{LA} \geq \frac{E}{FG}\text{،} \qquad (2)$$

فيكون $\frac{BL}{AL} \geq \frac{GH}{HF}$، فنحصل على:

$$\frac{BL}{AL} \geq \frac{IK}{IC} = \frac{DI}{DC}. \qquad (3)$$

وبالطريقة نفسها نحصل على:

$$\frac{ML}{MA} \geq \frac{DI}{DC}. \qquad (4)$$

من (4) نستخرج $\frac{AL}{MA} \geq \frac{CI}{CD}$. لكن $\frac{BM}{MA}=\frac{BL}{MA}+\frac{LM}{MA}=\frac{BL}{AL}\cdot\frac{AL}{MA}+\frac{LM}{MA}$،

فنحصل على $\frac{BM}{MA} \geq \frac{DI}{DC}\left(\frac{CI}{CD}+1\right)$؛ ولكن $\frac{CI}{CD}=\frac{CK}{CI}=\frac{IK}{ID}$، فنحصل على:

$\frac{CI}{CD}+1=\frac{IK}{ID}+1=\frac{DK}{ID}$؛ يكون إذاً:

$$\frac{BM}{MA} \geq \frac{KD}{DC}\text{،} \qquad (5)$$

فنحصل على $\frac{BA}{AM} \geq \frac{KC}{CD}$، أي

$$\frac{BA}{KC} \geq \frac{AM}{CD}. \qquad (6)$$

- إذا كــان $\frac{BA}{KC}=\frac{AM}{CD}$، يكـون $AM < CD$، لأننــا افترضـنا أنّ $AB < CK$، يكـون AM، عندئذ، الباقيَ المطلوب.

• إذا كـان $\frac{AM}{CD} > \frac{BA}{KC}$، توجـد نقطـة N علـى AB بحيـث يكـون $\frac{AN}{CD} = \frac{BA}{KC}$، فيكون $AN > AM$. لكن $KC > BA$، فيكـون $AN < CD$ ويكـون $AM < CD$؛ AM هـو إذاً الباقي المطلوب.

ملاحظات ـ بعد إثبات (3) و (4) يقول ثابت: "ومن ذلك يتبيّن أنّ نسبة ب م إلى ا م ليست بأقلّ من نسبة كـ د إلى د جـ"؛ فهو إذاً ينتقل دون برهان من (3) و (4) إلى (5). ولقد أردنا الانطلاق من (3) و (4)، كما أشار ثابت.

لكننا نستطيع الانتقال مباشرة من (1) و (2) إلى (6) دون أن نستخدم (3) و (4).

وذلك أنّ لدينا بالفعل: $\frac{FH}{FG} \geq \frac{AL}{BA} \Rightarrow \frac{E}{FG} \geq \frac{BL}{BA}$ و $\frac{FH}{FG} \leq \frac{AM}{LA} \Rightarrow \frac{E}{FG} \geq \frac{LM}{LA}$

فنحصل على $\left(\frac{FH}{FG}\right)^2 \geq \frac{AM}{BA}$. لكن $\frac{CI}{CK} = \frac{CD}{CI} = \frac{FH}{FG}$، فيكون $\frac{CD}{CK} = \left(\frac{FH}{FG}\right)^2$؛

يكون لدينا إذاً: $\frac{CD}{CK} \geq \frac{AM}{BA}$، فيكون:

$$\frac{BA}{KC} \geq \frac{AM}{CD}. \qquad (6)$$

ولنقم الآن، في الختام، بما أشار إليه ثابت.

تكمن أهميّة هذه الطريقة الثانية في إمكانيّة تعميمها على الحالة التي ينبغي فيها تناول النسبة المتصلة حتى الرتبة n للحصول على $CK_n > AB$. يكون لدينا، في هذه الحالة، $\frac{CD}{CK_n} = \left(\frac{FH}{FG}\right)^{n+2}$.

نرفـق بالنقطـة K_n النقطـة M_n بحيـث يكـون: $\frac{AM_n}{AB} \leq \left(\frac{FH}{FG}\right)^{n+2}$، فيكـون $\frac{CD}{CK_n} \geq \frac{AM_n}{AB}$؛ يكون لدينا إذاً $\frac{AB}{CK_n} \geq \frac{AM_n}{CD}$، ونستنتج كما في الحالة السابقة أنّ AM_n هو الباقي المطلوب.

لم يبيّن ثابت دور القوى المتتالية لـِ $\frac{FH}{FG}$، والمرتبطة بالحدود المتوالية CI، CK، CK_n، ...، للنسبة المتصلة، في حين إنَّه استخدم مثل هذه القوى المتوالية في برهان القضيّة ٣٠. ربّما اتبَع في القضيّة ٣١، أسلوباً في الكتابة أكثر بدائيّة.

يأخذ ثابت، في صيغة القضيّة، مقدارين AB و CD، حيث $AB > CD$ وآخرَين E و FG بحيث يكون $E < FG < AB$. تـُستخدَم الفرضيّة $E < FG$ لتحديد النسبة $\frac{E}{FG} = k < 1$. لكن الشرط $FG < AB$ لا يدخل في الاستدلال.

يمكننا إذاً طرح المسألة على الشكل التالي:

"ليكن a و b مقدارين، $a < b$، ولتكن k نسبة معلومة مع $k < 1$؛ إذا أخذنا المتتالية (b_P) المحدّدة بـِ $1 > \frac{b_1}{b} \geq k,\ 1 > \frac{b_2}{b - b_1} \geq k, ..., 1 > \frac{b_p}{b - \sum_{i=1}^{p-1} b_i} \geq k, ...$، يوجَد عندئذ عدد n، $n \in \mathbb{N}^*$، بحيث يكون: $b - \sum_{i=1}^{n} b_i < a$."

ليكن a_0 مقداراً محدّداً بـِ $\frac{a_0}{a} = \frac{k}{1-k}$، فيكون $\frac{a + a_0}{a} = \frac{1}{1-k}$.

- إذا كان $a + a_0 > b$، يكون $a > b - b_k$، لكن $b_1 \geq kb$، لذا يكون $a > b - b_1$؛ ونحصل إذاً على النتيجة المطلوبة بأخذ $n = 1$.
- إذا كان $a + a_0 \leq b$، نأخذ المتتالية (a_P) المحدّدة بـِ

$$a_1 = a\text{،}\quad a_2 = a + a_0 \text{ و } \frac{a_1}{a_2} = \frac{a_2}{a_3} = \cdots = \frac{a_p}{a_{p+1}}.$$

ووفق القضيّة ٣٠، يوجد عدد n، $n \in \mathbb{N}^*$، بحيث يكون $a_n < b < a_{n+1}$. لكن $\frac{a_1}{a_2} = \frac{a}{a + a_0} = 1 - k$، فيكون $\frac{a_p}{a_{p+1}} = 1 - k$ وذلك لكلّ مؤشِّر p، $1 \leq p \leq n$؛

فنستخرج من هذا أنَّ: $\frac{a_1}{a_{n+1}} = (1-k)^n$، مع $a_1 = a$.

يكون لدينا، من جهة أخرى وفق تحديد المتتالية (b_P)، $\frac{b_1}{b} \geq k \Rightarrow \frac{b - b_1}{b} \leq 1 - k$،

$$\frac{b_2}{b-b_1} \geq k \Rightarrow \frac{b-(b_1+b_2)}{b-b_1} \leq 1-k \Rightarrow \frac{b-(b_1+b_2)}{b} \leq (1-k)^2$$

لنفترض أنَّ هذه النتيجة صحيحة حتى المرتبة $(p-1)$، أي أنّ

$$(1) \qquad \frac{b-\sum_{i=1}^{p-1} b_i}{b} \leq (1-k)^{p-1}.$$

فيكون لدينا بالنسبة إلى الرتبة p،

$$(2) \qquad \frac{b_p}{b-\sum_{i=1}^{p-1} b_i} \geq k \Rightarrow \frac{b-\sum_{i=1}^{p} b_i}{b-\sum_{i=1}^{p-1} b_i} \leq (1-k),$$

ومن (1) و (2) نحصل على $\frac{b-\sum_{i=1}^{p} b_i}{b} \leq (1-k)^p$.

تكون النتيجة إذاً صحيحة للمرتبة p، حيث $1 \leq p \leq n$، وبالتالي للمرتبة $p=n$، أي أنّ لدينا: $\frac{b-\sum_{i=1}^{n} b_i}{b} \leq \frac{a}{a_{n+1}}$، لأنّ $\frac{a}{a_{n+1}} = (1-k)^n$؛ ولكن لدينا: $a_{n+1} > b$، فيكون $b-\sum_{i=1}^{n} b_i < a$.

ملاحظات -

١) بناء المتتالية (b_P) يتم بواسطة برهان تكراري، لكنه أقل وضوحاً من البرهان التكراريّ الذي طبّقه ابن الهيثم (أنظر المجلّد الثاني).

٢) لم تحدَّد الحدود b_P بطريقة وحيدة، إذ يجب أخذ كلّ حدٍّ، b_P، في فسحة محدَّدة انطلاقاً من b_{P-1}، كما يلي:

$$b > b_1 \geq kb \text{، } b-b_1 > b_2 \geq k(b-b_1) \text{، ... ، } b-\sum_{i=1}^{p-1} b_i > b_p \geq k\left(b-\sum_{i=1}^{p-1} b_i\right).$$

القضايا التي تلي مخصّصة لدراسة حجم قبّة مكافئة مُولَّدة من دوران قطعةٍ ABC من قطع مكافئ يدور حول القطر BC، حيث يكون AC خطَّ الترتيب المرافق للقَطر BC.

في القضايا من الثانية والثلاثين إلى الخامسة والثلاثين يُستخدَم تقسيم القطر BC إلى n قِطَع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتوالية 1، 3 ... $2n-1$. في هذه الحالة تكون الإحداثيّات الأولى لنقاط هذا التقسيم متناسبة مع مربّعات الأعداد الصحيحة المتوالية، ووفقاً لمعادلة القطع المكافئ، فإنّ الإحداثيّات الثانية لهذه النقاط تكون متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية، وذلك وفقاً للقضيّة p_{16}. وهكذا يكون لدينا متتاليتا قِطَع مستقيمة تحقّقان فرضيّات القضايا الثالثة عشرة والحادية والعشرين والتاسعة والعشرين. وقد استُخدِم بناء هذا النوع من القِطَع في القضيّتين p_{17} و p_{18}.

كلُّ تقسيمٍ لـِ BC إلى n قِطَع مستقيمة تقابله n دوائر مرسومة على القبّة المكافئة. الدائرة الصغرى هي الأقرب من الرأس؛ ليكن r_1 نصف قطرها ولتكن s_1 مساحتها؛ أمّا الكبرى فهي القاعدة الدائرية التي ترسمها النقطة A، ليكن $r_A = r_n$ نصف قطرها ولتكن s_A مساحتها.

٢-٣-٢-٧ حساب حجم المجسّمات المكافئة

القضيّة ٣٢- ليكن تقسيمٌ للقطر BC بواسطة نقاط، عددها n، هي: $E_0 = B$، E_1، E_2، ...، $E_n = C$ بحيث يكون $\frac{E_{p-1}E_p}{E_0E_1} = \frac{2p-1}{1}$، وليكن تقسيمٌ للقوس BA في النقاط $D_0 = B$، D_1، ...، $D_n = A$ الموافقة للنقاط E_p، $0 \le p \le n$. ليكن S_n المجسّم المولَّد من دوران المضلّع $BD_1D_2...AC$ حول BC وليكن v_s حجم هذا المجسّم؛ يكون عندئذٍ: $v_s + \frac{2}{3}BC \cdot \frac{s_1}{4} = \frac{1}{2}BC \cdot s_A$.

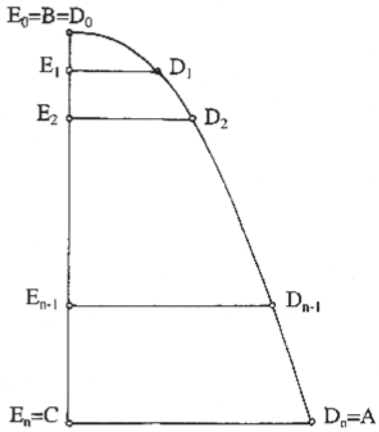
لبرهان ذلك نلاحظ أنّ الفرضيّة $\frac{E_{p-1}E_p}{E_0E_1} = \frac{2p-1}{1}$ $1 \le p \le n$، تُعطي

$\frac{E_pD_p}{E_1D_1} = \frac{p}{1} = \frac{2p}{2}$ (انظر الشكل ٣٢د أدناه).

الحالـة الأولـى للشـكل (انظـر الشـكل الأوّل، ص.٣١٩ والشـكل ٣٢د أدنـاه): وهـي الحالة التي يكون فيها القطر BC محور القطع المكافئ.

في هذه الحالة يكون $E_pD_p \perp BC$، ويكـون E_pD_p نصـف القطـر، r_p، للـدائرة التـي ترسـمها النقطـة D_p. تحقّـق المتتاليتـان $\left(E_{p-1}E_p\right)$ و $\left(E_pD_p\right)$ فرَضـيّات القضـيّة ١٣، فيكون لدينا:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{3}BE_1\cdot s_1+\frac{1}{3}\pi\left[\sum_{p=2}^{n}E_{p-1}E_p\left(E_{p-1}D_{p-1}^2+E_{p-1}D_{p-1}\cdot E_pD_p+E_pD_p^2\right)\right]+\frac{2}{3}BC\cdot\frac{s_1}{4}\\&=\frac{1}{2}BC\cdot s_A\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

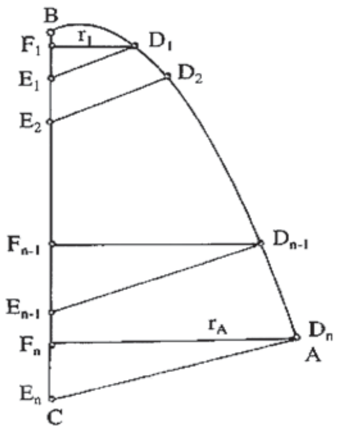


الشكل ٣٢د

إذا اسـتخدمنا العبـارات المثبتـة فـي القضـيّة ١٥ الخاصّـة بأحجـام مخـروطٍ دورانـي مولّـد مـن دوران المثلّـث القـائم الزاويـة BE_1D_1 ولأحجـام جـذوع المخروطـات المولَّدة مـن دوران المربّعـات المنحرفـة القائمـة الزاويـة $E_{p-1}E_pD_pD_{p-1}$، التـي مجموعهـا هـو الحجـم v_s للمجسّـم S_n، يكـون لـدينا: $v_s+\frac{2}{3}BC\cdot\frac{s_1}{4}=\frac{1}{2}BC\cdot s_A$؛ وتمكـن كتابـة هـذه المتساوية على الشكل التالي: $v_s+\frac{2}{3}\pi BC\cdot\left(\frac{r_1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi\cdot BC\cdot r_A^2$.

الحالتـان الثانيـة والثالثـة للشـكل (انظـر الشـكلين الثـاني والثالـث، ص.٣١٩ والشـكل ٣٢هـ أدناه):

نُخرج من النقاط D_1، D_2، ...، $D_n = A$ الأعمدة D_1F_1، D_2F_2، ...، AF_n على BC، فيكون لدينا لكلّ p مع $1 \le p \le n$: $\frac{E_pD_p}{F_pD_p} = \frac{E_1D_1}{F_1D_1}$، وبالتالي $\frac{p}{1} = \frac{F_pD_p}{F_1D_1}$؛ تحقّق المتتاليتان $(E_{p-1}E_p)$ و(F_pD_p) شروط القضيّة ١٣. إذا استبدلنا في (1) E_1D_1، $E_{p-1}D_{p-1}$، E_pD_p على التوالي بـ F_1D_1، $F_{p-1}D_{p-1}$، F_pD_p، نجد عبارات الأحجام المولَّدة من دوران المثلث BE_1D_1 والمربّعات المنحرفة $E_{p-1}E_pD_pD_{p-1}$، وهي العبارات التي أثبتت في القضيّتين ١٦ و ١٧. مجموع هذه الأحجام هو v_s، وكما في الحالة الأولى يكون لدينا: $v_s + \frac{2}{3}BC \cdot \frac{s_1}{4} = \frac{1}{2}BC \cdot s_A$



الشكل ٣٢ هـ

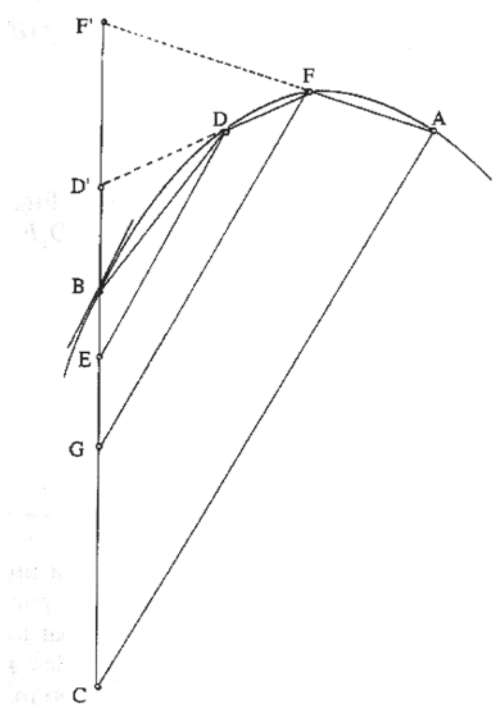
ملاحظة ١ ـ في الحالة الثانية من الشكل، يكون المجسَّم المولَّد من دوران المثلَّث BED مخروط أجوَف وتكون المجسّمات المولدة من دوران المربّعات المنحرفة جميعها جذوع مخروط أجوَف. لكن، في الحالة الثالثة من الشكل، تتعلّق طبيعة المجسَّمات المولَّدة بالزوايا $\widehat{EBD}$، و $\widehat{GD'F}$، و $\widehat{GF'F}$، حيث D' و F' هما، على التوالي، نقطتا تقاطع الخطّين FD و AF مع القطر BC.

يولِّد المثلَّث DBF:

معيّناً مجسّماً إذا كان $\widehat{EBD} < \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل الثالث، ص. ٣١٩)

مخروطاً أجوفَ إذا كانت $\widehat{EBD} > \frac{\pi}{2}$ (انظر الشكل ٣٢و، أدناه)

مخروطاً إذا كانت $\widehat{EBD} = \frac{\pi}{2}$.



الشكل ٣٢و

في حالة الشكل ٣٢جـ، يكون لدينا معيّن مجسَّم وجذعا معيّنين مجسّمين؛ في حالة الشكل ٣٢و، يكون لدينا مخروط أجوَف وجذع مخروط أجوَف وجذع معيّن مجسّم لأنّ $\widehat{GF'F} < \frac{\pi}{2}$.

ملاحظة ٢. كما رأينا فيما يخصّ القطع المكافئ، نلاحظ هنا، أنّ تقسيم القطر وفق الأعداد الفرديّة المعتمدة لدى ثابت يؤدّي إلى إحداثيّات ثانية (أي إلى خطوط ترتيب) تشكّل متتالية حسابيّة، بحيث يجري التكامل في النهاية بالنسبة إلى الإحداثيّات الثانية، وليس بالنسبة إلى الإحداثيّات الأولى: وباللغة الحديثة يكون الحجم مساوياً لـِ: $\int_0^{BC} \pi y^2 dx = \int_0^{r_A} \pi y^2 \cdot \frac{ydy}{p} = \frac{\pi}{4p} r_A^4 = \frac{\pi}{2} BC.r_A^2$، إذا كتبنا معادلة القطع المكافئ على الشكل $y^2 = 2px$، فنحصل على: $r_A^2 = 2p \cdot BC$ و $dx = \frac{ydy}{p}$.

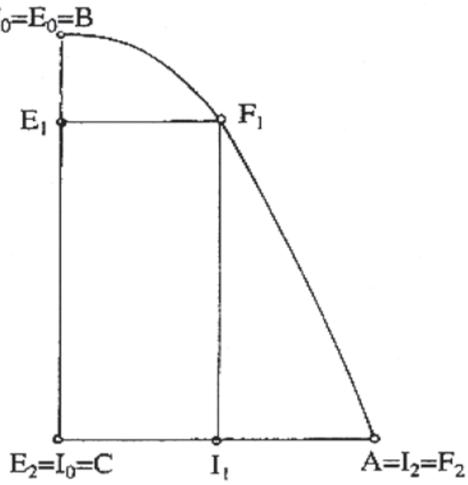
القضيّتان ٣٣ و ٣٤- "يُمكن لأيّة قبّة مكافئة دورانيّة حجمها v أن تحيط بمجسّم S_n مُكوّن من قِطَع مُجسَّمة مخروطيّة، يحقّق حجمه، v_s، العلاقة $v - v_s < \varepsilon$، مهما كان الحجم المعلوم ε".

القضيّة ٣٣- تتناول هذه القضيّة الحالة التي يكون فيها محورُ القبّة المكافئة مطابقاً لمحور القطع المكافئ.

ليكن v_1 حجم المخروط ABC، إذا كان $v - v_1 < \varepsilon$، تكون المسألة قد حُلَّت.

إذا كان $v - v_1 \geq \varepsilon$، نقسم AC إلى جزءين متساويين، ونرمز إلى هذا التقسيم بـِ $e_1 = (I_0, I_1, I_2)$ حيث يكون $I_0 = C$، $I_2 = A$، $I_0I_1 = \frac{1}{2}I_0I_2$، ونُرفِق به على القطر BC التقسيمَ $d_1 = (E_0, E_1, E_2)$، مع $E_0 = B$ و $E_2 = C$، الذي يحقّق العلاقة: $\frac{E_0E_1}{1} = \frac{E_1E_2}{3}$[٥]؛ كما نُرفِق بهذا التقسيم، النقاط $F_0 = B$ و F_1 و $F_2 = A$، على القوس $\widehat{AB}$ من القطع المكافئ؛ فيكون لدينا: $\frac{E_1F_1}{1} = \frac{E_2F_2}{2}$؛ ونطبّق القضيّة ٢١، فيكون:

$$BE_1 \cdot E_1F_1^2 + E_1E_2\left[E_1F_1^2 + E_2F_2^2 + E_1F_1 \cdot E_2F_2\right] - BC \cdot AC^2 > BE_1 \cdot AC^2$$



الشكل ٣٣جـ

[٥] نكتب النسبة بهذه الطريقة لنجعل الكتابة أكثر سهولة، وهذا ما قد يكتبه ثابت $\frac{E_1E_2}{E_0E_1} = \frac{3}{1}$.

لكن، وفقاً لـِ p_{16}، فإنَّ BE_1 و E_1F_1 هما إحداثيّتا F_1، فإذا ضربنا طرفي المتباينة بـِ $\frac{1}{3}\pi$، حيث v_2 هو حجم المجسّم S_2 المولَّد من دوران AF_1BC، نحصل على:

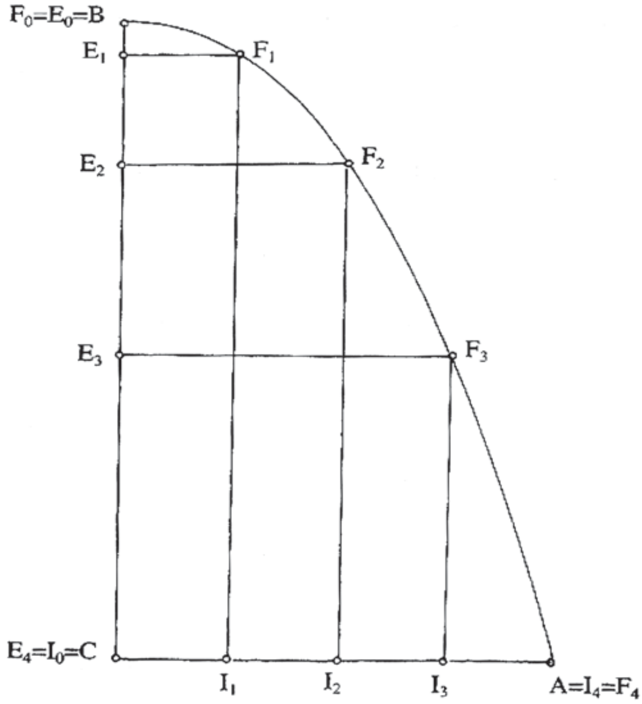
$$v_2 - v_1 > \frac{1}{3}\pi \cdot BE_1 \cdot AC^2$$؛

وإذا استخدمنا خطّ التماسّ في النقطة F_1 وخاصيّة الخطوط، الواقعة تحت خطّ التماسّ، الواردة في القضيّة ١٨، وإذا استخدمنا أيضاً القضيّة ١٩، تبيّن أنّ:

$$\frac{1}{3}\pi \cdot BE_1 \cdot AC^2 > \frac{1}{3}(v - v_1)$$،

فيكون $v_2 - v_1 > \frac{1}{3}(v - v_1)$، فنستخرج من ذلك $v - v_2 < \frac{2}{3}(v - v_1)$.

- إذا كان $v - v_2 < \varepsilon$، فإنَّ المجسَّم يشكّل حلاًّ للمسألة.
- إذا كان $v - v_2 \geq \varepsilon$، فإننا نعيد الكَرّة من خلال تقسيم AC إلى أجزاء متساوية عددها 2^2 بواسطة التقسيمة $e_2 = (I_0, I_1, I_2, I_3, I_4)$، حيث يكون: $I_0 = C$، $I_4 = A$ و $\frac{I_0I_1}{1} = \frac{I_0I_2}{2} = \frac{I_0I_3}{3} = \frac{I_0I_4}{4}$؛ ونرفق بهذه التقسيمة على BC التقسيمَة:



الشكل ٣٣د

$d_2=(E_0,E_1,E_2,E_3,E_4)$، مع $E_0=B$ و $E_4=C$، وهي التقسيمة التي تُحقّق $\frac{E_3E_4}{7}=\frac{E_2E_3}{5}=\frac{E_1E_2}{3}=\frac{E_0E_1}{1}$، كما نـُرفق بهذه التقسيمة، وعلى القوس $\widehat{AB}$، النقاطَ $F_0=B$، F_1، F_2، F_3، $F_4=A$، فيكون لدينا: $\frac{E_4F_4}{8}=\frac{E_3F_3}{6}=\frac{E_2F_2}{4}=\frac{E_1F_1}{2}$.

يكون لدينا إذاً وفق القضيّة ٢٩

$$E_2E_3\left(E_2F_2^2+E_2F_2\cdot E_3F_3+E_3F_3^2\right)+E_3E_4\left(E_3F_3^2+E_3F_3\cdot E_4F_4+E_4F_4^2\right)-$$
$$E_2E_4\left(E_2F_2^2+E_2F_2\cdot E_4F_4+E_4F_4^2\right)>E_0E_1\left(E_4F_4^2-E_2F_2^2\right)$$

فنستخرج من ذلك:

$$v(E_2F_2F_3E_3)+v(E_3F_3F_4E_4)-v(E_2F_2F_4E_4)>\frac{1}{3}\pi E_0E_1\left(E_4F_4^2-E_2F_2^2\right).$$

الطرف الأيسر من هذه المتباينة هو حجم الحلقة المولَّدة من دوران المثلّث AF_3F_2؛ نبيّن من ثَمَّ، من خلال استخدام خطّي التماس في F_1 و F_3 * والقضـايا الثامنـة عشرة والتاسعة عشرة والعشرين أنّ: $\frac{1}{3}\pi E_0E_1\left(E_4F_4^2-E_2F_2^2\right)>\frac{1}{3}v\cdot\mathrm{sg}\cdot(AF_3F_2)$،

فيكون: $v\cdot\mathrm{tr}\cdot(AF_3F_2)>\frac{1}{3}v\cdot\mathrm{sg}\cdot(AF_3F_2)$؛ ويكون أيضاً:

$v\cdot\mathrm{tr}\cdot(F_2F_1B)>\frac{1}{3}v\cdot\mathrm{sg}\cdot(F_2F_1B)$، فنحصل بالجمع على: $v_3-v_2>\frac{1}{3}(v-v_2)$.

وبالتالي : $v-v_3<\frac{2}{3}(v-v_2)<\left(\frac{2}{3}\right)^2(v-v_1)$.

إذا كان $v-v_3<\varepsilon$، فإنّ المجسّم المُوَلّد من دوران المضلع $BF_1F_2F_3AC$ يشكل حلّاً للمسألة.

* أي س وَ ع في النص.

وإذا كان $v - v_3 \geq \varepsilon$، نكرِّر العمليّة، فنحصل بنفس الطريقة على:

$$v - v_4 < \frac{2}{3}(v - v_3) < \left(\frac{2}{3}\right)^3 (v - v_1)$$

...

$$v - v_n < \frac{2}{3}(v - v_{n-1}) < \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (v - v_1)؛$$

هذه المتتالية الناتجة تناقصيّة، ونستطيع إيجاد عددٍ، n، بحيث يكون $\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1} (v - v_1) < \varepsilon$، فيكون بالأولى: $v - v_n < \varepsilon$. فالمجسّم S_n، الموافق لتقسيم AC إلى أجزاء متساوية عددها 2^n، يشكّل حلاً للمسألة.

ملاحظة ١ ـ لا يستخدم ثابت المتتالية التناقصيّة $\left(\frac{2}{3}\right)^p$، لكنه يسند استدلاله إلى القضيّة الحادية والثلاثين؛ وقد رأينا، من أجل برهان تلك القضيّة في الحالة العامّة، أنّه تمَّ استخدام المتتالية $(1-k)^p$ مع $(1-k) < 1$.

ملاحظة ٢ـ لكي نبيّن أنّ خطّي التماسّ في O وفي S يلتقيان مع القطر FG في نقطة واحدة هي R (انظر الشكل، ص. ٣٢٥)، يكفي أن نثبت أنّ $OO' = SS'$، حيث O' و S' هما منتصفا FB و FA على التوالي، وهذا ما ينتج من القضيّة ١٨؛ إذ إنَّ لدينا: $AQ = SS' = \frac{1}{2}(CP - KP) = BU$، لأنّ $KP = 5BU$ و $PC = 7BU$، ومن جهة أخرى: $OO' = I'B = BU$.

القضيّة ٣٤ـ تتناول في هذه القضيّة الحالة التي يكون فيها المحورُ BC للقبّة أيَّ قطر من القطع المكافئ. [انظر الشكل، ص. ٣٢٩ والشكل، ص. ٣٣١]

بواسطة تقسيمات متوالية لـِ AC إلى 2، 2^2، ...، 2^n من الأجزاء المتساوية، نبني، كما في القضيّة ٣٣، المجسّمات S_1، S_2، ...، S_n المحاطة بالقبّة. وكما في القضيّة الثانية والثلاثين، في الحالتين الثانية والثالثة من الشكل، نُسقط، من رؤوس المضلّعات الحاصلة، الأعمدةَ على محور المجسّم المكافئ. يقوم ثابت بالاستدلال،

مستنداً في كل مرحلة إلى القضيّة السابقة. وبذلك يبرهن أنّنا نستطيع، في جميع حالات الشكل، إيجاد n، بحيث يكون $\varepsilon > v - v_n$.

القضيّة ٣٥- في أيّة قبّة مكافئة ABC ذات الرأس B المعتدل أو غير المعتدل، والمحور BD، نستطيع أن نحيط مجسّماً حجمه v_s أقل من نصف الحجم V للأسطوانة التي قاعدتها الدائرة ذات القطر AC وارتفاعها مساوٍ لـِ BD، بحيث يكون الفرق (بين نصف V و v_s) أقل من أيّ حجم معلوم ε". [انظر الشكل ص. ٣٣٢ والشكل ص. ٣٣٤]

نريد إذاً تحديد مجسّم حجمه v_s يحقّق: $0 < \frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$.

ولقد تبيّن في القضيّة ٣٢ أنّه إذا كان المحور BD مقسّماً إلى n قِطَع مستقيمة متناسبة مع 1، 3، 5، ...، $2n-1$، فإننا نرفق بهذا التقسيم مجسّماً S_n حجمه v_s يحقّق: $\frac{V}{2} - v_s = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \cdot BD$، حيث يرمز r_1 إلى نصف قطر الدائرة الأقرب إلى الرأس B. لذلك، ستكون المسألة محلولة إذا أثبتنا أنّه يمكن إيجاد تقسيم لـِ BD بحيث يكون:

$$\frac{2}{3}\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \cdot BD < \varepsilon \qquad \Leftrightarrow \qquad \pi r_1^2 \cdot BD < 6\varepsilon \qquad (1)$$

يتضمّن مسارُ ثابت قسمين، نرمز إليهما بـ أ) وب)، على التوالي:

أ) الحجمان المعلومان هما V و ε، لكن من أجل استخدام (1) في القسم ب) من هذه القضيّة، يجب أن نضع $\eta = 6\varepsilon$ وأن نحدّد حجماً F بواسطة العلاقة: $\frac{V}{F} = \frac{F}{\eta}$،

عندئذٍ يكون لدينا: $\left(\frac{V}{F}\right)^2 = \frac{V}{\eta}$.

في حالات الشكل الثلاث، AD هو خطّ ترتيب، ونأخذ خطّ ترتيب آخر ON يحقّق العلاقة $\frac{AD}{ON} > \frac{V}{F}$، فيكون لدينا $\frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$.

• <u>الحالة الأولى من الشكل</u> هي الحالة التي يكون فيها $AC = 2AD$، و $ON \perp BD$؛ فتكون نسبة حجمَي الأسطوانتين القائمتين، اللتين يكون نصفا قطريهما AD وَ ON ويكون ارتفاعهما المشترك BD، مساوية لِـ $\frac{\pi \cdot BD \cdot AD^2}{\pi \cdot BD \cdot ON^2} = \frac{AD^2}{ON^2} < \frac{V}{\eta}$.

لكن في هذه الحالة من الشكل، يكون لدينا: $V = \pi \cdot BD \cdot AD^2$، فيكون $\pi \cdot BD \cdot ON^2 < \eta$

• <u>الحالتان الثانية والثالثة من الشكل</u>: في هاتين الحالتين يقطع AC المحور BD على النقطة Q، حيث $AC = 2AQ$. نُخرج من O العمود على BD؛ يكون لدينا $OU // AQ$ و $ON // AD$، فيكون $\frac{AQ}{OU} = \frac{AD}{ON} > \frac{V}{F}$ و $\frac{AQ^2}{OU^2} = \frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$.

وبالتالي يكون: $\frac{\pi BD \cdot AQ^2}{\pi BD \cdot OU^2} > \frac{V}{\eta}$؛ لكن، في هاتين الحالتين من الشكل، لدينا: $V = \pi \cdot BD \cdot AQ^2$، فيكون $\pi \cdot BD \cdot OU^2 < \eta$.

إذا رمزنا بِـ r_N إلى نصف قطر الدائرة التي ترسمها النقطة O ($r_N = ON$ أو $r_N = OU$)، يكون لدينا إذاً في الحالات الثلاث من الشكل:

$$\pi BD \cdot r_N^2 < \eta \qquad (2)$$

ملاحظة - المتباينة $\frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$ لا تحدّد نقطة وحيدة N، لكنها مُحقَّقة لكلّ نقاط قطعة مستقيمة نحدِّدها كما يلي. وفقاً لمعادلة القطع المكافئ، لدينا $\frac{AD^2}{ON^2} = \frac{BD}{BN}$؛ تحقِّق النقطة N إذاً العلاقة $\frac{BN}{BD} < \frac{\eta}{V}$ أي $BN < \frac{\eta \cdot BD}{V}$. لتكن N_1 النقطة المحدّدة بِـ $BN_1 = \frac{\eta \cdot BD}{V}$، في هذه الحالة أيّة نقطة N من القطعة المستقيمة BN_1 تحقِّق المتباينة $\frac{AD^2}{ON^2} > \frac{V}{\eta}$.

ب) لكي يكون مجسّمٌ S_n، مُرفقٌ بتقسيمٍ لِـ BD إلى قِطَع متناسبة مع الأعداد الفرديّة

المتوالية، حلاً للمسألة، يكفي أن تكون النقطة الأولى من التقسيم نقطة من القطعة BN_1 المحدّدة أعلاه.

لتكن N هذه النقطة، وليكن $APOBD$ المضلّع المرفق بتقسيم BD. فيكون لدينا $r_1 = r_N$؛ لدينا إذاً، من جهة أولى وفقاً للقضيّة ٣٢:

$$\frac{V}{2} - v_s = \frac{2}{3}\pi\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 \cdot BD \text{ ؛}$$

ومن جهة أخرى وفقاً للعلاقة (2): $\pi BD \cdot r_N^2 < \eta$ حيث $\eta = 6\varepsilon$؛

لكن $\frac{r_N^2}{6} = \frac{2}{3}.\left(\frac{r_N}{2}\right)^2$، لذا يكون $\frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$.

ملاحظة ـ كان باستطاعتنا الحصول مباشرة على نتيجة القضيّة ٣٥ انطلاقاً من القضيّة ٣٢ بدون استخدام القسم أ) من القضيّة ٣٥. فالمجسّم S_n يتوافق مع تقسيمٍ لـِ AD إلى n قِطَع متساوية، لذا يكون $r_1 = \frac{AD}{n}$. تتمثّل المسألة،إذاً، في إيجاد عدد n بحيث يحقّق r_1 العلاقة (1)، أي

$$\left(\frac{r_1}{2}\right)^2 < \frac{3\varepsilon}{2\pi \cdot BD} \Leftrightarrow \frac{1}{n^2} < \frac{6\varepsilon}{\pi \cdot BD \cdot AD^2} \Leftrightarrow n^2 > \frac{\pi \cdot BD \cdot AD^2}{6\varepsilon} \Leftrightarrow n^2 > \frac{V}{6\varepsilon}$$

غير أنّ V و ε معلومان. يُمكننا إذاً أن نتساءل لماذا لم يعتمد ثابت هذا المسار. ربّما كانت هذه الطريقة في الكتابة تتطلّب خبرة في الحساب تفوق إمكانية رياضيٍّ من القرن التاسع.

القضيّة ٣٦ـ "أيّة قبّة مكافئة ABC محورها $BD = h$، وقطر قاعدتها AC، يساوي حجمها، v، نصف الحجم V للأسطوانة التي يكون ارتفاعها h وقطر دائرة قاعدتها AC، $v = \frac{1}{2}V = \frac{1}{2}\pi h \cdot \frac{AC^2}{4}$. [انظر الأشكال ص. ٣٣٦]

يستدل ثابت بواسطة برهان بالخُلف.

- نفترض أنّ $v > \frac{V}{2}$ ونضع $v = \frac{V}{2} + \varepsilon$.

استناداً إلى القضيّتين ٣٣ و ٣٤، تمكن للقبّة الإحاطة بمجسّمٍ دوراني حجمه v_s بحيث يكون $v - v_s < \varepsilon$، وبالتالي $v_s + \varepsilon > v$؛ فيكون $v_s + \varepsilon > \frac{V}{2} + \varepsilon$، فيكون $v_s > \frac{V}{2}$؛ وهذا محال لأننا بيّنا في القضيّة ٣٥ أنّ $v_s < \frac{V}{2}$.

• نفترض أنّ $v < \frac{V}{2}$ ونضع $\frac{V}{2} = v + \varepsilon$.

وفقاً للقضيّة ٣٥، تمكن للقبّة الإحاطة بمجسّمٍ دوراني حجمه v_s بحيث يكون $\frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$، أي $v_s + \varepsilon > \frac{V}{2}$، فيكون $v_s + \varepsilon > v + \varepsilon$، فيكون $v_s > v$؛ وهذا محال لأنّ المجسّم يقع داخل القبّة. يكون معنا، إذاً، $v = \frac{V}{2}$.

يستند ثابت هنا إلى القضيّة ٣٥، لكنّ القضيّة ٣٢ بيّنت أنّ $v_s = \frac{V}{2} - \frac{2}{3}\pi h r_1^2$، فيكون، إذاً، $v_s < \frac{V}{2}$؛ وفي القضيّة ٣٥، تمّ استخدام القضيّة ٣٢ لتبيين أنّ بالإمكان، لكلّ ε معلوم، إيجاد مجسَّمٍ حجمه v_s يحقّق العلاقة: $\frac{V}{2} - v_s < \varepsilon$.

لا يقتضي برهان المتباينة $v_s < \frac{V}{2}$ إذاً برهاناً بالخلف، لكن ثابتاً كان يريد بكل وضوح الالتزام بلغة الاستدلال بالخُلف.

٢-٣-٢-٨ مقابلة بين كتاب "في مساحة القطع المكافئ" وكتاب "في مساحة المجسّمات المكافئة"

يستخدم ثابت في الكتابين تقسيماً لقطرِ قطعةٍ من قطع مكافئ إلى قِطَع مستقيمة متناسبة مع الأعداد الفرديّة المتوالية. في هذه الحالة يكون لنقاط القطع المكافئ المرفقة بهذا التقسيم إحداثيّات أولى متناسبة مع مربّعات الأعداد الصحيحة وإحداثيّات ثانية متناسبة مع الأعداد الصحيحة المتوالية.

يتحدّد بهذه النقاط:

في المستوي:	في الفضاء(ذي ثلاثة أبعاد):

مضلّع محاط بالقطع المكافئ ومقسّم إلى مربّعات منحرفة	مجسّم دوراني محاط بالمجسّم المكافئ، ومقسّم إلى مجسّمات مخروطيّة
s مساحة القطع المكافئ	v حجم المجسّم المكافئ
S مساحة متوازي الأضلاع الموافق	V حجم الأسطوانة الموافقة
s_i مساحة المربّع المنحرف	v_i حجم المجسّم المخروطي

يبيّن ثابت، أنّ لكلّ ε معلوم، $\varepsilon > 0$، يمكن إيجاد عدد N، بحيث، مهما كان العدد n الأكبر من N ($n > N$)، يكون

$\frac{2}{3}S - \sum_{i=1}^{n} s_i < \varepsilon$ (١٧ و ١٩)	$\frac{V}{2} - \sum_{i=1}^{n} v_i < \varepsilon$ (٣٢ و ٣٥)
$s - \sum_{i=1}^{n} s_i < \varepsilon$ (١٨)	$v - \sum_{i=1}^{n} v_i < \varepsilon$ (٣٣ و ٣٤).

بتعبير آخر، بيّن ثابت أنّ:

$\frac{2}{3}S = \text{borne sup.}\sum_{i=1}^{n} s_i$	$\frac{V}{2} = \text{borne sup.}\sum_{i=1}^{n} v_i$
$s = \text{borne sup.}\sum_{i=1}^{n} s_i$	$v = \text{borne sup.}\sum_{i=1}^{n} v_i$.

(حيث نرمز بـ borne sup.(H) إلى الحد الأعلى للمجموعة المنظَّمة أو للمتتالية H)

ويبيّن بعد ذلك، وفي كلٍّ من الحالات، بواسطة برهان الخُلف، وحدانيّة الحدّ الأعلى:

$s = \frac{2}{3}S$ (٢٠)	$v = \frac{V}{2}$ (٣٦)

٢-٣-٣ نصّ

"في مساحة المجسَّمات المكافئة"

لثابت بن قرّة

٩٥ – ظ

في مساحة المجسّمات المكافئة
لثابت بن قرة

〈تعريفات〉

إن الأشكال المجسّمة التي أسميها مكافئةً صنفان، أحدهما الذي يكون بإدارة قِطْع القِطْع المكافئ حول خطٍّ مستقيم، وأسمّي هذا الصنف منها المكافئ المستدير، والآخر الذي يكون بإدارة الخط المستقيم على محيط قِطْع القطع المكافئ.

ومن المجسّمات المكافئة المستديرة جنسان متقدمان لهما خمسة أنواع. وأحد الجنسين هو الذي يحويه نصف قطعة من القطع المكافئ، إذا أثبت قطرها وأدير أحد قسمي خط القطع منها والنصفُ الذي يليه، من نصفي قاعدتها، من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ. وأسمّي هذا الجنسَ القبةَ المكافئة. وإنما أعني بقولي نصفَ قطعة من القطع: ما أحاط به قطرُ تلك القطعة وواحدٌ من النصفين اللذين عن جنبتيه من خط القطع ونصف قاعدة القطعة. والجنس الآخر هو الذي تحويه قطعة من القطع المكافئ إذا أثبتت قاعدتها وأدير خط القطع منها 〈حولها〉 من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ. وأسمي هذا الجنس الكرة المكافئة. وأسمي رأس القطعة التي يُدار نصفها فيحدث منه القبة المكافئة رأس القبة. وأسمي نقطتي طرفي قاعدة القطعة التي تدار فيحدث منها الكرة المكافئة قطبيْ الكرة.

والقبة المكافئة ثلاثة أنواع، أحدها الكائن بإدارة نصف قطعة من القطع التي أقطارها سهام، وأسمي هذا النوع القبة المعتدلة الرأس، لاعتدال رأسها في نتوئه عما حوله. والنوع الثاني الكائن

3 كتبها مباشرةً بعد البسملة – 10 والنصف: والصنف / إلى: االى – 12 النصفين: الجنسين.

بإدارة النصف النائي عن السهم من نصفي قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسمي هذا النوع القبة الناتئة الرأس لفضل ارتفاع رأسها ونتوئه عما حوله. والنوع الثالث الكائن بإدارة النصف الذي يلي السهم من نصفي قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسمي هذا النوع القبة الغائرة الرأس لانخفاض رأسها عما حوله.

وللكرة المكافئة نوعان. أحدهما الكائن بإدارة قطعة من القطع التي أقطارها سهام، وأسمي هذا النوع الشبيه بالبطيخة، لأن صور أشكاله متقببةٌ شبيهةٌ بأشكال أجناس البطيخ. والنوع الآخر الكائن بإدارة قطعة من القطع التي أقطارها ليست بسهام، وأسميه الشبيه بالبيضة، لدقة أحد طرفيه وغلظ الطرف الآخر.

وإذا أثبت أحدُ ضلعي مثلث منفرج الزاوية، المحيطين بزاويته المنفرجة، وأدير ضلعاه الباقيان، فإني أسمي الشكل الحادث من ذلك المخروطَ المستدير الأجوف. وإذا أثبت أحد الضلعين المحيطين بزاوية حادة من مثلث وأدير ضلعا المثلث الباقيان، فإن الشكل الحادث من ذلك يُسمّى المُعيّن المجسم.

وإذا قطع مخروطًا مستديرًا سطح يوازي قاعدته، فإني أسمي القطعة التي تقع من المخروط – فيما بين ذلك السطح وقاعدة المخروط – فضلةَ المخروط المستدير. وإذا نُقص من مخروط مستدير أجوف مخروطٌ مستديرٌ أجوف، وكانت الزاوية التي عند رأس المخروطين من زوايا المثلثين – اللذين بهما عملا – مشتركةً للمثلثين، وكان الخطان اللذان يوترانها من المثلثين متوازيين، فإني أسمي القطعة الباقيةَ فضلةَ المخروط المستدير الأجوف. وأسمي نظير ذلك من المعيّن / المجسّم فضلةَ المعيّن ٩٦ - و المجسّم.

وإذا كان شكلٌ ما وخط مستقيم في سطح واحد، وكان الخط خارجًا عن ذلك الشكل، وأثبت الخط وأدير حوله السطح مع الشكل الذي فيه من موضع ما حتى يعود إلى الموضع الذي منه بدأ، فإني أسمي المجسم الذي يحوزه ذلك الشكل الذي في السطح الطوق. فإن كان ذلك الشكل مثلثًا سميتُ المجسم الطوقَ المثلث، وإن كان مربعًا سميته الطوق المربع، وما سوى ذلك على هذا المثال.

1 النائي: الثاني – 5 أحدهما: أحدها – 7 الشبيه: الشبييه – 21 بدأ: بديا.

– آ – كلُّ عددين مربعين متواليين، فإن فضلَ ما بينهما مساوٍ لمثلي ضلع أصغرهما مزيدًا عليهما واحدٌ.

فليكن عددان مربعان متواليان عليهما ا ب جـ ، وليكن ضلع ا ب عدد د هـ وضلع جـ و، وليكن ز ب مثل جـ .

فأقول: إن ا ز مساوٍ لمثليْ و مزيدًا عليها واحد.



برهان ذلك: أن مربعي ا ب جـ متواليان، ففضل ما بين ضلعيهما هو الواحد، لأنه لو لم يكن كذلك لوقع بينهما عدد ولكان مربعه واقعًا فيما بين عددي ا ب جـ المربعين، وذلك غير ممكن، لأن عددي ا ب جـ مربعان متواليان.

فإذا جعلنا ح هـ مثل و، كان د ح واحدًا، ومربع عدد د هـ مساوٍ للمربعين الكائنين من د ح وح هـ مع المجتمع من ضرب د ح في ح هـ مرتين. فأما المربع الكائن من ح هـ فهو جـ ، لأن ح هـ مثل و. وأما المربع الكائن من د هـ فهو ا ب، وفضل ما بين ا ب وجـ هو عدد ا ز. فالذي يكون من ضرب د ح في ح هـ مرتين مع المربع الكائن من د ح مساوٍ لعدد ا ز. فأما الذي يكون من ضرب د ح في ح هـ مرتين فهو مثلا ح هـ ، لأن د ح واحد. وأما المربع الكائن من د ح فهو الواحد، فعدد ا ز مساوٍ لمثلي ح هـ مزيدًا عليها واحد. وح هـ مثل و، فعدد ا ز مساوٍ لمثلي و مزيدًا عليها واحد؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨ب⟩ كلُّ عدد مربع فرد يُزاد عليه واحد، فإن المجتمع من ذلك يكون مساويًا لمثليْ ضلعه مع أربعة أمثال الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقلُّ من ذلك الضلع.

فليكن عدد مربع فرد عليه آ ، وليكن ضلعه ب ، وليكن الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقل من ب أفرادَ جـ د هـ.

فأقول: إن عدد آ إذا زيد عليه واحد، كان ما يجتمع مساويًا لمثلي عدد ب مع أربعة أمثال جـ ⟨د هـ⟩.

5 عليها: عليها.

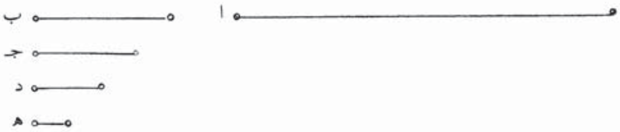


برهان ذلك: أن عدد ب فردٌ، لأنه ضلع عدد ا الذي هو فرد. فإذا زدنا عليه واحدًا كان ما يجتمع زوجًا. فليكن الذي يجتمع عدد و، وليكن مربع عدد و عدد ز. فعدد ز أربعة أمثال مربع نصف عدد و. ومربع نصف عدد و مساوٍ لأعداد جـ د هـ ب مجموعةً، للذي تبيّن في الشكل الرابع من قولنا في مساحة القطع المكافئ، فعدد ز أربعة أمثال أعداد جـ د هـ ب مجموعة، ولذلك يكون عدد ز منقوصًا منه مثلا عدد ب مساويًا لأربعة أمثال أعداد جـ د هـ مجموعةً مع مثليْ عدد ب، ولكن عدد ا ينقص عن عدد ز مثلي ب، الذي هو ضلع عدد ا، وزيادة واحد، لأن عددي ا ز مربعان متواليان، وذلك أن فضل ما بين عددي ب و – اللذين هما ضلعاهما – هو الواحد. فعدد ا إذا زيد عليه واحد كان مساويًا لمثلي عدد ب مع أربعة أمثال أعداد جـ د هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨جـ⟩ كلُّ عدد مكعب فرد يُزاد عليه ضلعُه، فإن المجتمع من ذلك يكون مساويًا لمثلي المجتمع من ضرب ضلع المكعب في نفسه وفي مثلي الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي أقلُّ منه.

فليكن / عدد مكعب فرد عليه ا وعلى ضلعه ب وعلى ما كان أقل من ب من الأفراد المتوالية ٩٦ - ظ
المبتدئة من الواحد جـ د هـ.

فأقول: إن عددي ا ب مجموعين مساويان لمثلي المجتمع من ضرب عدد ب في نفسه وفي مثليْ أعداد جـ د هـ.



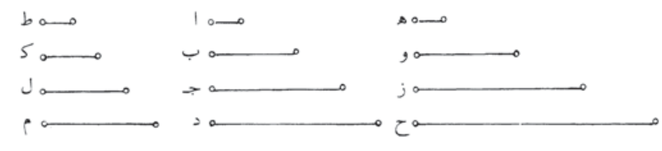
6 مثلي: مثل / ولكن: وليكن – 7 عددي (الأولى): عدى / كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ا».

برهان ذلك: أن عدد ب فرد، لأنه ضلعُ مكعبِ آ الذي هو فردٌ، ولذلك يكون مربع عدد ب فردًا. فإذا زيد عليه واحد، كان المجتمع مساويًا لمثلي ب مع أربعة أمثال جـ د هـ، ولذلك يكون المجتمع من ضرب عدد ب في مربع عدد ب – مزيدًا على ذلك المربع واحدٌ – مساويًا للمجتمع من ضرب عدد ب في مثليه وفي أربعة أمثال جـ د هـ. فالمجتمع إذًا من ضرب عدد ب في مربع عدد ب – مزيدًا على ذلك المربع واحدٌ – مثلا المجتمع من ضرب عدد ب في نفسه وفي مثلي أعداد جـ د هـ. وأما المجتمع من ضرب عدد ب في مربع عدد ب فهو مكعب آ، وأما المجتمع من ضرب عدد ب في واحد فهو مثل عدد ب؛ فمكعب آ مع عدد ب مثلا المجتمع من ضرب عدد ب في نفسه وفي مثلي أعداد جـ د هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– د – إذا كانت أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعدادٌ أخر، مربعات أعداد مربعة متوالية، مقارنة لها مبتدئة من الواحد، فإن كل واحد من الأعداد المكعبة إذا زيد عليه ضلعُه، كان المجتمع من ذلك مثلي فضل ما بين قرينه من مربعات الأعداد المربعة وبين الذي يليه قبله منها إن كان قبله شيء وإلا فمثلاه وحده.

فليكن أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها آ ب جـ د، وبعدتها أعداد أخر مربعات أعداد مربعة متوالية مقارنة لها مبتدئة من الواحد عليها هـ و ز ح، وليكن ضلع مكعب آ ط، وضلعُ ب ك، وضلع جـ ل، وضلعُ د م.

فأقول: إن كل واحد من أعداد ⟨آ⟩ ب جـ د إذا زيد عليه ضلعُه، كان المجتمع مثلي فضل ما بين قرينه من أعداد هـ و ز ح وبين الذي يليه قبله، وإن آ ط إذا جمعا مثلا هـ.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا الأعداد المربعة التي هي أضلاع أعداد هـ و ز ح على الولاء أعداد ن س ع ف، كانت أعداد ن س ع ف مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. وفضل ما بين

1 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ب» – 4-5 مثليه ... ب في: أثبتها في الهامش – 4 وفي: في.

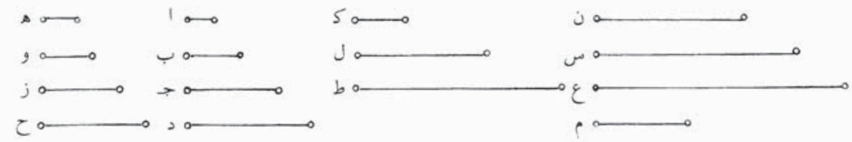
الأعداد المربعة المتوالية المبتدئة من الواحد هو الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الثلاثة، للذي تبيّن في الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. والأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الثلاثة هي أعداد ك ل م لأنها أضلاع مكعبات ب جـ د التي هي مكعبات أفراد متوالية مبتدئة من أول الأعداد الأفراد المكعبة، ففضل ما بين عددي ن س هو عدد ك، وفضل ما بين عددي س ع عدد ل، وفضل ما بين عددي ع ف عدد م. فالمجتمع إذًا من ضرب عدد ك في ن مرتين مع مربع عدد ك ومع المربع الكائن من ن مساوٍ لمربع عدد س. ويكون لذلك فضل ما بين مربع عدد س والمربع الكائن من ن مساويًا للمجتمع من ضرب عدد ك في ن مرتين مع مربع عدد ك. فأما المربع الكائن من ن فهو هـ، وأما مربع عدد س فهو و، ففضل ما بين هـ و مساوٍ للمجتمع من ضرب ك في ن مرتين مع مربع عدد ك. ولكن ن مساوٍ للأعداد الأفراد التي هي أقل من عدد ك، وذلك تبيّن في الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. ففضل ما بين هـ و مساوٍ للمجتمع من ضرب عدد ك في نفسه مرة وفي الأفراد التي هي أقل منه مرتين، فهو إذًا مساوٍ للمجتمع من ضرب عدد ك في نفسه وفي مثلي الأفراد التي هي أقل منه. ولكن عددي ب ك إذا جُمعا، مثلا المجتمع من ضرب عدد ك في مثله وفي مثلي الأفراد التي هي أقل منه، لأن عدد ب مكعب فرد وضلعه عدد ك، فعددا ب ك، إذا جمعا، مثلا فضل ما بين عددي هـ و المربعين. وكذلك أيضًا نبيّن أن عددي جـ ل، إذا جمعا، مثلا فضل ما بين عددي و ز، وأن عددي د م، إذا جمعا، مثلا فضل ما بين عددي ز ح. وأما أن ا مع ط مثلا هـ فهو بيّنٌ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– هـ – كلُّ الأعداد المكعبة الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد، إذا جمعت وزيدت عليها ٩٧ – و أضلاعها، فإن الذي يجتمع مثلا مربع العدد المساوي لجملة أضلاعها.

فليكن أعداد مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها ا ب جـ د، وليكن أضلاعها هـ و ز ح، وليكن جملتها عدد ط.

فأقول: إن أعداد ا ب جـ د هـ و ز ح، إذا جمعت، مثلا مربع عدد ط.

6 مربع : مكررة / ك : عادة ما يكتبها الناسخ مثل «اللام»، ولن نشير إليها فيما بعد – 9 عدد: أثبتها في الهامش – 10 الثالث: انظر الشكل الثالث والرابع – 14 ب : أثبتها في الهامش / فعددا: فعدد / كتب في الهامش إزاء هذا السطر « في جـ ».



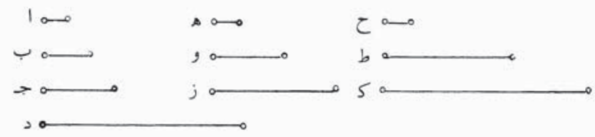
برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا عدد ك مثل ه و مجموعين، وجعلنا عدد ل مثل ه و ز، وقد كان عدد ط مثل ه و ز ح، صارت أعداد ⟨ه⟩ ك ل ط مربعة متوالية مبتدئة من الواحد، وذلك يتبين من الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ، لأن أعداد و ز ح أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة. وإذا جعلنا مربعات أعداد ه ك ل ط أعداد م ن س ع، كانت أعداد م ن س ع مربعات أعداد مربعة متوالية مبتدئة من الواحد. وأعداد ا ب جـ د مكعبة أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وأضلاعها ه و ز ح. فإذا كان ذلك كذلك، فإن ا ه إذا جمعا يكونان مثلي م، ويكون ب و إذا جمعا مثلي زيادة ن على م، فأعداد ا ب ه و إذا جمعت مثلا عدد ن. وكذلك أيضًا يكون عددا جـ ز ⟨إذا جمعا⟩ مثلي زيادة عدد س على عدد ن. فأعداد ا ب جـ ه و ز، إذا جمعت، مثلا عدد س. وعلى هذا المثال أيضًا يتبين أن عددي د ح ⟨إذا جمعا⟩ مثلا زيادة عدد ع على عدد س. فأعداد ا ب جـ د ه و ز ح، إذا جمعت، مثلا عدد ع. وعدد ع هو مربع عدد ط، فأعداد ا ب جـ د ه و ز ح، إذا جمعت، مثلا مربع عدد ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– و – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإن المجتمع من ضرب كل واحد منها في ثلاثة أمثال مربع نفسه مزيدًا عليها ثلاثة، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة تلك الأفراد.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها ا ب جـ، وليكن عدد د مساويًا لجملتها، وليكن مربعاتها على الولاء أعداد ه و ز.

فأقول: إن المجتمع من ضرب ا في ثلاثة أمثال ه مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال ز مزيدًا عليها ثلاثة، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد د.

6 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في د» – 11 عدد ع (الأولى) ... جمعت: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم.

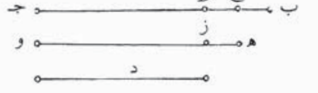


برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا المجتمع من ضرب آ في هـ ح، والمجتمعَ من ضرب ب في و ط، والمجتمعَ من ضرب جـ في ز ك، كانت أعداد ح ط ك مكعبة أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد وأضلاعها آ ب جـ، وجملة هذه الأضلاع د، فأعداد آ ب جـ ح ط ك، إذا جمعت، مساوية لمثلي مربع عدد د، ولذلك يكون ثلاثة أمثال أعداد آ ب جـ ح ط ك، إذا جمعت، مساوية لستة أمثال مربع عدد د. فأما ثلاثة أمثال ح فهي مثل المجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال هـ، وأما ثلاثة أمثال ط فهي مثل المجتمع من ضرب ب في ثلاثة أمثال و، وأما ثلاثة أمثال ك فهي مثل المجتمع من ضرب جـ في ثلاثة أمثال ز، فثلاثة أمثال آ ب جـ مع المجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال هـ ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال و ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال ز مساوٍ لستة أمثال مربع عدد د. والمجتمع من ضرب كل واحد من آ ب جـ في الثلاثة مساوٍ لثلاثة أمثال أعداد آ ب جـ مجموعة، فالمجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال هـ وزيادة ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال و وزيادة ثلاثة، ومن ضرب / جـ في ثلاثة أمثال ز وزيادة ثلاثة، مساوٍ لستة ٩٧ – ظ
أمثال مربع عدد د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ز – كل عدد مسطح مجتمع من ضرب عددين زوجين متواليين أحدهما في الآخر يزاد عليه واحد، فإن المجتمع من ذلك مساوٍ لمربع العدد الفرد الذي فيما بين العددين الزوجين.

فليكن عدد مسطح عليه آ، وليكن ضلعاه عددين زوجين متواليين عليهما ب جـ د، وليكن العدد الفرد الذي فيما بين العددين الزوجين هـ و.

فأقول: إن عدد آ إذا زيد عليه واحد، كان مساويًا لمربع عدد هـ و.



4 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في هـ» – 16 الزوجين: كرر بعدها السطر السابق «فليكن عدد مسطح ... ب جـ د» وزاد كلمة «بينهما» في آخره.

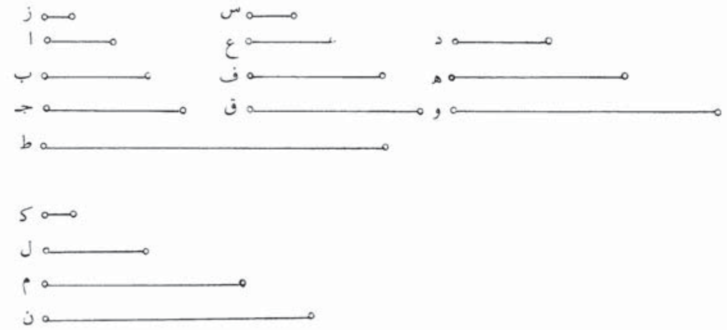
برهان ذلك: أن أعداد د هـ و ب جـ متوالية، ففضل ما بين كل واحد منها والذي يليه واحد. وإذا جعلنا و ز مثل د وجـ ح مثل هـ و وجعلنا جـ ط أيضًا مثل د، كان كل واحد من ب ح ح ط هـ ز واحدًا. والمجتمع من ضرب ب جـ في د مساوٍ للمجتمع من ضرب ب ط في ط جـ مع المربع الكائن من ط جـ. ولكن المجتمع من ضرب ب ط في ط جـ مساوٍ للمجتمع من ضرب ح ط في ط جـ مرتين، لأن ح ط نصف ب ط، فالمجتمع من ضرب ب جـ في د مساوٍ للمجتمع من ضرب ح ط في ط جـ مرتين مع المربع الكائن من ط جـ. فأما ح ط فهو مثل هـ ز، وأما ط جـ فهو مثل ز و، فالمجتمع من ضرب ب جـ في د مساوٍ للمجتمع من ضرب هـ ز في ز و مرتين مع المربع الكائن من ز و. وإذا جعلنا الواحد الذي هو المربع الكائن من هـ ز مشتركًا، كان المجتمع من ضرب ب جـ في د مزيدًا عليه واحد مساويًا للمجتمع من ضرب هـ ز في ز و مرتين مع المربعين الكائنين من ز و هـ ز؛ وذلك مساوٍ لمربع عدد هـ و، فالمجتمع من ضرب ب جـ في د مزيدًا عليه واحد مساوٍ لمربع عدد هـ و. والمجتمع من ضرب ب جـ في د مساوٍ لعدد ا. فعدد ا إذا زيد عليه الواحد، كان ما يجتمع مساويًا لمربع عدد هـ و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– ح – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وبعدتها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، فإن المجتمع من ضرب كل واحد من الأفراد المتوالية في ثلاثة أمثال قرينه من الأعداد المسطحة مزيدًا عليها ستة، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة، كان ما يجتمع مساويًا لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد مع الواحد.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة عليها ا ب جـ، وليكن بعدتها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، عليها د هـ و؛ وليكن الواحد ز والستة ح، وليكن عدد ط مساويًا لأعداد ز ا ب جـ مجموعة.

فأقول: إن المجتمعة من ضرب ز في ح، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ح، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ح، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ح، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ط.

2 مثل (الأولى): مثلى – 3-4 والمجتمع ... ط جـ (الأولى): مكررة.



برهانه: أنّا إذا جعلنا مربعات ز ا ب ج أعداد ك ل م ن، ‹و›كانت أعداد ز ا ب ج أفرادًا متوالية مبتدئة من الواحد ومربعاتها ك ل م ن، فالمجتمع من ضرب ز في ثلاثة أمثال ك مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال ل مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال م مزيدًا عليها ثلاثة، ‹ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال ن مزيدًا عليها ثلاثة› مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ط. وإذا جعلنا الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من / الاثنين أعداد س ع ف ٩٨ - و ق، كان عدد ا الفرد فيما بين عددي س ع، وعدد ب ‹الفرد فيما بين عددي ع ف، وعدد ج الفرد› فيما بين عددي ف ق. والمجتمع من ضرب عدد س في عدد ع هو عدد د المسطح؛ فعدد د إذا زيد عليه واحد كان ما يجتمع مساويًا لمربع عدد ا، الذي هو عدد ل. وكذلك أيضًا نبيّن أن عدد ه إذا زيد عليه واحد، كان ما يجتمع مساويًا لمربع عدد ب، الذي هو عدد م، وأن عدد و إذا زيد عليه واحد، كان ما يجتمع مساويًا ‹لمربع عدد ج الذي هو مساوٍ› لعدد ن. ولذلك إذا زيد على ثلاثة أمثال كل واحد من أعداد د ه و ثلاثة، كان ما يجتمع مساويًا لثلاثة أمثال نظيره من أعداد ل م ن. وإذا جعلنا عدد الثلاثة مشتركًا، كانت ثلاثة أمثال كل واحد من أعداد د ه و، إذا زيد عليها ستة، مساوية لثلاثة أمثال نظيره من أعداد ل م ن مزيدًا عليها ثلاثة؛ وكان المجتمع من ضرب ا في ثلاثة أمثال ل مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة ‹أمثال› م مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال ن مزيدًا عليها ثلاثة، إذا جمع، مساويًا للمجتمع من ضرب ا في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال ه مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ج في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ستة.

1 إذا: كتب قبلها «نجعل»، ثم ضرب عليها بالقلم – 2 أفرادًا: كتب قبلها «اقول»، ثم ضرب عليها بالقلم / كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ز» – 8 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ز» – 16 ب: د.

وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ز في ثلاثة أمثال ك مزيدًا عليها ثلاثة، الذي هو مثل ضربه في ح مشتركًا، كان المجتمع من ضرب ز في ثلاثة أمثال ك مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال ⟨ل⟩ مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال م مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال ن مزيدًا عليها ثلاثة، إذا جمع، مساويًا للمجتمع من ضرب ز في ح، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ستة. وقد كنا بيّنا أن المجتمع من ضرب ز في ثلاثة أمثال ك مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال ل مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال م مزيدًا عليها ثلاثة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال ن مزيدًا عليها ثلاثة، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ط. فالمجتمع من ضرب عدد ز في ح، ومن ضرب ا في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ح – الذي هو ستة – ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ح، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ح، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

⟨ط⟩ كل عددين زوجين متواليين فإن مربعيها مع العدد المسطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر مساويان لثلاثة أمثال المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر مزيدًا على ذلك أربعة.

فليكن عددان زوجان متواليان عليهما ا ب جـ، وليكن مربع ا عدد د، ومربع ب جـ عدد هـ، وليكن المجتمع من ضرب ا في ب جـ عدد و.

فأقول: إن أعداد د و هـ مجموعة مساوية لثلاثة أمثال عدد و مزيدًا على ذلك أربعة.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا جـ ز مثل ا، كان المربعان الكائنان من ب جـ وجـ ز مساويين للمجتمع من ضرب ب جـ في جـ ز مرتين مع المربع الكائن من ب ز. وإذا جعلنا المجتمع / من ٩٨ – ظ
ضرب ب جـ في جـ ز مشتركًا، كان المربعان الكائنان من ب جـ وجـ ز مع المجتمع من ضرب ب جـ في جـ ز مجموعة مساوية للمجتمع من ضرب ب جـ في جـ ز ثلاث مرات مع المربع الكائن

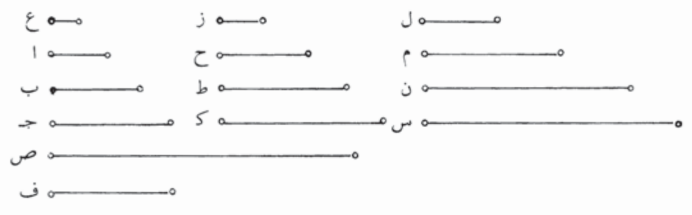
3 مَ: وَ – 14 مزيداً: مزيد.

من ب ز. ولكن جـ ز مثل آ ، فالمربعان الكائنان من آ وب جـ – اللذان هما د هـ – مع المجتمع من ضرب آ في ب جـ الذي هو و، مساويان للمجتمع من ضرب آ في ب جـ ثلاث مرات، الذي هو ثلاثة أمثال و، مزيدًا على ذلك المربع الكائن من ب ز. ولكن المربع الكائن من ب ز أربعة لأن ب ز اثنان، وذلك أنه فضل ما بين عددين زوجين متواليين. فأعداد د و هـ ، إذا جمعت، مساوية لثلاثة أمثال عدد و مزيدًا على ذلك أربعة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **ي** – إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وبعدتها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، فإن المجتمع من ضرب كل واحد من الأعداد الأفراد في قرينه من الأعداد المسطحة وفي مربعي ضلعي ذلك العدد المسطح، مزيدًا عليها اثنان، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة، كان ما يجتمع مساويًا لستة أمثال مربع العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد مع الواحد.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة عليها آ ب جـ ، وليكن بعدتها أعداد مسطحة مقارنة لها مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، كل واحد في الذي يليه، عليها د هـ و، وليكن أضلاعها أعداد ز ح ط ك الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين، ومربعات هذه الأعداد ل م ن س ؛ وليكن الواحد ع ، والستة ف ، وليكن عدد ص مساويًا لأعداد ع آ ب جـ مجموعة.

فأقول: إن المجتمع من ضرب ع في ف ، ومن ضرب آ في أعداد د ل م مع الاثنين، ومن ضرب ب في أعداد هـ م ن مع الاثنين، ومن ضرب جـ في أعداد و ن س مع الاثنين، إذا جمع ، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ص.



برهان ذلك: أن عددي ز ح زوجان متواليان، ومربعاهما عددا ل م ، والمجتمع من ضرب أحدهما في الآخر عدد د ، فأعداد د ل م مجموعة مساوية لثلاثة أمثال عدد د مزيدًا على ذلك

2 مساويان: مساو – 10 ما: آ – 20 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في طَ».

أربعة. وإذا جعلنا عدد الاثنين مشتركًا، كانت أعداد د ل م مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد د مزيدًا على ذلك ستة. وكذلك أيضًا نبيّن أن أعداد هـ م ن مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد هـ مزيدًا على ذلك ستة، وأن أعداد و ن س مجموعة مع الاثنين مساوية لثلاثة أمثال عدد و مزيدًا على ذلك ستة. فالمجتمع من ضرب آ في أعداد د ل م مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد هـ م ن مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب جـ في أعداد و ن س مزيدًا عليها اثنان، إذا جمع، مساوٍ للمجتمع من ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ستة. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ع في ف مشتركًا، كان المجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في أعداد د ل م مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد هـ م ن مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب جـ في أعداد و ن س مزيدًا عليها اثنان، إذا جمع مساويًا للمجتمع / من ٩٩ - و ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ستة، إذا جمع. ولكن المجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في ثلاثة أمثال د مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب ب في ثلاثة أمثال هـ مزيدًا عليها ستة، ومن ضرب جـ في ثلاثة أمثال و مزيدًا عليها ستة، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ص؛ وذلك أن هذه الأعداد التي ذكرنا، أما أعداد آ ب جـ منها فهي أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وأما أعداد د هـ و فهي أعداد بعدتها مقارنة لها مسطحة مجتمعة من ضرب الأعداد ⟨الأزواج⟩ المتوالية المبتدئة من الاثنين كل واحد في الذي يليه، وأما ع فهو الواحد، وأما ف فهو الستة، وأما ص فهو مساوٍ لجملة أعداد ع آ ب جـ الأفراد. فالمجتمع من ضرب ع في ف، ومن ضرب آ في أعداد د ل م مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب ب في أعداد هـ م ن مزيدًا عليها اثنان، ومن ضرب جـ في أعداد و ن س مزيدًا عليها اثنان، إذا جمع، مساوٍ لستة أمثال مربع عدد ص؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

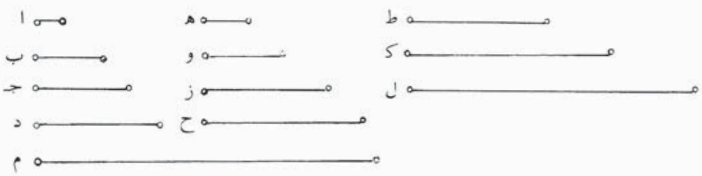
⟨**يا**⟩ إذا كانت أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها، وضرب كل واحد من الأفراد في مربع قرينه من الأزواج، فإن كان قبل قرينه زوج ضرب أيضًا في مربع ذلك الزوج وفي العدد المسطح المجتمع من ضرب ذلك القرين في

13-14 ومن ضرب ب ... ستة (الأولى): مكررة – 15 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ى» – 16 بعدتها: بعسها.

الزوج الذي قبله، وجمع ذلك، وأخذ ثلثه، وزيد عليها ثلثا العدد المساوي لجملة الأعداد الأفراد، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجتمع من العدد المساوي لجملة الأفراد في مربع أعظم الأزواج.

فليكن أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها آ بَ جَ دَ، وبعدتها أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين مقارنة لها عليها هَ وَ زَ حَ، وليكن مسطح هَ في وَ عدد طَ، ومسطح وَ في زَ عدد كَ، ومسطح زَ في حَ عدد لَ، وليكن عدد مَ مساويًا لأعداد آ بَ جَ دَ مجموعة.

فأقول: إن المجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ، ومن ضرب بَ في مربعي عددي هَ وَ وفي عدد طَ، ومن ضرب جَ في مربعي عددي وَ زَ وفي عدد كَ، ومن ضرب دَ في مربعي عددي زَ حَ وفي عدد لَ، إذا جمع، وأخذ ثلثه، وزيد عليه ثلثا عدد مَ، كان ما يجتمع مساويًا لنصف المجتمع من ضرب عدد مَ في مربع عدد حَ.



برهان ذلك: أن أعداد [آ] بَ جَ دَ أفراد متوالية مبتدئة من الثلاثة، وأعداد طَ كَ لَ بعدتها ومقارنة لها وهي مسطحة مجتمعة من ضرب الأعداد الأزواج المتوالية المبتدئة من الاثنين كل واحد في الذي يليه، وعدد مَ مساوٍ لجملة أعداد بَ جَ دَ مع الواحد الذي هو آ. فالمجتمع من ضرب عدد بَ في عدد طَ المسطح وفي مربعي عددي هَ وَ – اللذين هما ضلعاه – وفي الاثنين، ومن ضرب عدد جَ في عدد كَ المسطح وفي مربعي عددي وَ زَ – اللذين هما ضلعاه – وفي الاثنين، ومن ضرب ⟨عدد⟩ دَ في عدد لَ المسطح وفي مربعي عددي زَ حَ – اللذين هما ضلعاه – وفي الاثنين، إذا جمع وزيد عليه المجتمع من ضرب الواحد في الستة، كان ما يجتمع / مساويًا لستة ٩٩ - ظ أمثال مربع عدد مَ. فأما المجتمع من ضرب الواحد في الستة، فهو مثل المجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ، وفي الاثنين، وأما المجتمع من ضرب كل واحد من آ بَ جَ دَ في اثنين فهو مثلا جملة أعداد آ بَ جَ دَ الذي هو عدد مَ. فالمجتمع من ضرب آ في مربع عدد هَ، ومن ضرب

6 مَ: وَ – 9 وأخذ: واحد – 14 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يَ» – 15 وَ زَ: هَ وَ – 16 زَ حَ: وَ زَ – 18 الستة: كتب بعدها «كان ما يجتمع مساويا»، ثم ضرب عليها بالقلم.

ب في مربعي عددي هـ و وفي عدد ط ، ومن ضرب جـ في مربعي عددي و ز وفي عدد ك ، ومن ضرب د في مربعي عددي ز ح وفي عدد ل إذا جمع ، وزيد عليه مثلا عدد م ، كان ما يجتمع مساويًا لستة أمثال مربع عدد م. وأيضًا، فإن أعداد ا ب جـ د أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وأعداد هـ و ز ح بعدتها مقارنة لها وهي أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، فكل واحد من أعداد هـ و ز ح يزيد على قرينه من أعداد ا ب جـ د واحدًا. فإذا زدنا على عدد د واحدًا، كان المجتمع عدد ح ، وإذا أخذنا مربع نصفه، كان مساويًا لجملة أعداد ا ب جـ د التي هي عدد م للذي تبيّن في الشكل الرابع من قولنا في مساحة القطع المكافئ. فمربع عدد م مساوٍ للمجتمع من ضرب ⟨عدد م في مربع نصف عدد ح ، فالمجتمع من ضرب⟩ ا في مربع عدد هـ ، ومن ضرب ب في مربعي عددي هـ و وفي عدد ط ، ومن ضرب جـ في مربعي عددي و ز وفي عدد ك ، ومن ضرب د في مربعي عددي ز ح وفي عدد ل ، إذا جمع ، وزيد عليه مثلا عدد م ، كان ما يجتمع مساويًا لستة أمثال مربع عدد م ، فهو إذًا مساوٍ لستة أمثال المجتمع من ضرب عدد م في مربع نصف عدد ح . وستة أمثال المجتمع من ضرب عدد م في مربع نصف عدد ح مساوية لمرة ونصف مثل المجتمع من ضرب عدد م في مربع عدد ح . فالمجتمع من ضرب ا في مربع عدد هـ ، ومن ضرب ب في مربعي عددي هـ و وفي عدد ط ، ومن ضرب جـ في مربعي عددي و ز وفي عدد ك ، ومن ضرب د في مربعي عددي ز ح وفي عدد ل ، إذا جمع ، وزيد عليه مثلا عدد م ، كان ما يجتمع مساويًا لمرة ونصف مثل المجتمع من ضرب عدد م في مربع عدد ح . ومن ذلك يتبيّن أن ثلث المجتمع من ضرب ا في مربع عدد هـ ، ومن ضرب ب في مربعي عددي هـ و وفي عدد ط ، ومن ضرب جـ في مربعي عددي و ز وفي عدد ك ، ومن ضرب د في مربعي عددي ز ح وفي عدد ل ، إذا جمع ، وزيد عليه ثلثا عدد م ، كان ما يجتمع مساويًا لنصف المجتمع من ضرب عدد م في مربع عدد ح ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

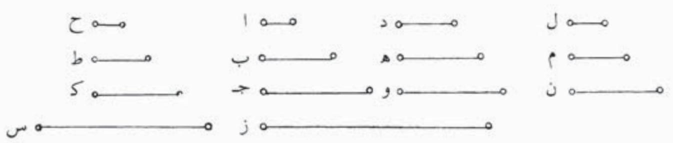
⟨**يب**⟩ إذا كانت خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها خطوط أخر مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، وكان الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد نصف الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأزواج، وضرب كل واحد من الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع قرينه من الخطوط التي

4 الاثنين: الواحد – 8 مربع: مربعي – 9 عدد (الأولى): عددى – 16 م كان: مكان.

على نسب الأعداد الأزواج، فإن كان قبل قرينه خط آخر ضرب أيضًا في مربع ذلك الخط وفي السطح المجتمع من ضرب قرينه في الخط الذي قبله، وجمعت المجسمات الكائنة من ذلك، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط – التي / على نسب الأعداد ١٠٠ - و الأفراد – في مربع نصف أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

فليكن خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها ا ب جـ، وليكن بعدتها خطوط مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وهي خطوط د ه و، وليكن خط ا نصف خط د، وليكن خط ز مساويًا لجملة خطوط ا ب جـ.

فأقول: إن المجسمات الكائنة من ضرب خط ا في مربع خط د، ومن ضرب ب في مربعي خطي د ه وفي السطح المجتمع من ضرب د في ه، ومن ضرب جـ في مربعي خطي ه و وفي السطح المجتمع من ضرب ه في و، إذا جمعت، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د، كان ما يجتمع مساويًا لنصف المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا الأعداد الأفراد التي نسبها كنسب خطوط ا ب جـ أعداد ح ط ك، والأعداد الأزواج التي نسبها كنسب خطوط د ه و أعداد ل م ن، كانت نسبة ا إلى د كنسبة ح إلى ل لأنه نصفه. فنسبة كل واحد من خطوط ا ب جـ إلى كل واحد من خطوط د ه و كنسبة نظير ذلك الخط من أعداد ح ط ك إلى نظير الخط الآخر من أعداد ل م ن. فنسبة المجسّم الكائن من ضرب ا في مربع خط د إلى المكعب الكائن من خط د كنسبة المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل إلى المكعب الكائن من ل. وكذلك أيضًا يتبيّن أن نسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط ب في مربع خط د وفي مربع خط ه وفي السطح المجتمع من ضرب د في

2 وأخذ: واحد – 11 خطي د ه: خط د ه – 12 وأخذ: واحد – 20 أيضًا: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 21 السطح: للسطح.

هـ إلى المكعب الكائن من خط هـ كنسبة المجتمع من ضرب عدد ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م إلى المكعب الكائن من [خط] م، وأن نسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط ج في مربعي خطي هـ و وفي سطح المجتمع من ضرب هـ في و إلى المكعب الكائن من خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن إلى المكعب الكائن من عدد ن. ولكن نسبة كل واحد من مكعبات خطوط د هـ و إلى مكعب خط و كنسبة قرينه من مكعبات أعداد ل م ن إلى مكعب عدد ن. فنسبة المجسمات الكائنة ⟨من ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي سطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى مكعب خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م إلى المكعب الكائن من عدد ن. ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط ج في مربعي خطي هـ و وفي سطح المجتمع من ضرب هـ في و إلى مكعب خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن إلى المكعب الكائن من عدد ن. ونسبة مكعب خط و إلى المجسم الكائن من ضرب ز في مربع و كنسبة مكعب عدد ن إلى المجتمع من ضرب س في مربع ن. فنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ا في مربع خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ح في مربع ل إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن؛ ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن؛ ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب خط ج في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة المجتمع من ضرب عدد ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن إلى المجتمع من ضرب س في مربع عدد ن. فنسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب خط ا في مربع خط د، ومن ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ، ومن ضرب خط ج في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و، إذا جمعت، إلى المجسم الكائن

3 خطي هـ و: خط هـ و/ وفي سطح: وفي و الى سطح – 4 عددي: عدد.

من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن ، إذا جمعت ، إلى المجتمع من ضرب س في مربع ن . ونسبة المجسم الكائن〉 من ضرب 〈مربع〉 خط ا في [مربع] خط ز 〈إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز〉 في مربع خط و كنسبة عدد س إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . ولذلك يكون نسبة ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و كنسبة ثلثي عدد س إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . وقد كنا بيّنا أن نسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب خط ا في مربع خط د ، ومن ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ ، ومن ضرب خط جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و ، إذا جمعت ، إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و ، كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع / من ضرب م في ن 〈إذا جمعت ، إلى المجتمع من ضرب س في مربع ن . فنسبة ثلث المجسمات ١٠٠ - ظ الكائنة من ضرب خط ا في مربع خط د ، ومن ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ ، ومن ضرب خط جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و ، إذا جمع ، مزيدًا عليه ثلثا المجتمع من ضرب خط ز في مربع نصف خط د ، إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و ، كنسبة ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن〉 إذا جمع ، مزيدًا عليه ثلثا عدد س ، إلى المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن . ولكن ثلث المجتمع من ضرب ح في مربع عدد ل ، ومن ضرب ط في مربعي عددي ل م وفي المجتمع من ضرب ل في م ، ومن ضرب ك في مربعي عددي م ن وفي المجتمع من ضرب م في ن ، إذا جمع ، وزيد عليه ثلثا عدد س ، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجتمع من ضرب عدد س في مربع عدد ن ، لأن أعداد ح ط ك أفراد متوالية مبتدئة من الواحد وهي مساوية لعدد س ، وأعدادَ ل م ن أزواج متوالية مبتدئة من

4 في (الثانية): وفى – 7 ن: ق – 9 خطي د هـ وفي: خط د وز في / السطح: للسطح / هـ (الثانية): و / و: ز – 21 عددي ل م: عدد ل و – 22 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في با».

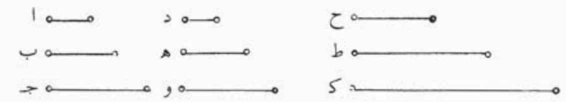
الاثنين. فثلث المجسمات الكائنة من ضرب آ في مربع خط دَ، ومن ضرب بَ في مربعي خطي دَ هَ وفي السطح المجتمع من ضرب دَ في هَ، ومن ضرب جَ في مربعي خطي هَ وَ وفي السطح المجتمع من ضرب هَ في وَ، إذا جمعت، مزيدًا عليه ثلثا المجتمع من ضرب خط زَ في مربع نصف خط دَ، مساوٍ لنصف المجسّم الكائن من ضرب خط زَ في مربع خط وَ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– يج – إذا كانت خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها خطوط أخر مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ولم يكن الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد نصف الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأزواج، وضرب كل واحد من الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع قرينه من الخطوط التي على نسب الأزواج، فإن كان قبل قرينه خط آخر ضرب أيضًا في مربع ذلك الخط وفي السطح المجتمع من ضرب قرينه في الخط الذي قبله، وجمعت المجسمات الكائنة من ذلك وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع نصف أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج، فإن الذي يجتمع مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب الخط المساوي لجملة الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في مربع أعظم الخطوط التي على نسب الأعداد الأزواج.

فليكن خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها آ بَ جَ، وليكن بعدتها خطوط مقارنة لها على نسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين وهي خطوط دَ هَ وَ، ولا يكونن خط آ نصف خط دَ، وليكن خط زَ مساويًا لجملة خطوط آ بَ جَ.

فأقول: إن المجسمات الكائنة من ضرب خط آ في مربع خط دَ، ومن ضرب بَ في مربعي خطي دَ هَ وفي السطح المجتمع من ضرب دَ في هَ، ومن ضرب جَ في مربعي خطي هَ وَ وفي السطح المجتمع من ضرب هَ في وَ، إذا جمعت، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب خط زَ في مربع نصف خط دَ، كان ما يجتمع مساويًا لنصف المجسم الكائن من ضرب خط زَ في مربع خط وَ.

3 ثلثا: غير واضحة – 4 دَ: هَ – 9 الأعداد: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 11 وأخذ: واحد – 17 وهي: وفي – 21 وأخذ: واحد – 22 زَ: نَ – 23 زَ: نَ.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا ضعف خط ا خط ح وجعلنا نسب خطوط ح ط ك بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط د هـ و بعضها إلى بعض إذا أخذت على الولاء، كانت نسبة / المجسم الكائن من ضرب خط ا في مربع خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ١٠١ - و ا في مربع خط ح كنسبة مربع خط د إلى مربع خط ح، فنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ب في مربع خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ب في مربع خط ح كنسبة السطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى السطح المجتمع من ضرب ح في ط. ونسبة السطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى السطح المجتمع من ضرب ح في ط كنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ب في السطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى المجسم الكائن من ضرب خط ب في السطح المجتمع من ضرب ح في ط، فنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ب في مربع خط د إلى المجسم الكائن من ضرب خط ب في مربع خط ح، التي هي كنسبة مربع خط د إلى مربع خط ح، كنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ب في السطح المجتمع من ضرب د في هـ إلى المجسم الكائن من ضرب خط ب في السطح المجتمع من ضرب خط ح في ط. وبمثل ذلك أيضًا نبيّن أن كل واحدة من نسب المجسمات الكائنة من ضرب ب في مربع خط هـ ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و، إلى نظيره من المجسمات الكائنة من ضرب ب في مربع خط ط ومن ضرب جـ في مربعي خطي ط ك وفي السطح المجتمع من ضرب ط في ك، مساويةٌ لنسبة مربع خط د إلى مربع خط ح. وكذلك نسبة ثلث المجسمات الأول إلى ثلث المجسمات الأخر. وكذلك نسبة ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د إلى ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح. فإذا جمعنا، كانت نسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط د، ومن ضرب ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و، إذا جمعت، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د، إلى ثلث المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط ح، ومن ضرب ب في مربعي خطي ح ط وفي السطح المجتمع من ضرب

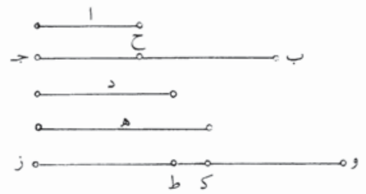
3 من (الأولى): كتب بعدها «ضعف»، ثم ضرب عليها بالقلم – 5 ب: ا / ب: ا / ح: ط – 9 ب: ا – 10 ب: ا / التي: الى.

ح في ط، ومن ضرب جـ في مربعي خطي ط ك وفي السطح المجتمع من ضرب ط في ك، إذا جمعت، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح، كنسبة مربع خط د إلى مربع خط ح التي هي كنسبة مربع خط و إلى مربع خط ك. ونسبة مربع خط و إلى مربع خط ك كنسبة المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و إلى المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط ك، فنسبة ثلث المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط د، ومن ضرب ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ ⟨و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و، إذا جمعت، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د، إلى ثلث المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط ح، ومن ضرب ب في مربعي خطي ح ط وفي السطح المجتمع من ضرب ح في ط، ومن ضرب جـ في مربعي خطي ط ك وفي السطح المجتمع من ضرب ط في ك، إذا جمعت، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح، كنسبة نصف المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و إلى نصف المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط ك. وثلث المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط ح، ومن ضرب ب في مربعي خطي ح ط وفي السطح المجتمع من ضرب ح في ط، ومن ضرب⟩ جـ في مربعي خطي ط ك وفي السطح المجتمع من ضرب ط في ك، إذا جمعت، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط ح، مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط ك. فالمجسمات / [١٠١ - ظ] الكائنة من ضرب خط ا في مربع خط د، ومن ضرب خط ب في مربعي خطي د هـ وفي السطح المجتمع من ضرب د في هـ، ومن ضرب جـ في مربعي خطي هـ و وفي السطح المجتمع من ضرب هـ في و، إذا جمعت، وأخذ ثلثها فزيد عليه ثلثا المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع نصف خط د، كان ما يجتمع مساويًا لنصف المجسم الكائن من ضرب خط ز في مربع خط و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يد** – إذا كانت خمسة مقادير، وكانت نسبة الأول منها إلى الثاني كنسبة الثالث إلى الرابع وكنسبة الرابع إلى الخامس، وكان الأول أقلّ من الثاني، فإن المجتمع من ضرب الأول في زيادة الخامس على الثالث مساوٍ للمجتمع من ضرب زيادة الثاني على الأول في الثالث والرابع مجموعين.

فليكن خمسة مقادير عليها ا ب جـ د هـ وز، وليكن نسبة ا إلى ب جـ كنسبة د إلى هـ وكنسبة هـ إلى وز، وليكن ا أقلّ من ب جـ، وليكن ح جـ مثل ا وط ز مثل د.

فأقول: إن المجتمع من ضرب ا في و ط مساوٍ للمجتمع من ضرب ⟨ب⟩ ح في مقداري د هـ مجموعين.



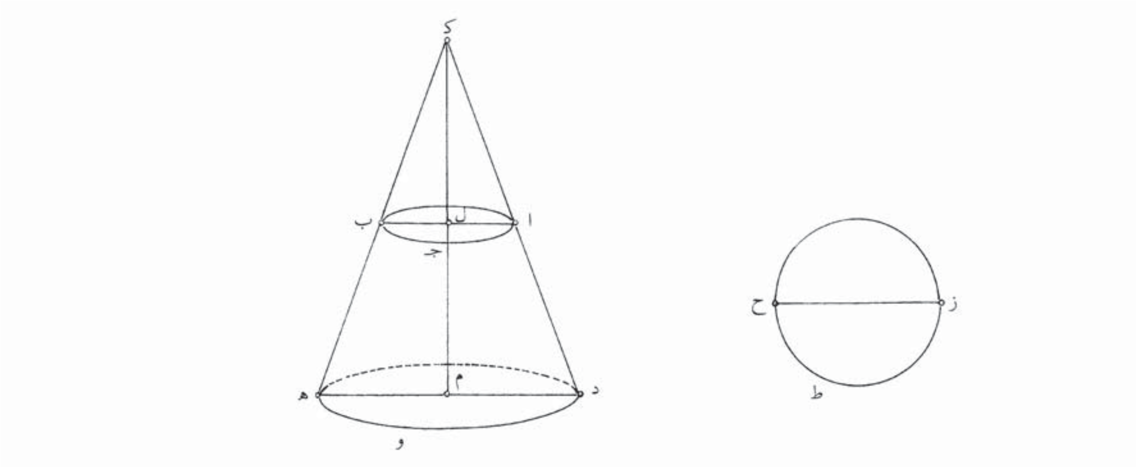
برهان ذلك: أن نسبة ا إلى ب جـ كنسبة هـ إلى و ز؛ و ح جـ مثل مقدار ا ، فنسبة ح جـ إلى جـ ب كنسبة هـ إلى و ز. وإذا جعلنا ز ك مثل هـ ، كانت نسبة ح جـ إلى جـ ب كنسبة ك ز إلى ز و. وإذا فصلنا، كانت نسبة جـ ح إلى ح ب كنسبة ز ك إلى ك و. وأيضًا، فإن نسبة د إلى هـ كنسبة هـ إلى ز⟨و⟩ ، ومقدار د مثل ط ز، ومقدار هـ مثل ز ك ، فنسبة ط ز إلى ز ك كنسبة ز ك إلى ز و. وإذا فصلنا، كانت نسبة ز ط إلى ط ك كنسبة ز ك إلى ك و. وإذا جمعنا، كانت نسبة ز ط ز ك مجموعين إلى ط ك ك و مجموعين – اللذين هما ط و – كنسبة ز ك إلى ك و ⟨و⟩كنسبة جـ ح إلى ح ب ، فنسبة ز ط ز ك مجموعين إلى ط و كنسبة جـ ح إلى ح ب. ولكن ز ط مثل د و ز ك مثل هـ و جـ ح مثل ا ، فنسبة ا إلى ح ب كنسبة د هـ مجموعين إلى ط و، فالمجتمع من ضرب ا في ط و مساوٍ للمجتمع من ضرب ب ح في مقداري د هـ مجموعين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **يه** – كل فضلة مخروط مستدير فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من ضرب ارتفاعها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة أعلاها والأخرى دائرة قاعدتها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساويًا للسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة أعلى الفضلة في قطر دائرة قاعدتها.

فليكن فضلة مخروط مستدير دائرة قاعدتها ا ب جـ ودائرة أعلاها د هـ و، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة ز ح ط مساويًا للسطح المجتمع / من ضرب قطر دائرة ا ب جـ في قطر ١٠٢ – و
دائرة د هـ و.

فأقول: إن مساحة فضلة المخروط التي عليها ا ب جـ هي مساوية لثلث المجتمع من ضرب ارتفاعها في دوائر ا ب جـ د هـ و ز ح ط الثلاث.

15 أعلى: كتب أعلاها، ثم ضرب على الحرفين الأخيرين بالقلم – 19 هي: هر.



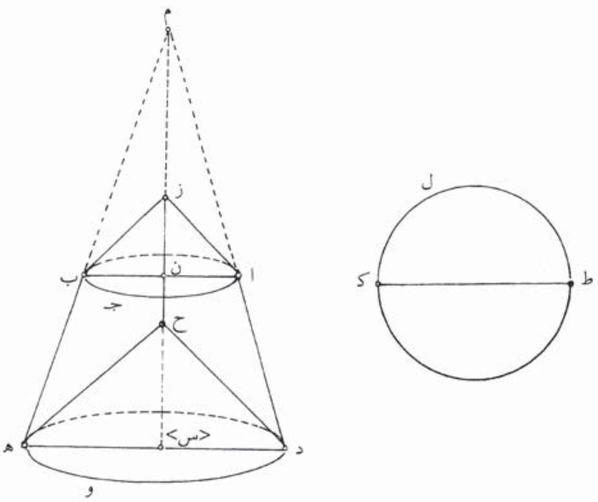
برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا نقطة رأس المخروطين اللذين نقص أحدهما عن الآخر فبقيت الفضلة نقطة ك، وجعلنا سهمهما ك ل م، وأجزنا على سهم ك ل م سطح د ا ك ب ه، كان قطع د ا ك ب ه مثلثًا وكان ا ب الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ا ب ج قطرًا لدائرة ا ب ج، وكان د ه الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة د ه و وقطرًا لدائرة د ه و. وإذا جعلنا قطر دائرة ز ح ط ز ح، كان السطح المجتمع من ضرب ا ب في د ه مساويًا لمربع خط ز ح، فنسبة ا ب إلى ز ح كنسبة ز ح إلى د ه، ونسبة مربع خط ا ب إذًا إلى مربع خط ز ح كنسبة مربع خط ز ح إلى مربع خط د ه وكنسبة ا ب إلى د ه. ونسبة ا ب إلى د ه كنسبة ك ل إلى ك م لأن خطي ا ب د ه متوازيان، وذلك أنها فصلان مشتركان لسطح ك د ه ولسطحي دائرتي ا ب ج د ه و المتوازيين. فنسبة مربع خط ا ب إلى مربع خط ز ح كنسبة مربع خط ز ح إلى مربع خط د ه وكنسبة خط ك ل إلى خط ك م. فأما نسبة مربع خط ا ب إلى مربع خط ز ح، فهي كنسبة دائرة ا ب ج إلى دائرة ز ح ط، فأما نسبة مربع خط ز ح إلى مربع خط د ه، فهي كنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة د ه و، فنسبة ك ل إلى ك م كنسبة دائرة ا ب ج إلى دائرة ز ح ط وكنسبة دائرة ز ح ط إلى دائرة د ه و. فالمجتمع من ضرب ك ل في زيادة دائرة د ه و على دائرة ا ب ج مساوٍ للمجتمع من ضرب ل م في دائرتي ا ب ج ز ح ط. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه و مشتركًا، كان المجتمع من ضرب ك ل في زيادة دائرة د ه و على دائرة ا ب ج مع المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه و، مساويًا للمجتمع من ضرب ل م في دوائر ز ح ط د ه و ⟨ا ب ج⟩ الثلاث. ولكن المجتمع من ضرب ك ل في زيادة دائرة د ه و على دائرة ا ب ج مع المجتمع من ضرب ل م في دائرة د ه و مساويًا لثلاثة أمثال

مساحة فضلة مخروط ا ب جـ د هـ و. فالمجتمع من ضرب ل م في دوائر ا ب جـ د هـ و زح ط الثلاث مساوٍ لثلاثة أمثال مساحة فضلة مخروط ا ب جـ د هـ و. فثلث المجتمع من ضرب ل م في دوائر ا ب جـ د هـ و زح ط الثلاث مساوٍ لمساحة فضلة مخروط ا ب جـ د هـ و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– يو – كلّ فضلة مخروط مستدير أجوف فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من ⟨ضرب⟩ سهمها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة قاعدة أعلاها والأخرى دائرة قاعدة أسفلها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساويًا للسطح المجتمع من ضرب قطر إحدى هاتين الدائرتين في قطر الدائرة الأخرى.

فليكن فضلة مخروط مستدير أجوف على / دائرة قاعدة أعلاها ا ب جـ وعلى دائرة قاعدة ١٠٢ – ظ أسفلها د هـ و وعلى سهمها زح، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة ط ك ل مساويًا للسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة ا ب جـ في قطر دائرة د هـ و.

فأقول: إن مساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها ا ز ب هـ ح د مساوية لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث.



2 مساوٍ: مساوية / فثلث: فمثلث – 6 إحداهن: احديهن – 7 هاتين: نهايتي – 12 ا ز ب هـ ح د: ا ز ب هـ جـ د.

برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا نقطة رأس المخروطين المستديرين الأجوفين اللذين نقص أحدهما من الآخر فبقيت الفضلة، نقطة م وسهمهما م ز ن ح، وأخرجنا على سهم م ز ن ح سطح د ا م ب هـ، ووصلنا خط د هـ، كان د ا م ب هـ مثلثًا، وكان ا ب الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ا ب جـ قطرًا لدائرة ا ب جـ، وكان د هـ الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة د هـ و قطرًا لدائرة د هـ و. وثلث المجتمع من ضرب م ن في دائرة ا ب جـ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة م. وثلث المجتمع من ضرب ز ن في دائرة ا ب جـ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة ز. فثلث المجتمع من ضرب م ز في دائرة ا ب جـ هو مساحة المخروط المستدير الأجوف الذي عليه ا م ب ز. وبمثل ذلك أيضًا نبيّن أن ثلث المجتمع من ضرب م ح في دائرة د هـ و هو مساحة المخروط المستدير الأجوف الذي عليه د م هـ ح. فثلث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مع ثلث المجتمع من ضرب م ز في فضل ما بين دائرتي د هـ و ا ب جـ هو مساحة فضلة المخروط المستدير الأجوف التي عليها ا ز ب هـ ح د. وأيضًا، فإنّا إذا جعلنا قطر دائرة ط ك ل خط ط ك، كان السطح المجتمع من ضرب ا ب في د هـ مساويًا لمربع خط ط ك، فنسبة ا ب إلى ط ك كنسبة ط ك إلى د هـ، ونسبة مربع خط ا ب إذًا إلى مربع خط ط ك كنسبة مربع ط ك إلى مربع خط د هـ وكنسبة ا ب إلى د هـ. ونسبة ا ب إلى د هـ كنسبة ا م إلى م د التي هي كنسبة ز م إلى م ح. فنسبة مربع خط ا ب إلى مربع خط ط ك كنسبة مربع خط ط ك إلى مربع خط د هـ وكنسبة ز م إلى م ح. فأما نسبة مربع خط ا ب إلى مربع خط ط ك فهي كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة ط ك ل؛ وأما نسبة مربع خط ط ك إلى مربع خط د هـ فهي كنسبة دائرة ط ك ل إلى دائرة د هـ و. فنسبة ز م إلى م ح كنسبة دائرة ا ب جـ إلى دائرة ط ك ل وكنسبة دائرة ط ك ل إلى دائرة د هـ و. فالمجتمع من ضرب ز م في زيادة دائرة د هـ و على دائرة ا ب جـ مساوٍ للمجتمع من ضرب ز ح في دائرتي ا ب جـ ط ك ل. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مشتركًا، كان المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د هـ و على دائرة ا ب جـ مع المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مساويًا للمجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث. فثلث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مع ثلث المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د هـ و على دائرة ا ب جـ مساوٍ لثلث المجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث. وقد كنا بيّنا أن ثلث

5 السطح: للسطح – 12 ا ز ب هـ ح د: ا ز ب ح هـ د – 18 نسبة: كنسبة – 20 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يد».

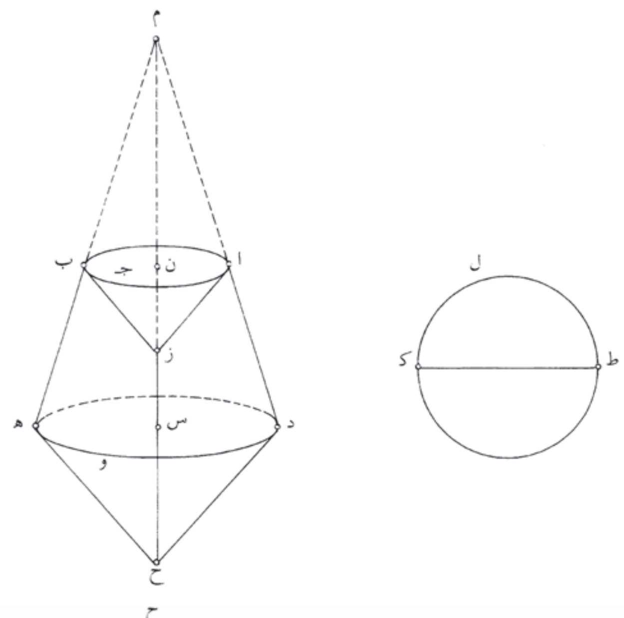
المجتمع من ضرب زح في دائرة د ه و مع ثلث المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د ه و على دائرة ا ب ج هو مساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها ا ز ب ه ح د. فمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها ا ز ب ه ح د مساوٍ لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر ا ب ج د ه و ط ك ل الثلاث؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

وقد تبيّن مع ذلك أن كل مخروط مستدير أجوف فإن مساحته مساوية لثلث المجتمع من ١٠٣ - و ضرب سهمه في دائرة قاعدة أسفله.

– يز – كلّ فضلة معين مجسم فإن مساحتها مساوية لثلث المجتمع من ضرب سهمها في ثلاث دوائر، إحداهن دائرة قاعدة أعلاها والأخرى دائرة قاعدة أسفلها والثالثة دائرة يكون مربع قطرها مساويًا للسطح المجتمع من ضرب قطر إحدى هاتين الدائرتين في قطر الدائرة الأخرى.

فليكن فضلة معين مجسم على دائرة قاعدة أعلاها ا ب ج وعلى دائرة قاعدة أسفلها د ه و وعلى سهمها زح، وليكن مربع قطر دائرة أخرى وهي دائرة ط ك ل مساويًا للسطح المجتمع من ضرب قطر دائرة ا ب ج في قطر دائرة د ه و.

فأقول: إن مساحة فضلة المعين المجسم التي عليها ا ز ب ه ح د مساوية لثلث المجتمع من ضرب زح في دوائر ا ب ج د ه و ط ك ل الثلاث.



8 إحداهن: احديهن – 9 هاتين: نهاىى.

برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا نقطة رأس المعينين المجسمين، اللذين نقص أحدهما من الآخر فبقيت الفضلة، المشتركة لهما نقطة م، وسهمهما م ن ز س ح، وأجزنا على سهم م ن ز س ح سطح د ا م ب هـ، كان د ا م ب هـ مثلثًا وكان ا ب الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ا ب جـ قطرًا لدائرة ا ب جـ، وكان د هـ – الذي هو الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة د هـ و – قطرًا لدائرة د هـ و. وثلث المجتمع من ضرب م ن في دائرة ا ب جـ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة م. وثلث المجتمع من ضرب ز ن في دائرة ا ب جـ هو مساحة المخروط المستدير الذي قاعدته دائرة ا ب جـ ورأسه نقطة ز. فثلث المجتمع من ضرب م ز في دائرة ا ب جـ هو مساحة المعين المجسم الذي عليه ا م ب ز. وبمثل ذلك أيضًا يتبيّن أن ثلث المجتمع من ضرب م ح في دائرة د هـ و هو مساحة المعين المجسم الذي عليه د م هـ ح. فثلث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مع ثلث المجتمع من ضرب م ز في فضل ما بين دائرتي د هـ و و ا ب جـ هو مساحة فضلة المعين المجسم التي عليها ا ز ب هـ ح د. ونبيّن كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا أن ثلث المجتمع من ضرب ز ح في دائرة د هـ و مع ثلث المجتمع من ضرب م ز في زيادة دائرة د هـ و على دائرة ا ب جـ مساوٍ لثلث المجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث. فمساحة فضلة / المعين المجسم التي عليها ا ز ب هـ ح د مساوية ١٠٣ – ظ لثلث المجتمع من ضرب ز ح في دوائر ا ب جـ د هـ و ط ك ل الثلاث؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

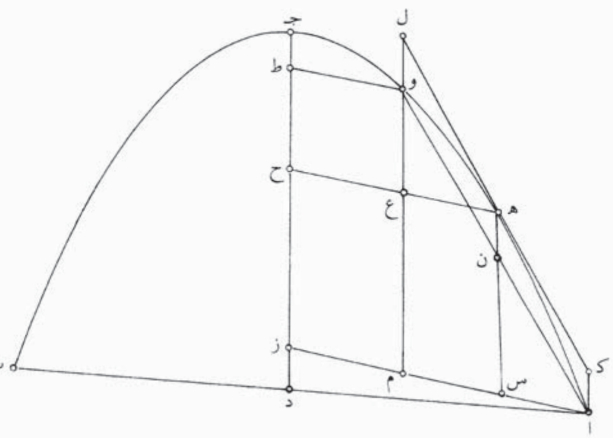
وقد تبيّن مع ذلك أن كل معين مجسم فإن مساحته مساوية لثلث المجتمع من ضرب سهمه في دائرة قاعدة أسفله.

– **يح** – إذا تعلمت على خط قطعة من القطع المكافئ ثلاث نقط في واحد من نصفي القطعة، وأخرجت منها إلى قطر القطعة خطوط متوازية، فكانت زيادات الخطوط المتوازية بعضها على بعض متساوية، ومن النقطة الوسطى من النقط الثلاث خط مماس للقطع، وأخرج من النقطتين الباقيتين خطان موازيان لقطر القطعة حتى لقيا الخط المماس، فإن ذينك الخطين متساويان، وكل واحد منها مساوٍ لنصف فضل ما بين الخطين اللذين تفصلها الخطوط المتوازية من قطر القطعة فيما بينها.

16 سهمه: كتب بعدها «في دائرة قاعدة أعلاه التي».

فليكن قطعة من قطع مكافئ عليها ا ب وعلى قطرها جـ د، ولنتعلم على خط القطع نقط ا هـ و الثلاث في نصف واحد من نصفي القطعة، ولنخرج منها إلى القطر خطوط ا ز هـ ح و ط المتوازية، ولتكن زيادة ا ز على هـ ح مساوية لزيادة هـ ح على و ط. وليمرّ بنقطة هـ خط مماس لقطع ا ب عليه ك هـ ل، وليخرج من نقطتي ا و خطان موازيان لخط جـ د عليها ا ك و ل وليلقيا خط ك هـ ل على نقطتي ك ل.

فأقول: إن خطي ا ك و ل متساويان وإن كل واحد منها مساوٍ لنصف فضل ما بين خطي ز ح ح ط.



برهان ذلك: أنّا إذا أخرجنا خط ل و على استقامة إلى م، وأخرجنا من نقطة هـ خطًا موازيًا لخط جـ د عليه هـ ن س، كان خطا و ط هـ ح مساويين لخطي م ز س ز، فخطا ا س س م متساويان لأن زيادة ا ز على هـ ح مساوية لزيادة هـ ح على و ط. وإذا وصلنا خط ا ن و، كانت نسبة ا س إلى س م كنسبة ا ن إلى ن و، فخط ا ن مساوٍ لخط ن و، وخط هـ ن س قطر من أقطار القطع للذي تبيّن في الشكل السادس والأربعين من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط. وقد قسم ا و بنصفين، وقد بيّن أبلونيوس في الشكل الخامس من المقالة الثانية من كتابه في المخروط أن ذلك إذا كان كذلك، فإن خط ا و موازٍ للخط الذي يماس القطع على نقطة هـ، فخط ا و موازٍ لخط ك ل. وخطوط ا ك ن هـ و ل متوازية، فهي إذًا متساوية. وخط ا ن مساوٍ لخط ن و، فخط ا ن نصف خط ا و، ولذلك يكون خط س ن مثل نصف خط و م. وخط و م

1 نقط: نقطه – 6 متساويان: مساويان / خطي: خط – 9 هـ ح: هـ س – 10 و ط: ز ط – 13 بيّن: تبين – 15 مساوٍ: مساويه.

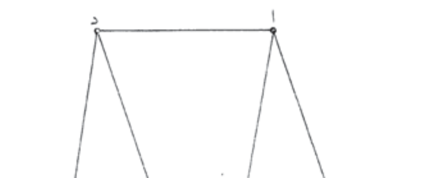
مساوٍ لخط ط ز، فخط ن س مثل نصف خط ط ز. وخط ه ن هو فضل ما بين خطي ه س ن س، فخط ه ن مساوٍ لفضل ما بين خط ه س ونصف خط ط ز. وخط ه س مساوٍ لخط ح ز، فخط ه ن مساوٍ لفضل ما بين ح ز ونصف خط ط ز. وفضل ما بين ح ز ونصف خط ط ز مساوٍ لنصف فضل ما بين خطي ز ح ح ط، فخط ه ن مساوٍ لنصف فضل ما بين خطي ز ح ح ط. وقد كنا بيّنا أن كل واحد من خطي ا ك و ل مساوٍ لخط ه ن، فخطا ا ك و ل متساويان وكل واحد منها مساوٍ لنصف فضل ما بين خطي ز ح ح ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إن كانت إحدى النقط الثلاث هي رأس القطعة كنقطة و والتي هي رأس القطعة التي قطرها و م، وكان ا م مثلي ه ع، فإن / خطي ا ك و ل متساويان وكل واحد منها ١٠٤ - و
مساوٍ لنصف فضل ما بين خطي م ع ع و.

〈يط〉 إذا كان سطحان متوازيا الأضلاع على قاعدة واحدة وفي جهة واحدة وفيما بين خطين متوازيين، وأثبت الخط الموازي لقاعدتها وأدير سائر أضلاعها، فإن المجسمين اللذين يحدثها السطحان بإدارتها متساويان.

فليكن سطحان متوازيا الأضلاع عليهما ا ب ج د ا ه و د على قاعدة واحدة وهي ا د وفي جهة واحدة وفيما بين خطي ا د ب و المتوازيين.

فأقول: إنه إذا أثبت خط ب و وأدير سائر أضلاع السطحين، كان المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ا ب ج د مساوٍ للمجسم الذي يحدث بإدارة سطح ا ه و د.



برهان ذلك: أن خطي ب ج ه و متساويان، لأنهما مساويان لخط ا د، وخط ج ه مشترك، فخط ب ه مساوٍ لخط ج و. وخط ا ب مساوٍ لخط ج د وخط ا ه مساوٍ لخط

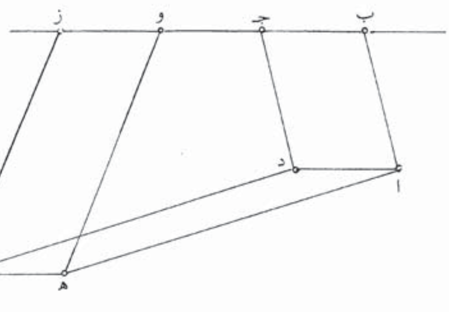
د و، فأضلاع مثلث ا ب هـ مساوية لأضلاع مثلث د جـ و وزواياه مساوية لزواياه. فالمجسم الذي يحدث – إذا أثبت ب هـ وأدير ضلعا مثلث ا ب هـ الباقيان – مساوٍ للمجسم الذي يحدث إذا أثبت جـ و وأدير ضلعا مثلث د جـ و الباقيان. وإذا نقصنا أحد هذين المجسمين – وهو الذي يحدث إذا أثبت ب هـ وأدير الضلعان الباقيان من مثلث ا ب هـ – من المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب و وأدير سائر أضلاع شكل ا ب و د، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط هـ و وأدير سائر أضلاع سطح ا هـ و د. وإذا نقصنا المجسم الآخر من المجسمين المتساويين اللذين ذكرنا – وهو الذي يحدث إذا أثبت خط جـ و وأدير الضلعان الباقيان من مثلث د جـ و – من المجسم بعينه الذي يحدث إذا أثبت خط ب و وأدير سائر أضلاع شكل ا ب و د، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع سطح ا ب جـ د. فالمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع سطح ا ب جـ د مساوٍ للمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط هـ و وأدير سائر أضلاع سطح ا هـ و د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– كـ – إذا كان سطحان متوازيا الأضلاع في سطح واحد وعلى قاعدتين متساويتين وفي جهة واحدة، وكانت قاعدتاهما على خط مستقيم، ووصل فيما بين أطراف الخطين الموازيين لقاعدتيها خطان، فحدث من ذلك سطح ثالث متوازي الأضلاع، وأثبت الخط الذي عليه قاعدتا السطحين الأولين، وأدير سائر أضلاع السطوح الثلاثة كهيئتها، فإن فضل ما بين المجسمين اللذين يحدثان بإدارة السطحين الأولين مساوٍ للطوق الذي يحدث بإدارة السطح الثالث.

فليكن سطحان متوازيا الأضلاع عليها ا ب جـ د هـ وز ح في سطح واحد وعلى قاعدتين متساويتين، وهما ب جـ وز اللذان على خط واحد، وليكن السطحان في جهة واحدة. وليوصل فيما بين أطراف خطي ا د هـ ح خطا ا هـ د ح، وليحدث من ذلك سطح متوازي الأضلاع وهو ا د ح هـ.

فأقول: إنه إذا أثبت خط ب ز وأدير سائر أضلاع سطوح ا ب جـ د هـ وز ح ا د ح هـ الثلاثة كهيئتها، كان فضل ما بين المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ا ب جـ د والمجسم الذي يحدث بإدارة سطح هـ وز ح مساويًا للطوق الذي يحدث / بإدارة سطح ا د ح هـ. ١٠٤ – ظ

8 وأدير: مطموسة – 9 سطح: مطموسة – 23 مساويًا: مساو.



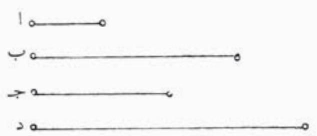
برهان ذلك: أن خطي ب جـ وز متساويان، وخط جـ و مشترك، فخطا ب و جـ ز متساويان، وخطا ا ب جـ د المتوازيان متساويان لأنها يصلان بين أطراف خطين متوازيين، وكذلك خطا هـ و ح ز وخطا هـ ا ح د. فأضلاع شكل ا ب و هـ مساوية لأضلاع شكل د جـ ز ح، وزواياه مساوية لزواياه لأن أضلاع الأشكال الثلاثة متوازية. فالجسم الذي يحدث – إذا أثبت خط ب و وأدير سائر أضلاع شكل ا ب و هـ – مساوٍ للمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط جـ ز وأدير سائر أضلاع شكل د جـ ز ح. وإذا نقصنا أحد هذين المجسمين – وهو الذي يحدث إذا أثبت خط ب و وأدير سائر أضلاع شكل ا ب و هـ – من المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب ز وأدير سائر أضلاع شكل ا ب ز ح هـ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط و ز وأدير سائر أضلاع سطح هـ و ز ح. وإذا نقصنا المجسم الآخر من المجسمين المتساويين اللذين ذكرنا – وهو الذي ‹يحدث› إذا أثبت خط جـ ز وأدير سائر أضلاع شكل د جـ ز ح – من المجسم بعينه الذي يحدث إذا أثبت خط ب ز وأدير سائر أضلاع شكل ا ب ز ح هـ، بقي المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع شكل هـ ا ب جـ د ح كهيئتها. فالمجسم الذي يحدث – إذا أثبت خط و ز وأدير سائر أضلاع سطح هـ و ز ح – مساوٍ للمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع شكل هـ ا ب جـ د ح كهيئتها. وإذا ألقينا منها جميعًا المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع سطح ا ب جـ د، بقي الطوق الذي يحدثه سطح ا د ح هـ المتوازي الأضلاع – إذا أثبت خط ب ز، وأدير سائر أضلاع سطوح ا ب جـ د هـ و ز ح هـ ا د ح الثلاثة – مساويًا لفضل ما بين المجسم الذي يحدث إذا أثبت خط و ز وأدير سائر أضلاع سطح هـ و ز ح والمجسم الذي يحدث إذا أثبت خط ب جـ وأدير سائر أضلاع سطح ا ب جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 ب جـ: ب جـ د – 6 هذين: هاذين – 17 مساويًا: مساوية.

– **كا** – إذا كانت أربعة خطوط، وكان الأول منها ثلث الثاني والثالث نصف الرابع، فإن المجسمات الكائنة من ضرب الأول في مربع الثالث، ومن ضرب الثاني في مربع الثالث وفي مربع الرابع وفي السطح المجتمع من ضرب الثالث في الرابع، إذا جمعت، ونقص منها المجسم الكائن من ضرب الأول والثاني في مربع الرابع، كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب الأول في مربع الرابع.

فليكن أربعة خطوط عليها ا ب جـ د، فليكن ا ثلث ب وجـ نصف د.

فأقول: إن المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط جـ، ومن ضرب ب في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د، إذا جمعت، ونقص منها المجسم الكائن من ضرب خطي ا ب في مربع خط د، كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب ا في مربع خط د.



برهان ذلك: أن خط جـ نصف خط د فمربعه ربع مربعه، وخط ا أيضًا ربع خطي ا ب مجموعين، فنسبة مربع خط جـ إلى مربع خط د كنسبة خط ا إلى خطي ا ب مجموعين. ولذلك يكون المجسم الكائن من ضرب ا في مربع خط د مساويًا للمجسم الكائن من ضرب خطي ا ب مجموعين في مربع خط جـ. وأيضًا، فإن نسبة السطح المجتمع من ضرب جـ في د إلى مربع خط د كنسبة جـ إلى د. ونسبة جـ إلى د أعظم من نسبة ا إلى ب، فنسبة السطح المجتمع من ضرب جـ في د إلى مربع خط د أعظم من نسبة ا إلى ب. ويكون لذلك المجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب جـ في د أعظم من المجتمع من ضرب ا في مربع خط د. وقد كنا بيّنا أن المجتمع من ضرب ا في مربع خط د مساوٍ للمجتمع من ⟨ضرب⟩ خطي ا ب مجموعين في مربع خط جـ. فالمجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب جـ في د مع / المجتمع من ١٠٥ – و
ضرب خطي ا ب في مربع خط جـ أعظم من المجتمع من ضرب ا في مربع خط د مرتين. ونجعل المجتمع من ضرب ب في مربع خط د مشتركًا، فيكون المجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب جـ في د مع المجتمع من ضرب خطي ا ب في مربع خط جـ ومع المجتمع من ضرب ب

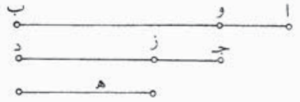
10 ربع (الأولى): نصف – 12 مساويًا: مساو – 14 المجتمع: المجسم.

في مربع خط د أعظم من المجتمع من ضرب ا في مربع خط د مرتين مع المجتمع من ضرب ب في مربع خط د. ولكن المجتمع من ضرب ا في مربع خط د مرتين مع المجتمع من ضرب ب في مربع خط د مساوٍ للمجتمع من ضرب خطي ا ب في مربع خط د مع المجتمع من ضرب ا في مربع خط د. فالمجتمع من ضرب ب في السطح المجتمع من ضرب جـ في د وفي مربعي خطي جـ د مع المجتمع من ضرب ا في مربع خط جـ أعظم من المجتمع من ضرب خطي ا ب في مربع خط د مع المجتمع من ضرب ا في مربع خط د. فيسقط منها جميعًا المجتمع من ضرب خطي ا ب في مربع خط د، فيكون الباقي – وهو المجسمات الكائنة من ضرب ا في مربع خط جـ ومن ضرب ب في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د منقوصًا منها المجسم الكائن من ضرب خطي ا ب في مربع خط د – أعظم من المجسم الكائن من ضرب ا في مربع خط د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كب** – كل ثلاثة أعداد متوالية، فإن المجتمع من ضرب أعظمها في أوسطها مساوٍ لمربع أصغرها مزيدًا عليه الأصغر ومثلا الأوسط.

فليكن ثلاثة أعداد متوالية عليها ا ب جـ د هـ وليكن أعظمها ا ب.

فأقول: إن المجتمع من ضرب ا ب في جـ د مساوٍ للمربع الكائن من هـ مزيدًا عليه عدد هـ ومثلا عدد جـ د.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا ب و مثل جـ د كان ا و واحدًا، والمجتمع من ضرب ا ب في ب و مساوٍ للمجتمع من ضرب ا و في و ب مع مربع عدد ب و. فأما المجتمع من ضرب ا و في و ب فهو و ب لأن ا و واحد، وأما مربع عدد و ب فهو مثل مربع عدد جـ د، فالمجتمع من ضرب ا ب في جـ د مساوٍ لمربع عدد جـ د مزيدًا عليه عدد جـ د. وأيضًا، فإنّا إذا جعلنا د ز مثل هـ كان جـ ز واحدًا، ومربع عدد جـ د مساوٍ للمجتمع من ضرب جـ د في د ز وفي جـ ز. والمجتمع من ضرب جـ د في د ز مساوٍ للمربع الكائن من د ز مزيدًا عليه المجتمع من ضرب د ز في ز جـ، فمربع عدد

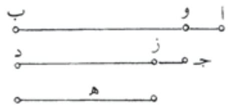
7 ضرب ب: هنا تبدأ الثلاث ورقات التي أعاد السجزي فيها كتابة جزء كبير من النص. وكما قلنا سنعتبرها بمثابة نسخة أخرى وسنرمز لها بحرف [م]. وهذا التكرار يبدأ في ورقة ١١٠–ظ إلى ١١٣–و – 15 ومثلا عدد جـ د: ناقصة [م].

جـ د مساوٍ للمجتمع من ضرب جـ ز في جـ د وفي د ز مع المربع الكائن من د ز. والمجتمع من ضرب جـ ز في جـ د وفي جـ د وفي د ز هو مثل جـ د ود ز، فمربع عدد جـ د مساوٍ للمربع الكائن من د ز مزيدًا عليه جـ د ود ز جميعًا. ولكن د ز مثل هـ ، فمربع عدد جـ د مساوٍ للمربع الكائن من هـ مع عددي جـ د هـ . وقد كنا بيّنا أن المجتمع من ضرب ا ب في جـ د مساوٍ لمربع عدد جـ د مزيدًا عليه عدد جـ د، فالمجتمع من ضرب ا ب في جـ د مساوٍ للمربع الكائن من هـ مزيدًا عليه عدد هـ ومثلا عدد جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كج** – كل ثلاثة أعداد متوالية، فإن مربع أعظمها مع مربع أصغرها مساوٍ للمجتمع من ضرب أعظمها وأصغرها في الأوسط منها مزيدًا على ذلك اثنان.

فليكن ثلاثة أعداد متوالية عليها ا ب جـ د هـ ، وليكن أعظمها ا ب.

فأقول: إن مربعي عددي ا ب هـ ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب ا ب وهـ في جـ د مزيدًا على ذلك اثنان.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا ب و مثل جـ د /كان ا و واحدًا، ومربع عدد ا ب مساوٍ للمجتمع ١٠٥ – ظ
من ضرب ا ب في ب و وفي ا و، فمربع عدد ا ب مساوٍ للمجتمع من ضرب ا ب في ب و مع المجتمع من ضرب ا ب في الواحد. فأما ب و فهو مثل جـ د، وأما المجتمع من ضرب ا ب في الواحد فهو مثل ا ب. فمربع عدد ا ب مساوٍ للمجتمع من ضرب ا ب في جـ د مع عدد ا ب.

وأيضًا، فإنّا إذا جعلنا د ز مثل هـ كان جـ ز واحدًا، والمجتمع من ضرب جـ د في د ز مساوٍ للمربع الكائن من د ز مع المجتمع من ضرب د ز في ز جـ. فأما ز جـ فهو الواحد. وأما د ز فهو مثل هـ ومربعه مثل مربعه، فالمجتمع من ضرب جـ د في هـ مساوٍ للمربع الكائن من هـ مع المجتمع من ضرب الواحد في هـ الذي هو مثل هـ . وقد كنا بيّنا أن مربع عدد ا ب مساوٍ للمجتمع من ضرب ا ب في جـ د مع عدد ا ب، فمربعا عددي ا ب هـ ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب ا ب وهـ في جـ د مع زيادة عدد ا ب على هـ . وزيادة عدد ا ب على هـ هي اثنان، لأن زيادات

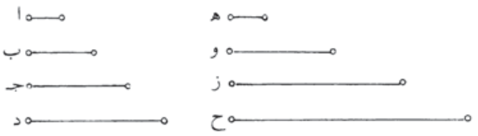
13 ا ب (الأولى): ناقصة [م] / وفي ا و ... ب و: مكررة [م] – 16-17 جـ د ... ضرب: في [م] فقط.

أعداد ا ب جـ د هـ بعضها على بعض، إذا أخذت على الولاء، هي واحدٌ واحد. فمربعا عددي ا ب هـ، إذا جمعا، مساويان للمجتمع من ضرب ا ب وهـ في جـ د مزيدًا على ذلك اثنان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كد** – إذا كانت أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وأخذت من الأعداد المتوالية ثلاثة أعداد على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط من الثلاثة في المجتمع من ضرب العدد الأصغر منها والعدد الأعظم في العدد الأوسط، وزيد على ما يجتمع مثلا المجتمع من ضرب الأوسط في الأعظم، فإن الذي يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب ذلك العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط، في مربع الأصغر وفي مربع الأعظم جميعًا مزيدًا على ذلك مثلا مربع الأصغر.

فليكن أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد عليها ا ب جـ د، وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها هـ و ز ح، وليؤخذ ثلاثة أعداد من أعداد ا ب جـ د على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي أعداد ب جـ د.

فأقول: إنه إن ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب ود في جـ وزيد على ما يجتمع مثلا المجتمع من ضرب جـ في د، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في مربعي عددي ب د مزيدًا عليه مثلا مربع عدد ب.



برهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د متوالية مبتدئة من الواحد، وإن أخذت أعداد بعدة أعداد ا ب جـ د، وكان كل واحد منها مثلي نظيره من أعداد ا ب جـ د، فإن الأعداد المأخوذة أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ويزيد كل واحد منها على نظيره من الأعداد الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد التي هي هـ و ز ح واحدًا. فمثلا عدد جـ أكثر من عدد ز، ويكون لذلك

6 للعدد: للعد [م] – 10-11 عليها ا ... الواحد: مكررة [م] – 12 ب جـ د: في الأصل كتبها ا ب جـ د، ثم ضرب على الألف بالقلم، وفي [م] أعاد كتابة ا ب جـ د دون أن يصححها – 13 إنه: في الهامش مع بيان موضعها.

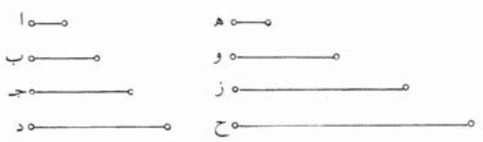
مثلا عدد جـ مزيدًا عليها عدد ب أكثر كثيرًا من عدد ز. وإذا جعلنا مربع عدد ب مشتركًا، كان عدد ب مع مثلي عدد جـ ومع مربع عدد ب أعظم من مربع عدد ب مع عدد ز. ولكن عدد ب مع مثلي عدد جـ ومع مربع عدد ب مساوٍ للمجتمع من ضرب جـ في د لأن أعداد ب جـ د متوالية. فالمجتمع من ضرب جـ في د أكثر من مربع عدد ب مزيدًا عليه عدد ز. ولذلك يكون مثلا المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من مثلي مربع عدد ب / مع مثلي عدد ز. ومثلا عدد ١٠٦ - و ز هو المجتمع من ضرب عدد ز في اثنين، فمثلا المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من مثلي مربع عدد ب مع المجتمع من ضرب عدد ز في اثنين. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب ود في جـ مشتركًا، كان المجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب ود في جـ مع مثلي المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في الاثنين وفي المجتمع من ضرب ب ود في جـ مع مثلي مربع عدد ب. ولكن المجتمع من ضرب ب ود في جـ مع الاثنين مساوٍ لمربعي عددي ب د لأن أعداد ب جـ د متوالية. فالمجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب ود في جـ مع مثلي المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في مربعي عددي ب د مع مثلي مربع عدد ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– كه – إذا كانت أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وأخذت من الأعداد المتوالية ثلاثة أعداد على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط منها في مربع الأصغر منها وفي مربع الأوسط وفي المجتمع من ضرب الأصغر في الأوسط، وزيد على ما اجتمع المجتمع من ضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأعظم من الثلاثة في مربع العدد الأعظم وفي مربع العدد الأوسط وفي المجتمع من ضرب الأوسط في الأعظم، فإن الذي يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط والعدد الفرد المقارن للعدد الأعظم مجموعين في مربعات الأعداد الثلاثة جميعًا.

فليكن أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد عليها ا ب جـ د، وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها هـ و ز ح، وليؤخذ ثلاثة أعداد من أعداد ا ب جـ د على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي أعداد ب جـ د.

3 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كب»، وأعاد كتابة الهامش في [م] أيضًا – 5-7 مثلي عدد ... ب مع: مكررة في [م] مع نقصان «من» (الثانية) سطر 6 وت عوضًا ب سطر 7 – 11 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كجـ» وكذلك في [م] – 16-17 منها وفي ... الأصغر: ناقصة [م].

فأقول: إنه إن ضرب عدد ز في مربعي عددي ب جـ وفي المجتمع من ضرب ب في جـ وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب ح في مربعي عددي جـ د وفي المجتمع من ضرب جـ في د، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عددي ز ح مجموعين في مربعات أعداد ب جـ د.



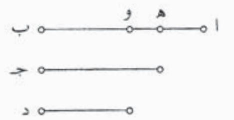
برهان ذلك: أن أعداد ا ب جـ د متوالية مبتدئة من الواحد، وأعداد هـ و ز ح أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فالمجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب ود في جـ، إذا زيد عليه مثلا المجتمع من ضرب جـ في د، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في مربعي عددي ب د مزيدًا عليه مثلا مربع عدد ب. فأما مثلا المجتمع من ضرب جـ في د فهو مثل المجتمع من ضرب الاثنين في المجتمع من ضرب جـ في د، وأما مثلا مربع عدد ب فهو مثل المجتمع من ضرب الاثنين في مربع عدد ب. فالمجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب في جـ مع المجتمع من ضرب عدد ز مزيدًا عليه اثنان في المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في مربع عدد د مع / المجتمع من ضرب عدد ز مع الاثنين في مربع عدد ب. ولكن ١٠٦ – ظ
عدد ح مساوٍ لعدد ز مع الاثنين لأن عددي ز ح فردان متواليان، فالمجتمع من ضرب عدد ز في المجتمع من ضرب ب في جـ مع المجتمع من ضرب عدد ح في المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز في مربع عدد د مع المجتمع من ضرب عدد ح في مربع عدد ب. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عدد ز في مربع عدد ب مع المجتمع من ضرب عدد ح في مربع عدد د مشتركًا، كان المجتمع من ضرب عدد ز في مربع عدد ب وفي المجتمع من ضرب ب في جـ مع المجتمع من ضرب عدد ح في المجتمع من ضرب جـ في د وفي مربع عدد د أكثر من المجتمع من ضرب عدد ز وعدد ح مجموعين في مربعي عددي ب د. وإذا جعلنا المجتمع من ضرب عددي ز ح في مربع عدد جـ مشتركًا، كان المجتمع من ضرب عدد ز في مربعي عددي ب جـ وفي المجتمع من ضرب ب في جـ مع المجتمع من ضرب عدد ح في مربعي عددي جـ د وفي المجتمع من ضرب جـ في د أكثر من المجتمع من ضرب عددي ز ح في مربعات أعداد ب جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

5 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كد»، وكذلك في [م].

– **كو** – كلّ ثلاثة أعداد متوالية، فإن المجتمع من ضرب أصغرها في أعظمها إذا زيد عليه واحد، كان المجتمع مساويًا لمربع العدد الأوسط.

فليكن ثلاثة أعداد متوالية عليها ا ب جـ د.

فأقول: إن المجتمع من ضرب ا ب في د مزيدًا عليه واحد مساوٍ لمربع عدد جـ.



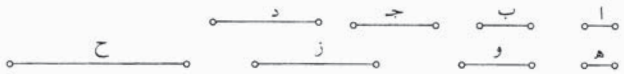
برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا ب ه مثل جـ وب و مثل د، كان كل واحد من ا ه ه و واحدًا، ومربع عدد ب ه مساوٍ للمربعين الكائنين من ب و وه مع المجتمع من ضرب ب و في وه مرتين. والمجتمع من ضرب ب و في وه مرتين مساوٍ للمجتمع من ضرب ب و في وا، فمربع عدد ب ه مساوٍ للمربعين الكائنين من ب و وه مع المجتمع من ضرب ب و في وا. فأما المجتمع من ضرب ب و في وا مع المربع الكائن من ب و فهو مثل المجتمع من ضرب ا ب في ب و، وأما المربع الكائن من وه فهو الواحد، فمربع عدد ب ه مساوٍ للمجتمع من ضرب ا ب في ب و مع الواحد. فأما ب و فهو مثل د وأما ب ه فهو مثل جـ، فالمجتمع من ضرب ا ب في د مزيدًا عليه واحد، مساوٍ لمربع عدد جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كز** – إذا كانت أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد وبعدتها أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وأخذت من الأعداد المتوالية ثلاثة أعداد على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأوسط من الثلاثة في مربع الأصغر منها وفي مربع الأوسط وفي المجتمع من ضرب الأصغر في الأوسط وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب العدد الفرد المقارن للعدد الأعظم من الثلاثة في مربع العدد الأعظم وفي مربع العدد الأوسط وفي المجتمع من ضرب الأعظم في الأوسط، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب العددين الفردين المقارنين للعدد الأوسط والعدد الأعظم مجموعين في مربع الأصغر وفي مربع الأعظم وفي المجتمع من ضرب الأصغر في الأعظم، فإن الباقي أكثر من فضل ما بين مربع الأعظم ومربع الأصغر. /

3 متوالية: مكررة في الأصل فقط – 19 للعدد: للعد.

فليكن أعداد أكثر من عددين متوالية مبتدئة من الواحد عليها آ بَ جَ دَ، وبعدتها أعداد ١٠٧ - و أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها عليها هَ وَ زَ حَ، وليؤخذ ثلاثة أعداد منها على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي أعداد بَ جَ دَ.

فأقول: إنه إن ضرب عدد زَ في مربعي عددي بَ جَ وفي المجتمع من ضرب بَ في جَ، وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب عدد حَ في مربعي عددي جَ دَ وفي المجتمع من ضرب جَ في دَ، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي زَ حَ مجموعين في مربعي عددي بَ دَ وفي المجتمع من ضرب بَ في دَ، فإن الباقي أكثر من فضل ما بين مربعي عددي دَ بَ.



برهان ذلك: أن أعداد آ بَ جَ دَ متوالية مبتدئة من الواحد، وأعداد هَ وَ زَ حَ أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، فإذا ضرب عدد زَ في مربعي عددي بَ جَ وفي المجتمع من ضرب بَ في جَ، وزيد على ما يكون من ذلك المجتمع من ضرب حَ في مربعي عددي جَ دَ وفي المجتمع من ضرب جَ في دَ، كان ما يجتمع أكثر من المجتمع من ضرب زَ حَ مجموعين في مربعات أعداد بَ جَ دَ. ولكن مربع عدد جَ مساوٍ للمجتمع من ضرب بَ في دَ مزيدًا عليه واحد لأن أعداد بَ جَ دَ متوالية، فالمجتمع من ضرب عدد زَ في مربعي عددي بَ جَ وفي المجتمع من ضرب بَ في جَ مزيدًا على ذلك المجتمع من ضرب عدد حَ في مربعي عددي جَ دَ وفي المجتمع من ضرب جَ في دَ أكثر من المجتمع من ضرب عددي زَ حَ مجموعين في مربعي عددي بَ دَ وفي المجتمع من ضرب بَ في دَ مع المجتمع من ضرب عددي زَ حَ في الواحد. وإذا ألقينا منها جميعًا ما يجتمع من ضرب عددي زَ حَ في مربعي عددي بَ دَ وفي المجتمع من ضرب بَ في دَ، كان المجتمع من ضرب عدد زَ في مربعي عددي بَ جَ وفي المجتمع من ضرب بَ في جَ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد حَ في مربعي عددي جَ دَ وفي المجتمع من ضرب جَ في دَ ونُقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي زَ حَ مجموعين في مربعي عددي بَ دَ وفي المجتمع من ضرب بَ في دَ، أكثرَ من المجتمع من ضرب عددي زَ حَ في الواحد الذي هو مثل زَ حَ مجموعين. ولكن عددي زَ حَ

6 زَ: نَ – 7 ضرب: كرر بعدها «عددي زَ حَ مجموعين في مربعي عددي بَ دَ»، ثم ضرب عليها بالقلم / دَ بَ: بَ دَ [م] – 9 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كَه» وكذلك في [م] – 12 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كَو» – 14 جَ (الثانية): ب ج، وكتبها أيضًا هكذا في [م] – 16 بَ ... ضرب: مكررة [م] – 18 جَ (الأولى): دَ، وكتبها أيضًا هكذا في [م] – 19 مما: ما، وهي صحيحة في [م].

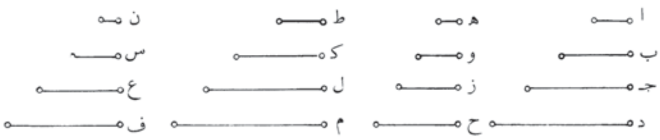
مجموعين مساويان لفضل ما بين مربعي عددي د ب، وذلك يتبيّن من الشكل الثالث من قولنا في مساحة القطع المكافئ. فالمجتمع من ضرب عدد ز في مربعي عددي ب ج وفي المجتمع من ضرب ب في ج إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ح في مربعي عددي ج د وفي المجتمع من ضرب ج في د ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي ز ح مجموعين في مربعي عددي ب د وفي المجتمع من ضرب ب في د، كان الباقي أكثر من فضل ما بين مربعي عددي د ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– **كح** – إذا كانت خطوط أكثر من خطين على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، ١٠٧ – ظ
وبعدتها خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، وكان الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية مساويًا للخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد، وأخذت ثلاثة خطوط من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب الخط المقارن للخط الأوسط من الثلاثة في مربع الخط الأصغر منها وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، وزيد على ما يجتمع المجتمع من ضرب الخط المقارن للخط الأعظم من الثلاثة في مربع الخط الأعظم وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب الخطين المقارنين للأوسط وللأعظم مجموعين في مربع الخط الأصغر وفي مربع الخط الأعظم وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في فضل ما بين مربع أعظم الخطوط الثلاثة ومربع أصغرها.

فليكن خطوط ا ب ج د على نسب أعداد ه و ز ح المتوالية المبتدئة من الواحد، وليكن بعدتها خطوط ط ك ل م مقارنة لها على نسب أعداد ن س ع ف الأفراد المتوالية المبتدئة من الواحد، وليؤخذ ثلاثة خطوط من خطوط ا ب ج د على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي ب ج د، وليكن ا مثل ط.

3 ب: ب ه، وكتبها أيضًا هكذا في [م] / في مربعي: هنا سيدرك السجزي أنه أعاد كتابة هذه الورقات فيتوقف، ويكتب «إلى هاهنا معاد». انظر السطر الأخير من ورقة ١١٣–و – 19 نسب: عليها علامة وبإزائها في الهامش «ع» للدلالة على موضع بلوغ القراءة – 21 خطوط (الثانية): الخطوط.

فأقول: إن المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ل م في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط ط في فضل ما بين مربعي خطي ب د.



برهان ذلك: أن نسب خطوط ا ب جـ د بعضها إلى بعض كنسب أعداد هـ و ز ح بعضها إلى بعض، ونسب خطوط ط ك ل م بعضها إلى بعض كنسب أعداد ن س ع ف بعضها إلى بعض. ونسبة ا إلى ط كنسبة هـ إلى ن لأن ا مثل ط، فنسبة كل واحد من خطوط ا ب جـ د إلى كل واحد من خطوط ط ك ل م كنسبة نظيره من أعداد هـ و ز ح إلى نظير الآخر من أعداد ن س ع ف. ولذلك يكون نسبة المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ إلى مكعب خط جـ كنسبة المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز إلى مكعب عدد ز. ولذلك أيضًا يكون نسبة المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د إلى مكعب خط جـ كنسبة المجتمع / ١٠٨ - و من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح إلى مكعب عدد ز. وإذا جمعنا، كانت نسبة المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د إلى مكعب خط جـ كنسبة المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح إلى مكعب عدد ز.

وكذلك أيضًا نبيّن أن نسبة المجتمع من ضرب خطي ⟨ل م مجموعين في مربعي خطي⟩ ب د وفي المجتمع من ضرب ب في د إلى مكعب خط د كنسبة المجتمع من ضرب عددي ع ف

10 ولذلك: ويكون لذلك – 18 و ز: هد / ف: و.

مجموعين في مربعي عددي و ح وفي المجتمع من ضرب و في ح إلى مكعب عدد ح. ونسبة مكعب خط د إلى مكعب خط جـ كنسبة مكعب عدد ح إلى مكعب عدد ز. ففي نسبة المساواة، يكون نسبة المجتمع من ضرب خطي ل م مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د إلى مكعب خط جـ كنسبة المجتمع من ضرب عددي ع ف مجموعين في مربعي عددي و ح وفي المجتمع من ضرب و في ح إلى مكعب عدد ز. وقد كنا بيّنا أن نسبة المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د إلى مكعب خط جـ كنسبة المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح إلى مكعب عدد ز. فنسبة زيادة المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د على المجتمع من ضرب خطي ل م مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د إلى مكعب خط جـ، كنسبة زيادة المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح على المجتمع من ضرب عددي ع ف مجموعين في مربعي عددي و ح وفي المجتمع من ضرب و في ح إلى مكعب عدد ز. ونسبة مكعب خط جـ إلى المجتمع من ضرب ط في فضل ما بين مربعي خطي ب د كنسبة مكعب عدد ز إلى المجتمع من ضرب ن في فضل ما بين مربعي عددي و ح، لأن نسبة القاعدة وهي مربع خط جـ إلى القاعدة وهي فضل ما بين / مربعي خطي ب د كنسبة القاعدة وهي مربع عدد ز إلى القاعدة ١٠٨ – ظ
وهي فضل ما بين مربعي عددي و ح، ونسبةَ الارتفاع وهو خط جـ إلى الارتفاع وهو خط ط كنسبة الارتفاع وهو عدد ز إلى الارتفاع وهو ن. ففي نسبة المساواة، يكون نسبة المجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ل م مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من

7 مربعي: مربع – 9 ح (الثانية): ع – 18 لأن: ولأن – 20 ونسبة: وضع على الواو علامة وكتب بإزائها في الهامش «بلغ»، أي موضع بلوغ القراءة – 24 ب (الأولى والثانية): جـ.

ضرب ب في د إلى المجتمع من ضرب خط ط في فضل ما بين مربعي خطي ب د، كنسبة المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح ونُقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي ع ف مجموعين في مربعي عددي و ح وفي المجتمع من ضرب و في ح إلى المجتمع من ضرب ن في فضل ما بين مربعي عددي و ح. ولكن المجتمع من ضرب عدد ع في مربعي عددي و ز وفي المجتمع من ضرب و في ز، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب عدد ف في مربعي عددي ز ح وفي المجتمع من ضرب ز في ح، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب عددي ع ف مجموعين في مربعي عددي و ح وفي المجتمع من ضرب و في ح، كان الباقي أكثر من المجتمع من ضرب ن في فضل ما بين مربعي عددي و ح، لأن ⟨ن⟩ واحد والمجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي عددي و ح هو مثل فضل ما بين هذين المربعين. فالمجتمع من ضرب خط ل في مربعي خطي ب ج وفي السطح المجتمع من ضرب ب في ج، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط م في مربعي خطي ج د وفي السطح المجتمع من ضرب ج في د، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ل م مجموعين في مربعي خطي ⟨ب د وفي السطح المجتمع من ضرب⟩ ب في د، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب ط في فضل ما بين مربعي خطي ب د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

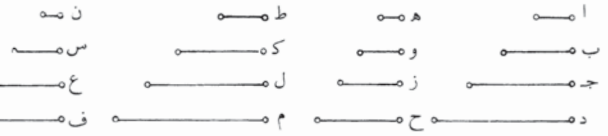
– **كط** – إذا كانت خطوط أكثر من خطين على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، وبعدتها خطوط على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد مقارنة لها، ولم يكن الخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية مساويًا للخط الأصغر من الخطوط التي على نسب الأفراد، وأخذت ثلاثة خطوط من الخطوط التي على نسب الأعداد المتوالية على الولاء، أي ثلاثة كانت، وضرب الخط المقارن للخط الأوسط من الثلاثة في مربع الخط الأصغر منها وفي مربع الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، وزيد على ما يجتمع المجتمع من ضرب الخط المقارن للخط الأعظم من الثلاثة في مربع الخط الأعظم / وفي مربع ١٠٩ - و
الخط الأوسط وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب الخطين المقارنين – الأوسط والأعظم مجموعين – في مربع الخط الأصغر وفي مربع الخط

2 ع : ع ف – 3 عددي: عدد – 4 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كز» – 6 ف : ب – 10 هذين: هاذين / ب : د.

الأعظم وفي السطح المجتمع من ضرب أحدهما في الآخر، فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب أصغر الخطوط التي على نسب الأعداد الأفراد في فضل ما بين مربع أعظم الخطوط الثلاثة ومربع أصغرها.

فلتكن خطوط ا ب جـ د على نسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، ولتكن بعدتها خطوط مقارنة لها على نسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها هـ و ز ح ، ولا يكونن ا مثل هـ ، وليؤخذ ثلاثة خطوط من خطوط ا ب جـ د على الولاء، أي ثلاثة كانت، وهي ب جـ د .

فأقول: إن المجتمع من ضرب خط ز في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب ح في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د ؛ ونقص مما يجتمع من ضرب خطي ز ح في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط هـ في فضل ما بين مربعي خطي ب د.



برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا خط ط مثل خط هـ ، وجعلنا نسب خطوط ط ك ل م بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط ا ب جـ د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كانت نسب خطوط ط ك ل م بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد متوالية مبتدئة من الواحد، وخط هـ مساويًا لخط ط . فالمجتمع من ضرب خط ز في مربعي خطي ك ل ، وفي السطح المجتمع من ضرب ك في ل ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب خط ح في مربعي خطي ل م وفي السطح المجتمع من ضرب ل في م ، ونُقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ك م وفي السطح المجتمع من ضرب ك في م ، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب خط هـ في فضل ما بين مربعي خطي ك م . ونسبة فضل ما بين مربعي خطي ب د إلى فضل ما بين مربعي خطي ك م كنسبة مربع خط ب إلى مربع خط ك ، لأن نسب خطوط ط ك ل م بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب خطوط ا ب جـ د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء. فنسبة المجتمع من ضرب خط هـ

17 خطي: خط – 19 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كح».

في فضل ما بين مربعي خطي ب د إلى المجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي ك م كنسبة مربع خط ب إلى مربع خط ك. ونسبة مربع خط ب إلى مربع خط ك كنسبة مربع خط ج إلى مربع خط ل وكنسبة مربع خط د إلى مربع خط م وكنسبة السطح المجتمع من ضرب ب في ج إلى السطح المجتمع من ضرب ك في ل وكنسبة السطح المجتمع من ضرب ج في د إلى السطح المجتمع من ضرب ل في م وكنسبة السطح المجتمع من ضرب ب في د إلى السطح المجتمع من ضرب ك في م. فنسبة السطح المجتمع من ضرب ه في فضل ما بين مربعي خطي ب د إلى السطح المجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي ك م كنسبة / ١٠٩ – ظ مربعي خطي ب ج والسطح المجتمع من ضرب ⟨ب في ج إلى مربعي خطي ك ل والسطح المجتمع من ضرب⟩ ك في ل وكنسبة مربعي خطي ج د والسطح المجتمع من ضرب ج في د إلى مربعي خطي ل م والسطح المجتمع من ضرب ل في م وكنسبة مربعي خطي ب د والسطح المجتمع من ضرب ب في د إلى مربعي خطي ك م والسطح المجتمع من ضرب ك في م. وكل خط مضروب في سطحين، فإن نسبة الجسم المجتمع من ضربه في أحدهما إلى ⟨الجسم⟩ المجتمع من ضربه في الآخر كنسبة أحد السطحين إلى الآخر. فنسبة المجتمع من ضرب ه في فضل ما بين مربعي خطي ب د إلى المجتمع من ضربه في فضل ما بين مربعي خطي ك م كنسبة المجتمع من ضرب خط ز في مربعي خطي ب ج وفي السطح المجتمع من ضرب ب في ج إلى المجتمع من ضرب خط ز أيضًا في مربعي خطي ك ل ⟨وفي السطح المجتمع من ضرب ك في ل⟩ وكنسبة المجتمع من ضرب خط ح في مربعي خطي ج د وفي السطح المجتمع من ضرب ج في د إلى المجتمع من ضرب خط ح أيضًا في مربعي خطي ل م وفي السطح المجتمع من ضرب ل في م وكنسبة المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د إلى المجتمع من ضرب خطي ز ح أيضًا في مربعي خطي ك م وفي السطح المجتمع من ضرب ك في م. فإذا أخذنا المجتمع من ضرب ز في مربعي خطي ب ج وفي السطح المجتمع من ضرب ب في ج، فزدنا عليه المجتمع من ضرب ح في مربعي خطي ج د وفي السطح المجتمع من ضرب ج في د، ونقصنا مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د، كانت نسبة الباقي ⟨إلى⟩ الذي يبقى، إذا أخذنا المجتمع من ضرب ز في مربعي خطي ك ل وفي السطح المجتمع من ضرب ك في ل، وزدنا عليه المجتمع من ضرب ح في مربعي

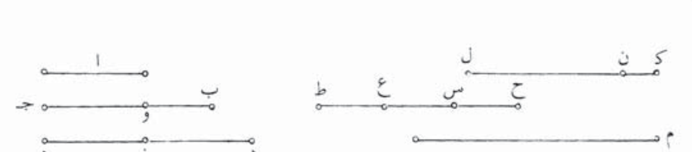
11 مضروب: مضرب – 24 يبقى: يبقا.

خطي ل م وفي السطح المجتمع من ضرب ل في م، ونقصنا مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ك م وفي السطح المجتمع من ضرب ك في م، كنسبة المجتمع من ضرب هـ في فضل ما بين مربعي خطي ب د إلى المجتمع من ضرب هـ في فضل ما بين مربعي خطي ك م. وإذا بدلنا كانت أيضًا متناسبة. وقد كنا بيّنا أن المجتمع من ضرب ز في مربعي خطي ك ل وفي السطح المجتمع من ضرب ك في ل، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب ح في مربعي خطي ل م وفي السطح المجتمع من ضرب ل في م، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ك م وفي السطح المجتمع من ضرب ك في م، كان ما يبقى أعظم من المجتمع من ضرب هـ في فضل ما بين مربعي خطي ك م. فالمجتمع من ضرب ز في مربعي خطي ب جـ وفي السطح المجتمع من ضرب ب في جـ، إذا زيد عليه المجتمع من ضرب ح في مربعي خطي جـ د وفي السطح المجتمع من ضرب جـ في د، ونقص مما يجتمع المجتمع من ضرب خطي ز ح مجموعين في مربعي خطي ب د وفي السطح المجتمع من ضرب ب في د، كان الباقي أعظم من المجتمع من ضرب هـ في فضل ما بين مربعي خطي ب د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– **ل** – إذا كانت ثلاثة مقادير، وكان لكل واحد منها نسبة إلى صاحبيه، وكان الأول ١١٠ - و
أصغرها والثالث أعظمها، فقد يمكن أن يوجد مقادير متوالية على نسبة الأول إلى الثاني مبتدئة من الأول ومنتهية إلى مقدار أعظم من الثالث.

فليكن الثلاثة المقادير التي لكل واحد منها نسبة إلى صاحبيه مقادير ا ب جـ د هـ، وليكن أصغرها ا وأعظمها د هـ.

فأقول: إنه قد يمكن أن توجد مقادير متوالية على نسبة ا إلى ب جـ مبتدئة من ا منتهية إلى مقدار أعظم من د هـ.



1 خطي (الأولى): خط – 15 فقد: قد – 17 مقادير ا ب جـ د هـ: مكررة – 20 د هـ: محه.

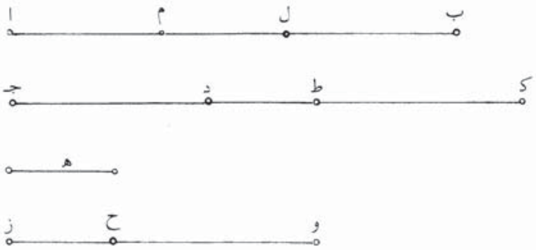
برهان ذلك: أنّا إذا جعلنا زيادة مقدار ب ج على مقدار ا بمقدار ب و وزيادة مقدار د ه على مقدار ا بمقدار د ز، كان لمقدار ب و نسبة إلى مقدار د ز، فقد يمكن بكثرة تضاعيفه أن يكون زائدًا عليه. فإذا جعلنا أضعافه الزائدة على مقدار د ز في مقدار ح ط، وجعلنا نسبة ك ل إلى ب ج كنسبة ب ج إلى ا وكنسبة م إلى ك ل، ولم نزل نفعل مثل ذلك حتى يكون عدّة مقادير ب ج ك ل م كعدّة ما في مقدار ح ط من أمثال ب و، وقسمنا ح ط بأمثال ب و، وهي أقسام ح س س ع ع ط؛ وجعلنا ك ن مثل زيادة ك ل على ب ج، كانت نسبة ا إلى ب ج كنسبة ب ج إلى ك ل، وإذا نقصنا الأصغرين من الأعظمين، كانت نسبة الباقي، وهو ب و، إلى الباقي، وهو ك ن، كنسبة ا إلى ب ج. ومقدار ا أصغر من مقدار ب ج، فمقدار ك ن، الذي هو زيادة ك ل على ب ج، أعظم من مقدار ب و الذي هو زيادة ب ج على ا. وكذلك أيضًا نبيّن أن زيادة م على ك ل أكثر من زيادة ك ل على ب ج وأكثر كثيرًا من زيادة ب ج على ا. فأما ب و الذي هو زيادة ب ج على ا فهو مثل ح س؛ وأما كل واحدة من زيادتي ك ل على ب ج وم على ك ل فهي أكثر من كل واحد من س ع ع ط. وعدة الزيادات كعدة أقسام خط ح ط. وإذا جمعنا، كانت زيادة م على ا أكثر من ح ط. ولكن ح ط أكثر من د ز، فزيادة م على ا أكثر كثيرًا من د ز، ومقدار ا مثل مقدار ز ه، فزيادة مقدار م على مقدار ا مع مقدار ا أكثر من مقدار د ه. وزيادة مقدار م على مقدار ا مع مقدار ا مثل مقدار م، فمقدار م أعظم من مقدار د ه. ومقادير ا ب ج ك ل م متوالية على نسبة ا إلى ب ج؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– لا – إذا كان مقداران، وكان أحدهما أصغر من الآخر، وكان أيضًا مقداران آخران أحدهما أصغر من المقدار الأعظم من المقدارين الأولين، 〈ونُقص من المقدار الأعظم من المقدارين الأولين〉 مقدار نسبته إليه ليست بأقلّ من نسبة أصغر المقدارين الآخرين إلى أعظمهما، ونقص من الباقي مقدار نسبته أيضًا إلى ذلك الباقي ليست بأقلّ من نسبة أصغر المقدارين الآخرين إلى أعظمهما، ثم لم يزل يفعل بما يبقى مثل هذا الفعل، فإنه سيبقى من المقدار الأعظم ما هو أقلّ من الأصغر. /

فليكن مقداران عليهما ا ب ج د، 〈وليكن ا ب أعظم من ج د، وليكن مقداران آخران ١١٠ – ظ
عليهما ه وز〉 وليكن ه أصغر من وز 〈وليكن وز أصغر من ا ب〉.

6 ك ن: ك ف – 8 ك ن: ك ف / ك ن: ك ف – 17 الآخر: الاصغر – 18 المقدارين: المقادير.

فأقول: إنه إن نقص من اب مقدار نسبته إليه ليست بأقلّ من نسبة ه إلى وز، 〈ونقص〉 مما يبقى منه مقدار نسبته إليه ليست بأقل من هذه النسبة، ثم لم يزل يفعل بما يبقى مثل هذا الفعل، فإنه سيبقى من اب مقدار أصغر من مقدار جد.



برهان ذلك: أنّا إذا فصلنا من وز مثل ه، وهو حز، وجعلنا نسبة طد إلى دج كنسبة زح إلى حو، فإن جط إما أن يكون أعظم من اب وإما ألاّ يكون أعظم منه. فإن كان أعظم منه، 〈فنسبة اب إلى جد أقلّ من نسبة جط إلى جد. ولكن نسبة جط إلى جد كنسبة وز إلى وح، فنسبة اب إلى جد أقلّ من نسبة وز إلى وح. فإذا جعلنا نسبة بل إلى اب كنسبة زح إلى زو، كانت نسبة اب إلى ال كنسبة وز إلى وح، فنسبة اب إلى جد أقلّ من نسبة اب إلى ال، فيكون ال أقلّ من جد، وذلك ما أردنا〉.

وإلاّ فإن لمقادير اب جط جد بعضها إلى بعض نسبة، وأعظمها اب وأصغرها جد، فقد يمكن أن توجد مقادير متوالية على نسبة جد إلى جط مبتدئة من جد منتهية إلى مقدار أعظم من اب. فإذا جعلنا هذه المقادير مقادير جد جط جك، كانت نسبة طد إلى دج كنسبة كط إلى طج وكنسبة زح إلى حو. وإذا جعلنا نسبة بل / إلى با ليست بأقلّ من نسبة ه ١١٤ - و
إلى وز، وكذلك نسبة لم إلى ال ولم نزل نفعل مثل ذلك حتى تكون عدّة أقسام بل لم ما كعدّة خطوط كط طد دج، لم يكن نسبة بل إلى با بأقلّ من نسبة ه إلى وز، وه مثل زح. وإذا فصلنا، لم يكن نسبة بل إلى ال بأقلّ من نسبة زح إلى حو. ونسبة زح إلى حو كنسبة كط إلى طج، فنسبة بل إلى ال ليست بأقلّ من نسبة كط إلى طج. وكذلك أيضًا نبيّن أن نسبة لم إلى ما ليست بأقل من نسبة طد إلى دج. ومن ذلك يتبيّن أن نسبة

11 مقادير: مقاير؛ ونجد إزاء هذا السطر في الهامش «في ل» – 13 ب ل: كرر بعدها نهاية شكل كا وأشكال كب، كج، كد، كه، كو كز، ولكنه تنبه وأشار إلى أنها معادة، وهي من ١١٠–ظ إلى ١١٣–و، و١١٣–ظ صفحة بيضاء / ب ا: م ا.

ب م إلى م ا ليست بأقل من نسبة ك د إلى د جـ. * وإذا ركبنا، لم يكن نسبة ب ا إلى ا م بأقل من نسبة ك جـ إلى جـ د. وإذا بدلنا، لم يكن نسبة ب ا إلى ك جـ بأقل من نسبة ا م إلى جـ د، فهي إما مثلها وإما أعظم منها. فإن كانت مثلها، وقد كان ب ا أصغر من ك جـ، فإن ا م الباقي من ا ب أصغر من جـ د وهو الذي أردنا.

وإن كانت أعظم منها، فهي كنسبة مقدار أعظم من ا م إلى مقدار جـ د، فليكن ذلك المقدار ا ن، فيكون ا ن أصغر من جـ د لأن نسبته إليه كنسبة ا م إلى جـ ك، فمقدار ا م الباقي من ا ب أصغر كثيرًا من جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **لب** – إذا أخرج في قطعة من القطع المكافئ قطرها، وأخرج في أحد نصفيها خطوط ترتيب على ذلك القطر، فكانت نسب أقسام القطر التي تقسمه بها خطوط الترتيب بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد بعضها إلى بعض، وكان أصغر تلك الأقسام القسم الذي يلي رأس القطع، ووصلت فيما ⟨بين⟩ أطراف خطوط الترتيب التي في جهة واحدة وفيما بين رأس القطع أيضًا وطرف الخط الأصغر من خطوط الترتيب التي أخرجت خطوطٌ مستقيمة، فحدث في القطع شكل مستقيم الأضلاع يحوط به نصف القطعة من القطع، وأثبت قطر تلك القطعة من القطع، وأدير سائر أضلاع الشكل الذي في نصفها من موضع ما حتى يعود إلى موضعه الذي منه بدأ، فالمجسّم الذي يحويه ذلك الشكل أقلّ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة هذا الشكل – إن كانت قاعدته دائرة – أو قاعدة أسفله – إن كان أسفله بسيط مخروط مستدير – وارتفاعها مساوٍ لقطر تلك القطعة من القطع بمثل ثلثي المجسّم الكائن من ضرب قطر القطعة في الدائرة التي قطرها العمود الواقع من الطرف الذي على خط القطع من طرفي أصغر خطوط الترتيب التي أخرجت في القطع على قطر القطع.

فليكن نصف قطعة من القطع المكافئ عليها ا ب جـ، وعلى قطر القطعة ب جـ، وليكن في نصف هذه القطعة خطوط ترتيب على قطر ب جـ عليها د هـ وز ا جـ، وليكن نسب خطوط ب هـ هـ ز ز جـ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد عليها ح ط ك، وليكن أصغرها ب هـ، ونصل خطوط ا و و د د ب.

1 * يبدو لنا أن في هذا المكان فقرة ناقصة تتضمن البرهان؛ ولقد فضلنا عدم التدخل في النص وكملنا البرهان في الشرح / ب ا: م ا – 2 ب ا: م ا – 3 ب ا: م ا – 8 أخرج (الأولى): خرج – 13 يحوط: يحط – 22 ب هـ: ب د.

فأقول: إنه إذا أثبت خط ب ج، وأدير سائر أضلاع شكل ج ا و د ب من موضع / ما حتى ١١٤ – ظ تعود إلى الموضع الذي منه بدأت، فإن المجسّم الذي يحويه هذا الشكل أقلّ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة هذا المجسم، إن كان أسفله دائرة، أو دائرة قاعدة أسفله إن كان أسفله بسيط مخروط مستدير، وارتفاعها مساوٍ لخط ب ج بمثل ثلثي المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها العمود الواقع من نقطة د على قطر ب ج.

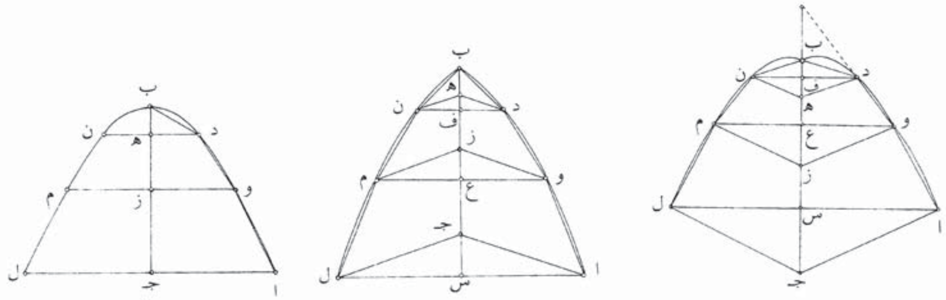
برهان ذلك: إن نسبة مربع خط و م إلى الدائرة التي قطرها و م كنسبة مربع خط ا ل إلى الدائرة التي قطرها ا ل وكنسبة السطح المجتمع من ضرب و م في ا ل إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل وكنسبة مربع خط د ن إلى الدائرة التي قطرها د ن ⟨وكنسبة السطح المجتمع من ضرب و م في د ن إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في د ن⟩. فثلث المجسمات الكائنة من ضرب ب ه في الدائرة التي قطرها د ن، ومن ضرب ه ز في الدائرتين اللتين قطراهما خطا د ن و م، وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب د ن في و م، ومن ضرب ز ج في الدائرتين اللتين قطراهما خطا و م ا ل، وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل، مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها د ه، مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها ا ل.

فأما ثلث المجسم الكائن من ضرب ب ه في الدائرة التي قطرها د ن، فهو مساوٍ لمساحة المخروط المستدير الذي قاعدته الدائرة التي قطرها د ن وارتفاعه خط ب ه. وأما ثلث المجسم الكائن من ضرب ه ز في الدائرتين اللتين قطراهما خطا د ن و م وفي التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب د ن في و م، فهو مساوٍ لفضلة المخروط المستدير التي قاعدتها الدائرة التي قطرها خط و م وسطح أعلاها الدائرة التي قطرها خط د ن. وأما ثلث المجتمع من ضرب ز ج في الدائرتين اللتين قطراهما خطا و م ا ل وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل، فهو مساوٍ لفضلة المخروط المستدير التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا ل وسطح أعلاها الدائرة التي قطرها و م. ⟨والمجسم⟩ الذي ذكرنا من المخروط وفضلتي المخروطين المستديرين، إذا جمع، مساوٍ للمجسم الذي يحدث، إذا أثبت خط ب ج، وأدير سائر أضلاع شكل ج ا و د ب. فهذا المجسم مع ثلثي المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها خط د ه مساوٍ لنصف

2 بدأت: بدت – 6 و م: م / الدائرة التي قطرها و م: ضرب د ن في و م – 8 د ن: د ه / د ن: د ه – 17 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يه» – 20 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يه».

المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا ل وارتفاعه ب ج. وهذا المجسم هو الأسطوانة التي قاعدتها – الدائرة التي قطرها ا ل – وارتفاعها ب ج. فالمجسم الذي يحدث، إذا أثبت خط ب ج، وأدير سائر أضلاع شكل ج ا و د ب من موضع ما حتى يعود إلى ذلك الموضع، أقلُّ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا ل، وارتفاعها خط ب ج، بمثل ثلثي المجسم الذي يكون من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها د هـ الذي هو عمود على ب ج.

وأيضًا، فإذا لا نجعل / خطوط الترتيب أعمدة على قطر ب ج – ولتكن الأعمدة التي تخرج ١١٥ - و
من نقط ا و د إلى السهم أعمدة ا س و ع د ف كما في الصورة الثانية والثالثة – فإذا وصلنا خطوط ل س م ع ن ف، كانت خطوط ا س ل و ع م د ف ن خطوطًا مستقيمة وزاويتا د ف هـ و ع ز متساويتان لأنهما قائمتان. وخط د هـ موازٍ لخط و ز، فزاوية د هـ ف مساوية لزاوية و ز ع، وتبقى زاوية ف د هـ من مثلث هـ د ف مساوية لزاوية ز و ع من مثلث ع و ز. فمثلثا هـ د ف ع و ز متشابهان، ويكون لذلك نسبة د هـ إلى و ز كنسبة د ف إلى و ع. وبمثل ذلك أيضًا يتبيّن أن نسبة و ز إلى ا ج كنسبة و ع إلى ا س. ونسب خطوط د هـ و ز ا ج بعضها إلى بعض كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وخط د ن مثلا خط د ف وخط و م مثلا خط و ع وخط ا ل مثلا خط ا س، فنسب خطوط د ن و م ا ل بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين، ونسب خطوط ب هـ هـ ز ز ج بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فثلث المجتمع من ضرب ب هـ في مربع ⟨خط د ن، ومن ضرب هـ ز في مربعي⟩ خطي د ن و م وفي السطح المجتمع من ضرب د ن في و م، ومن ضرب ز ج في مربعي خطي و م ا ل وفي السطح المجتمع من ضرب و م في ا ل مع ثلثي المجتمع من ضرب ب ج في مربع نصف خط د ن الذي هو د ف، مساوٍ



الأولى — الثانية — الثالثة

7 د ف: د ب – 10 ف د هـ: ب د هـ / هـ د ف: هـ د ن / هـ د ف: هـ د ب – 16 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في ب يجـ».

لنصف المجتمع من ضرب ب ج في مربع خط ا ل. ونسبة مربع خط د ن إلى الدائرة التي قطرها د ن كنسبة مربع خط و م إلى الدائرة التي قطرها و م وكنسبة السطح المجتمع من ضرب د ن في و م إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب د ن في و م وكنسبة مربع خط ا ل إلى الدائرة التي قطرها ا ل وكنسبة السطح المجتمع من ضرب و م في ا ل إلى الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل وكنسبة مربع خط د ف إلى الدائرة التي قطرها د ف. فثلث المجسمات الكائنة من ضرب ب ه في الدائرة التي قطرها د ن، ومن ضرب ه ز في الدائرتين اللتين قطراهما د ن و م وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب د ن في و م، ومن ضرب ز ج في الدائرتين اللتين قطراهما خطا و م ا ل وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل، مع ثلثي المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها د ف، مساوٍ لنصف المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها ا ل. فأما ثلث المجتمع من ضرب ب ه في الدائرة التي قطرها د ن، فهو مساوٍ لمساحة المخروط الأجوف الذي عليه د ب ن ه من الصورة الثانية ولمساحة المجسم الذي عليه أيضًا د ب ن ه من الصورة الثالثة، الذي هو إما معين مجسم وإما مخروط أجوف. وأما ثلث المجتمع من ضرب ه ز في الدائرتين اللتين قطراهما د ن و م وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب د ن في و م فهو مساوٍ لمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها / د ه ن م ز و من الصورة الثانية، ظ – ١١٥ ولمساحة المجسم الذي عليه أيضًا د ه ن م ز و من الصورة الثالثة، الذي هو إما فضلة معين مجسم وإما فضلة مخروط أجوف. ⟨وأما ثلث المجتمع من ضرب ز ج في الدائرتين اللتين قطراهما و م ا ل وفي الدائرة التي مربع قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و م في ا ل فهو مساوٍ لمساحة فضلة المخروط الأجوف التي عليها و ز م ل ج ا من الصورة الثانية، ولمساحة المجسم الذي عليه أيضًا و ز م ل ج ا من الصورة الثالثة الذي هو إما فضلة معين مجسم وإما فضلة مخروط أجوف.⟩ وأما المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها ا ل فهو مساوٍ للأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا ل وارتفاعها ب ج. فيكون المجسم الذي عليه د ب ن ه الذي هو في الصورة الثانية مخروط أجوف وفي الصورة الثالثة إما معين مجسم وإما مخروط أجوف، ومجسما د ه ن م ز و و ز م ل ج ا اللذان هما في الصورة الثانية فضلتا مخروطين أجوفين، وهما في الصورة الثالثة إما

11 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في آخر يو وآخر يز» – 12 د ب ن ه (الأولى والثانية): د ن ب ه – 14 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يو يز» – 17 أجوف: عليها في المخطوطة علامة «ه»، وربّما أشار الناسخ بها إلى نقص رآه أو أراد أن يكتبه في الهامش، وهو ما أثبتناه – 22 د ب ن ه: د ن ب ه.

فضلتا معينين مجسمين وإما فضلتا مخروطين أجوفين وإما أحدهما فضلة مخروط أجوف والآخر فضلة معين مجسم، مع ثلثي المجسم المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها د ف مساوٍ لنصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا ل وارتفاعها ب ج. والمخروط الأجوف المستدير الذي ذكرنا مع فضلتي المخروطين الأجوفين مساوٍ للمجسم الذي يحدث بإدارة شكل ج ا و د ب من الصورة الثانية إذا كان الخط الثابت ب ج. وكذلك أيضًا حال المعين المجسم أو المخروط الأجوف من الصورة الثالثة مع فضلتي المعينين المجسمين منها والمخروطين الأجوفين أو المجسمين اللذين أحدهما معين مجسم والآخر مخروط أجوف. فالمجسم الذي يحدث، إذا أثبت خط ب ج، وأدير سائر أضلاع شكل ج ا و د ب من موضع ما حتى يعود إلى ذلك الموضع، أقلُّ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة، التي قطرها ا ل، وارتفاعها خط ب ج، بمثل ثلثي المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي قطرها د ف الذي هو العمود الواقع من نقطة د على قطر ب ج؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

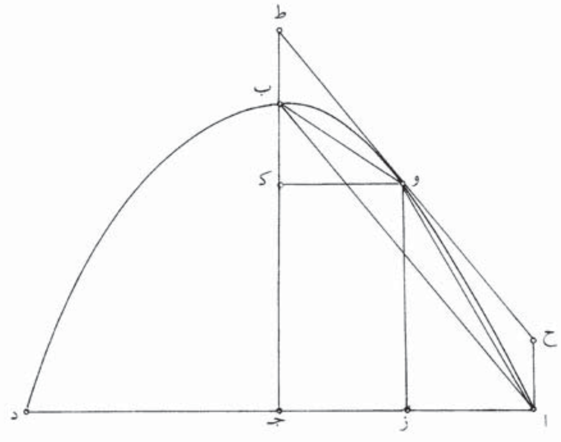
– لج – إذا كانت قبة مكافئة معتدلة الرأس معلومة ومجسم معلوم، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بالقبة دوائر موازية لقاعدة ذلك البسيط يكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى سهم القبة، قسمته أقسامًا يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد / ويكون أصغرها الذي يلي رأس القبة. ١١٦ – و
وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بالدوائر التي خطت على القبة وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر دائرة ونقطة رأس القبة، حدث في القبة مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقلّ من المجسم المعلوم.

فليكن قبة مكافئة معتدلة الرأس معلومة على نصف القطعة الذي أدير فأحدثها ا ب، وعلى سهمها الذي هو سهم القطع ب ج، وعلى هذا النصف من القطعة إذا دار فواقًا من الجهة الأخرى السطح الذي كان فيه أولاً ب د، وعلى المجسم المعلوم هـ.

فأقول: إنه [لا] يمكن أن نخط في بسيط قبة ا ب د دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها، ويكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم ب ج خطوط ترتيب قسمت ب ج أقسامًا يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية

2 د ف: د ب – 6 والمخروطين: والمخروط – 15 الذي: للذي – 17 بأصغر: بأصغرها – 19 قبة: فيه – 20 هذا: هذه.

مبتدئة من الواحد، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين رأس القبة والخط المحيط بأصغر تلك الدوائر، حدث في القبة مجسم تحيط به وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقلّ من مجسم هـ.



الأولى

برهان ذلك: أنّا إذا وصلنا خط ا ب، وجعلنا خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ا إلى السهم خط ا جـ، فإن الطوق الذي تحدثه قطعة ا و ب بدورانها، إذا أثبت خط ب جـ، وأدير نصف القطع الذي عليه ا ب جـ، إما أن يكون أقلّ من مجسم هـ، وإما ألاّ يكون كذلك. فإن كان أقلّ، فهو الذي أردنا؛ وإلا فإنا إذا قسمنا خط ا جـ بنصفين على نقطة ز وأخرجنا من نقطة ز خطًا موازيًا لخط ب جـ عليه ز و، وأجزنا على نقطة و خطًا مماسًا للقطع عليه ح و ط فلقي السهم على نقطة ط، وأخرجنا من نقطة ا خطًا موازيًا لخط ب جـ عليه ا ح، كان سطح ح ط ب ا محيطًا بقطعة ا و ب من القطع. فالمجسم الذي يحدثه سطح ح ط ب ا، إذا أثبت خط ط جـ، وأدير سائر أضلاع سطح ح ط ب ا مع سطح نصف القطع، أعظم من الطوق الذي يحدثه عند ذلك ا و ب. والمجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب ا مساوٍ للمجتمع من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها خط ا جـ. وأيضًا، فإن ب ك ك جـ و ك ا جـ أربعة خطوط وب ك ثلث ك جـ و ك نصف ا جـ. فالمجسمات الكائنة من ضرب ب ك في مربع خط

2 القبة (الثانية): أثبتها في الهامش – 7 خط: كتب بعدها «ووصلنا خط ا و و ب»، ومكان هذه الجملة هو في السطر التالي بعد «عليه ز و»، وهي في المخطوطة فوق هذا المكان في سطر سابق. وربّما اختلطت الرؤية على الناسخ فوضعها في هذا المكان – 11 ح ط ب ا: ح ب ط ا – 12 ا و ب: ا حـ / والمجسم: فالمجسم.

وك، ومن ضرب ك ج في مربعي خطي وك ا ج ⟨و⟩في السطح المجتمع من ضرب وك في ا ج، إذا جمعت، ونقص منها المجسم الكائن من ضرب ب ج في مربع خط ا ج، كان الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب ب ك في مربع خط ا ج. ونسبة المجسمات الكائنة من ضرب ب ك في مربع خط وك، ومن ضرب ك ج في مربعي خطي وك ا ج وفي السطح المجتمع من ضرب وك في ا ج، ومن ضرب ب ج في مربع خط ا ج، إلى المجسمات الكائنة من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، ومن ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك ا ج ⟨و⟩في الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ / للسطح المجتمع من ضرب وك في ا ج، ومن ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها ا ج، كل واحد إلى نظيره، كنسبة المجسم الكائن من ضرب ب ك في مربع ا ج إلى المجسم الكائن من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها ا ج. ١١٦ – ظ

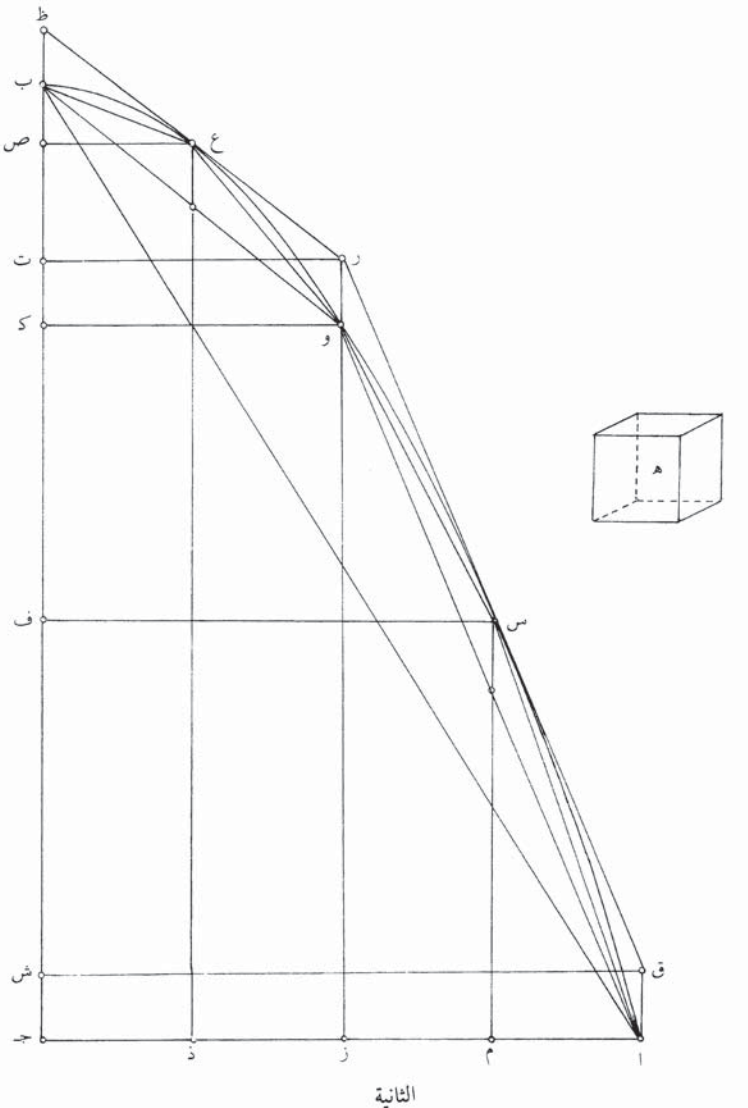
فالمجسمات الكائنة من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، ومن ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك ا ج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في ا ج، إذا جمعت ونقص منها المجسم الكائن من ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها ا ج – فأما المجسم الكائن من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها وك، فهو ثلاثة أمثال المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة و ب ك؛ وأما المجسم الكائن من ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك ا ج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في ا ج، فهو ثلاثة أمثال فضلة المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة منحرف وك ج ا؛ وأما المجتمع من ضرب ب ج في الدائرة التي نصف قطرها ا ج، فهو ثلاثة أمثال المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة مثلث ا ب ج – فإذا نقصنا من ثلاثة أمثال جميع المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف ا و ب ج ثلاثة أمثال جميع المخروط الذي يحدث بإدارة مثلث ا ب ج، فإن الباقي يكون أعظم من المجتمع من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها ا ج.

فأما الذي يبقى من ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف ا و ب ج، إذا نقصت منها ثلاثة أمثال المخروط الذي يحدث بإدارة مثلث ا ب ج، فهو مساوٍ لثلاثة أمثال الطوق الذي يحدث بإدارة مثلث ا و ب، إذا كان الخط الثابت ب ج؛ وأما المجتمع من ضرب ب ك في الدائرة التي نصف قطرها ا ج فقد بيّنا أنه مساوٍ للمجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب ا.

1 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كا» – 9 في ... ب ك: أثبتها في الهامش – 10 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في يه» –
24 سطح: سطحا.

فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث ا و ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب ا. وقد كنا بيّنا أن هذا المجسم أكثر من الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة ا و ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج، فالطوق ⟨الحادث بإدارة مثلث ا و ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر كثيرًا من ثلث الطوق الحادث بإدارة قطعة ا و ب من القطع، إذا كان الخط الثابت ب ج؛ فالذي يبقى من قبة ا ب د من بعد نقصان الشكل الحادث بإدارة منحرف ا و ب ج منها وهو الطوقان اللذان يحدثان بإدارة قطعتي ا و و ب من القطع، إذا كان الخط الثابت ب ج؛ إما أن يكون أقل من مجسم ه، وإما ألا يكون كذلك. فإن كان أقل منه فهو الذي أردنا. وإلا فإنا إذا قسمنا خطي ا ز ز ج بنصفين نصفين على نقطتي م ذ، وأخرجنا منهما خطي م س ذ ع موازيين للسهم، وأجزنا على نقطتي س ع خطين مماسين للقطع عليهما ق س ر ر ع ظ، وأخرجنا من نقطتي س ع خطين موازيين لخط ا ج ويلقيا سهم ب ج على نقطتي ف ص، وأخرجنا من نقطتي ق ر عمودي ق ش ر ت على السهم، كان سطح ا ق ر و محيطًا بقطعة ا س و من القطع وسطحُ و ر ظ ب محيطًا بقطعة و ع ب من القطع. والطوق الحادث بإدارة سطحي ا ق ر و و ر ظ ب مساوٍ للمجسم⟩ الحادث بإدارة ا ق ش ج ⟨لأن ا ق ش ج⟩ و ر ت ك المتوازيا الأضلاع على قاعدتين متساويتين وهما ج ش ك ت لأنهما مثلي خطي ا ق و ر، وقاعدتاهما على خط واحد وهو ب ج، والسطحان في جهة واحدة. فإذا أثبت خط ب ج، وأديرت سطوح و ر ت ك ا ق ش ج ا ق ر و والثلاثة المتوازية الأضلاع كهيئتها، فإن الطوق الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ر و يكون مساويًا لفضل ما بين المجسمين اللذين يحدثان بإدارة سطحي ا ق ش ج و ر ت ك. فأما المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ش ج، فهو مساوٍ للمجتمع من ضرب ا ق في الدائرة التي نصف قطرها ا ج. وأما المجسم الذي يحدث بإدارة سطح و ر ت ك، فهو مساوٍ للمجتمع من ضرب و ر في الدائرة التي نصف قطرها و ك. فالطوق الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ر و، إذا كان الخط الثابت ب ج، مساوٍ للمجتمع من ضرب ب ص في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفا قطريهما و ك ا ج لأنا قد كنا بيّنا أن ب ص مساوٍ لكل واحد من خطي ا ق و ر. وأيضًا، فإن نسب ⟨أضعاف⟩ خطوط ع ص و ك س ف ا ج بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أزواج متوالية مبتدئة من الاثنين. وعدة خطوط ب ص ص ك ك ف ف ج كعدتها ونسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب / أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فالمجسمات الكائنة من ضرب ك ف في ١١٧ – و

24 ا ج : لج – 25 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في كح كط».



الثانية

مربعي خطي وك س ف وفي السطح المجتمع من ضرب وك في س ف، ومن ضرب ف جـ في مربعي خطي س ف ا جـ وفي السطح المجتمع من ضرب س ف في ا جـ، إذا جمعت، ونقص منها المجسمات الكائنة من ضرب ك جـ في مربعي خطي وك ا جـ وفي السطح المجتمع من ضرب وك في ا جـ، فإن الباقي أعظم من المجسم الكائن من ضرب ب ص في فضل ما بين مربعي خطي

1 وك (الأولى): ود.

وك اج. ولكن نسبة مربع خط وك إلى الدائرة التي نصف قطرها وك كنسبة مربع خط س ف إلى الدائرة التي نصف قطرها س ف وكنسبة السطح المجتمع من ضرب وك في س ف إلى الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ لهذا السطح وكنسبة مربع خط اج إلى الدائرة التي نصف قطرها اج وكنسبة السطح المجتمع من ضرب س ف في اج إلى الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ لهذا السطح وكنسبة فضل ما بين مربعي خطي وك اج إلى فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفا قطريهما خطا وك اج. فالمجتمع من ضرب ك ف في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك س ف وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في س ف، ومن ضرب ف ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما س ف اج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب س ف في اج، إذا جمع، ونقص منه المجتمع من ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك اج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في اج، فإن الباقي أعظم من المجتمع من ضرب ب ص في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفا قطريهما خطا وك اج. فأما المجتمع من ضرب ك ف في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما خطا وك س ف وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب وك في س ف مع المجتمع من ضرب ف ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما خطا س ف اج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب س ف في اج، فهو ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة شكل اس وك ج، إذا كان الخط الثابت ك ج، لأنه مركب من فضلتي المخروطين المستديرين اللتين عليهما وك ف س س ف ج ا. وأما المجتمع من ضرب ك ج في الدائرتين اللتين نصفا قطريهما وك اج وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمَع من ضرب وك في اج، فهو ثلاثة أمثال فضلة المخروط المستدير الذي يحدث بإدارة منحرف اوك ج، إذا كان الخط الثابت ك ج. فزيادة ثلاثة أمثال المجسم الحادث بإدارة شكل اس وك ج – إذا كان الخط الثابت ك ج – على ثلاثة أمثال المجسم الحادث بإدارة منحرف اوك ج – إذا كان الخط الثابت ك ج – أعظم من المجتمع من ضرب ب ص في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفا قطريهما خطا وك اج. فأما زيادة ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة شكل اس وك ج – إذا كان الخط الثابت ب ج – على ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف اوك ج / إذا كان الخط الثابت ب ج، فهي مساوية لثلاثة أمثال الطوق الذي يحدث ١١٧ – ظ

7 وك: حـ وك – 11 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «يتبين من يه» – 13 الدائرة: الدائرتين – 14 ف ج: ب ج – 17 س ف ج ا: س ف اج – 22-25 أعظم ... اوك ج: مكررة، وكتب في الهامش بعيدًا عنها «معاد» – 25 ب ج: ك ج.

بإدارة مثلث ا س و إذا كان الخط الثابت ب ج. وأما المجتمع من ضرب ب ص في فضل ما بين الدائرتين اللتين نصفا قطريها خطا وك ا ج، فقد كنا بيّنا أنه مساوٍ للطوق الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ر و إذا كان الخط الثابت ب ج. فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث ا س و، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ر و إذا كان الخط الثابت ب ج، والطوق الذي يحدث بإدارة سطح ا ق ر و، إذا كان الخط الثابت ب ج، أعظم من الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة ا س و من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج، لأن خط ق س ر مماس للقطع. فالطوق الذي يحدث بإدارة مثلث ا س و، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة ا س و من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج. وقد كنا بيّنا أن الطوق الذي يحدث بإدارة مثلث وع ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة وع ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ك. فالطوقان اللذان يحدثان بإدارة مثلثي ا س و و ع ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، أكثر من ثلث الطوقين اللذين يحدثان بإدارة قطعتي ا س و وع ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج. فالقطع الذي يبقى من قبة ا ب د من بعد نقصان المجسم الذي يحدث بإدارة شكل ا س وع ب ج إذا كان الخط الثابت ب ج، وهي الأطواق التي تحدث بإدارة قطع ا س س و وع ع ب، إذا كان الخط الثابت ب ج، إما أن يكون أقل من مجسم هـ وإما ألاّ يكون كذلك. فإن كانت أقلّ منه، فهو الذي أردنا. وإلا فلا بدّ متى فعلنا مثل هذا الفعل مرارًا كثيرة من أن ننتهي إلى أطواق تفضل من القبة أقل من مجسم هـ، لأن كل مقدارين يكون أحدهما أعظم من الآخر وينقص من أعظمهما مقدار نسبته إليه أكثر من نسبة مفروضة، ومن الباقي منه مقدار نسبته إليه أكثر من تلك النسبة، ولم نزل نفعل مثل ذلك، فلا بدّ من أن ننتهي من الأعظم إلى شيء يفضل منه أقل من الأصغر. فليكن الذي يفضل من القبة ويكون أقل من مجسم هـ الأطواق التي تحدث بإدارة قطع ا س س و وع ع ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب ج، فقد يمكن أن يعمل في بسيط قبة ا ب د المعتدلة الرأس دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها. وإذا خرجت من الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم ب ج خطوط ترتيب، قسمته أقسامًا ما يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد / متوالية مبتدئة من الواحد، وإذا ١١٨ – و
اتصلت بسط فيما بين تلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين رأس القبة وأصغر الدوائر، حدث في القبة

1 ب ج: ك ج – 9 وع ب: وج ب – 13 يبق: يبقا – 17 مجسم هـ: نجد بإزاء هذه الفقرة في الهامش «في لا».

مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من مجسم هـ؛ مثل الدوائر التي أنصاف أقطارها ع ص وك س ف ا جـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

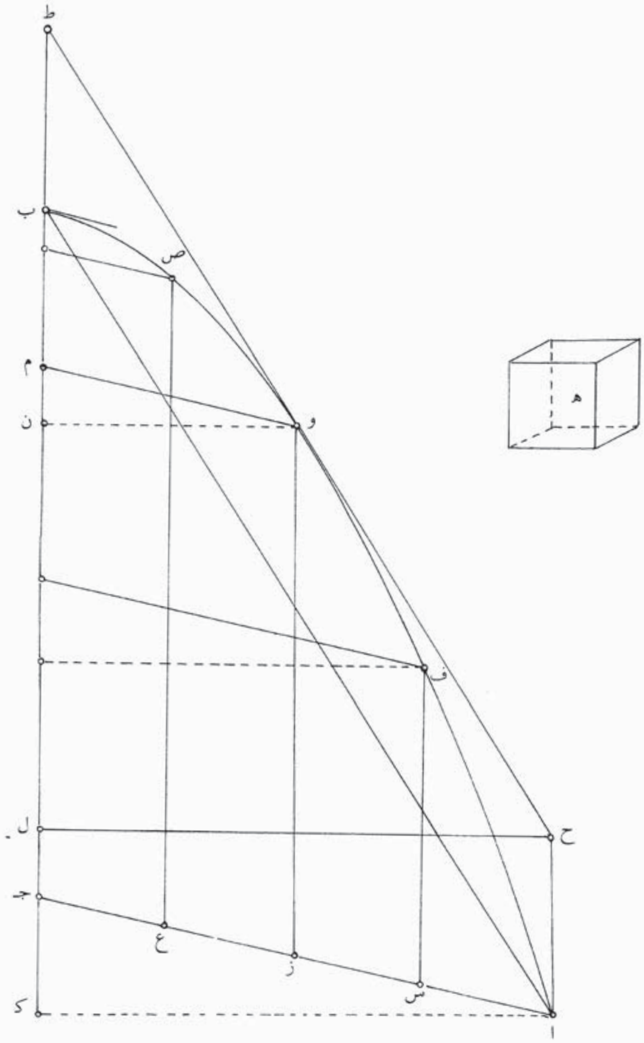
– لد – إذا كانت قبة مكافئة ناتئة الرأس أو غائرة الرأس معلومة، ومجسم معلوم، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بالقبة دوائر موازية لقاعدة ذلك البسيط متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى سهم القبة، قسمته أقسامًا تكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد ويكون أصغرها الذي يلي رأس ⟨القبة⟩، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بالدوائر التي خطت على القبة وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر تلك الدوائر ورأس القبة، حدث في القبة مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقل من المجسم المعلوم.

فليكن قبة مكافئة ناتئة الرأس أو غائرة الرأس معلومة، على نصف القطعة التي أدير قاعدتها ا ب، وعلى سهمها الذي هو قطر للقطع ب جـ، وعلى هذا النصف من القطعة إذا دار فواقًا من الجهة الأخرى السطح الذي كان فيه / أولاً ب د، وعلى المجسم المعلوم هـ. ١١٨ – ظ

فأقول: إنه يمكن أن نخط في بسيط ا ب د دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها، ويكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بتلك الدوائر إلى سهم ب جـ خطوط ترتيب، قسمت ب جـ أقسامًا تكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط فيما بين رأس القبة والخط المحيط بأصغر تلك الدوائر، حدث في القبة مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقلّ من مجسم هـ.

برهان ذلك: أنا إذا وصلنا خط ا ب، وجعلنا خط الترتيب الذي يخرج من نقطة ا إلى السهم خط ا جـ، فإن الطوق الذي تحدثه قطعة ا و ب من القطع بدورانها، إذا أثبت خط ب جـ وأدير نصف القطع الذي عليه جـ ا ب، إما أن يكون أقلّ من مجسم هـ، وإما ألاّ يكون كذلك. فإن كان أقلّ منه فهو الذي أردنا. وإلاّ فإنا إذا قسمنا خط ا جـ بنصفين على نقطة ز وأخرجنا من نقطة ز خطًا موازيًا لخط ب جـ وهو خط ز و، ووصلنا خطي ا و و ب، وأجزنا على نقطة و خطًا مماسًا للقطع عليه ح و ط، فلقي القطر على نقطة ط، وأخرجنا من نقطة ا خطًا

5 ترتيب: بترتيب – 11 فواقًا: فواقا – 17 القبة (الثانية): للقبة – 19 الترتيب: للترتيب – 23 ب جـ: ا حـ / ز و: ز.



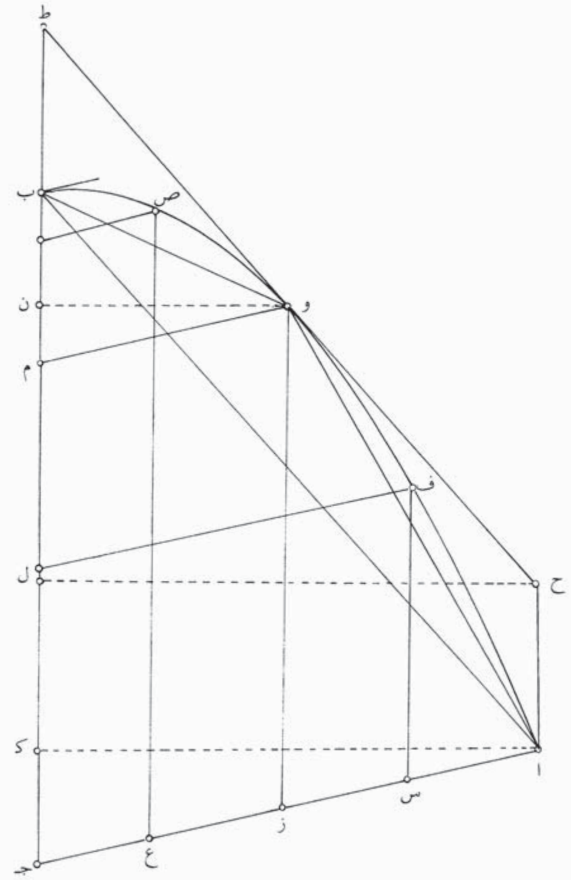
الأولى

موازيًا لقطر ب جـ وهو ا ح، تبيّن كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا أن المجسم الذي يحدثه سطح ح ط ب ا، إذا أثبت خط ط جـ، وأدير سطح نصف القطعة الذي عليه ا ب، أعظمُ من الطوق الذي تحدثه عند ذلك قطعة ا و ب من القطع، وأن سطح ح ط ب ا متوازي الأضلاع.
وإذا أخرجنا من نقطتي ا ح عمودين على خط ب جـ عليها ا ك ح ل، كان سطح ح ل ك ا

3 وأن: هان.

متوازي الأضلاع وقاعدته وقاعدة سطح ح ط ب ا واحدة، وهي ا ح، وهما في جهة واحدة وفيما بين خطي ا ح جـ ط المتوازيين. ⟨وإذا أخرجنا من نقطة و خط ترتيب عليه و م، كان و م ا جـ خطين متوازيين؛ وإذا أخرجنا من نقطة و عمودًا عليه و ن على سهم ب جـ، كان و ن ا ك خطين متوازيين، فالمجسم الكائن من ضرب م جـ في الدائرتين⟩ اللتين نصفا قطريهما و ن ا ك وفي الدائرة التي مربع نصف قطرها مساوٍ للسطح المجتمع من ضرب و ن في ا ك، فهو ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة منحرف و م جـ ا، الذي هو في الصورة الأولى فضلة مخروط أجوف، وفي الصورة الثانية فضلة معين مجسم أو فضلة مخروط أجوف. وأما المجتمع من ضرب ب جـ في الدائرة التي نصف قطرها ا ك فهو ثلاثة أمثال المجسم الذي يحدث بإدارة مثلث ا ب جـ، الذي هو في الصورة الأولى مخروط أجوف، وفي الصورة الثانية معين مجسم أو مخروط أجوف. ويتبيّن من ذلك بمثل ما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا أن الطوق ⟨الذي يحدث⟩ بإدارة مثلث ا و ب، إذا كان الخط الثابت ب جـ، أكثر من ثلث المجسم الذي يحدث بإدارة سطح ح ط ب ا، إذا كان الخط الثابت ط جـ. وقد كنا بيّنا أن المجسم الحادث بإدارة سطح ح ط ب ا، إذا كان الخط الثابت ب جـ، أعظم من الطوق الحادث بإدارة قطعة ا و ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب جـ. فالطوق الحادث بإدارة مثلث ا و ب، إذا كان الخط الثابت ب جـ، أكثر كثيرًا من ثلث الطوق الذي يحدث بإدارة قطعة ا و ب من القطع إذا كان الخط / الثابت ب جـ. فالذي يبقى من قبة ١١٩ – و
ا ب د من بعد نقصان الشكل الذي يحدث بإدارة منحرف ا و ب جـ منها، وهو الطوقان اللذان يحدثان بإدارة قطعتي ا و و ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب جـ، إما أن يكون أقل من مجسم هـ وإما ألاّ يكون كذلك. فإن كان أقلّ منه، فهو الذي أردنا؛ وإلاّ فإنّا إذا قسمنا خطي ا ز ز جـ بنصفين نصفين على نقطتي س ع، وأخرجنا منهما خطي س ف ع ص موازيين للقطر، ووصلنا خطوط ا ف ف و و ص ص ب، تبيّن كما بيّنا فيما تقدم من هذا الشكل أن نسب خطوط الترتيب الخارجة من نقط ا ف و ص إلى الأعمدة الخارجة من هذه النقط إلى القطر متساوية. وإذا سلكنا في ذلك مثل السبيل التي سلكناها في الشكل الذي قبل هذا، تبيّن أن الأطواق التي تحدث بإدارة مثلثي ا ف و و ص ب، إذا كان الخط الثابت ب جـ، أكثر من ثلث الطوقين اللذين يحدثان بإدارة قطعتي ا ف و و ص ب من القطع إذا كان الخط الثابت ب جـ، لأن

4 اللتين: فالمجسمان اللتان – 5 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في بط» – 6 وم جـ ا: وم ا جـ – 7 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في آخر يو وآخر يز» – 21 نقط: نقطه.



الثانية

السبيل في هذا الشكل وفي الذي قبله سبيل واحدة، غير أنّا نستعمل هاهنا بدل خطوط الترتيب والخطوط التي توازيها الأعمدةَ، وبدل الشكل المخروط المستدير، أما في الصورة الأولى فالمخروط الأجوف المستدير، وأما في الصورة الثانية فالمعين المجسم أو المخروط الأجوف المستدير، وبدل فضلة المخروط المستدير، أما في الصورة الأولى ففضلة المخروط الأجوف المستدير، وأما في الصورة الثانية ففضلة المعين المجسم أو فضلة المخروط الأجوف. ويتبيّن من ذلك أنّا متى فعلنا مثل هذا الفعل مرارًا كثيرة، فلا بدّ من أن ننتهي إلى أطواق تفضل من قبة ا ب د أقلّ من مجسم هـ. فليكن قد انتهينا إلى الأطواق التي تحدث بإدارة قطع ا ف ف و و ص ص ب من القطع إذا كان الخط الثابت

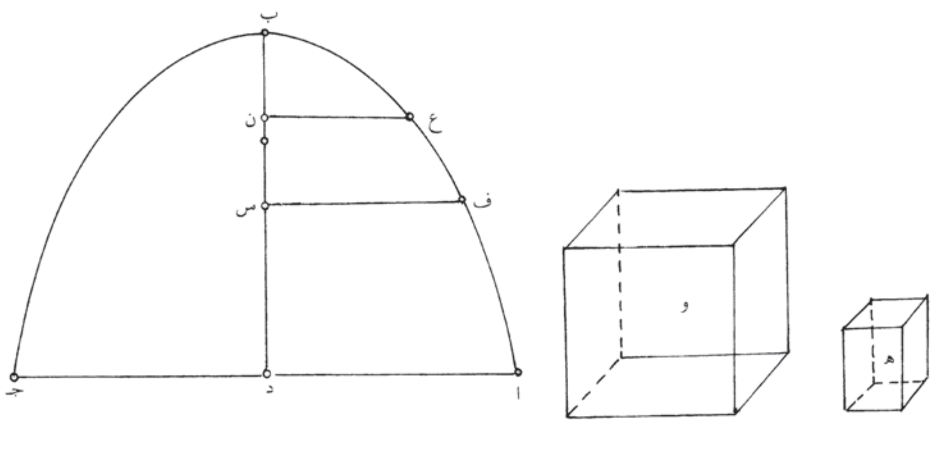
5 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في لا» – 6 أقل: اول / انتهينا: انتهنا – 7 ا ف: ا ب.

ب ج، فقد يمكن أن نعمل في بسيط قبة ا ب د دوائر موازية لدائرة قاعدة بسيطها، وإذا خرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى سهم ب ج، قسمته أقسامًا يكون نسبها بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، وإذا اتصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين الخط المحيط بأصغر تلك الدوائر ورأس القبة، حدث في قبة ا ب د مجسم تحيط به، وكانت زيادة القبة على ذلك المجسم أقلّ من مجسم ه؛ وهي الدوائر التي تخطها بدورانها نقط ا ف و ص؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ١١٩ – ظ

١٢٠ – و /– **له** – إذا كانت قبة مكافئة معلومة، ومجسّم معلوم، فقد يمكن أن يعمل في القبة شكل مجسم تحيط به، ويكون أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة القبة، إن كانت القبة معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل سهم القبة، بمقدار أقل من المجسم المعلوم.

فليكن القبة المكافئة المعلومة قبة ا ب ج، ونصف القطع الذي حدثت بإدارته ا ب، وسهم القبة ب د، والمجسم المعلوم ه.

فأقول: إنه يمكن أن يعمل في قبة ا ب ج مجسم تحيط به، ويكون أقل من نصف الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة قبة ا ب ج، إن كانت معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل خط ب د، بمقدار أقل من مجسم ه.



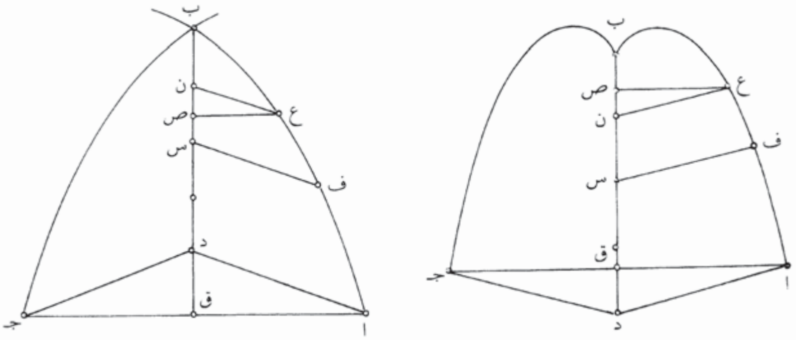
6 وهي: وبي – 11 حدثت: حدث.

برهان ذلك: أنّا إذا أخرجنا من نقطة ا خطًا مستقيمًا إلى نقطة جـ عليه ا جـ، كان ا جـ عمودًا على السهم. فإذا جعلنا مجسم و مناسبًا للمجسم ولمجسم هـ، ونسبة ا د إلى ع ن أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم و، وقبة ا ب جـ إما أن تكون معتدلة الرأس وإما ألا تكون كذلك، فإن كانت معتدلة الرأس فإن ع ن يكون عمودًا على سهم ب د، ويكون ا د نصف ا جـ كما في الصورة الأولى، وتكون نسبة الدائرة التي نصف قطرها ا د إلى الدائرة التي نصف قطرها ع ن أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي 〈نصف〉 قطرها ا د وارتفاعه ب د إلى مجسم و مثناة بالتكرير. فأما نسبة الدائرة التي نصف قطرها ا د إلى الدائرة التي نصف قطرها ع ن، فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا د وارتفاعه ب د إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ن وارتفاعه ب د. وأما نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم و مثناة بالتكرير، فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم هـ، لأن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي 〈قطرها〉 ا جـ وارتفاعه ب د ومجسم و ومجسم هـ متناسبة. فنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا د وارتفاعه ب د إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ن وارتفاعه ب د أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم هـ. ولكن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا د وارتفاعه ب د هو المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د؛ فالمجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ن وارتفاعه ب د أصغر من مجسم هـ.

وإن كانت قبة ب جـ ناتئة الرأس أو غائرة الرأس، فإنّا إذا أخرجنا من نقطة ع عمودًا على سهم ب د عليه ع ص كما في الصورة الثانية والصورة / الثالثة، ١٢٠ – ظ وكان العمود الواقع من نقطة ا على ب د عمود ا ق الذي هو نصف ا جـ، كان خطا ا ق ع ص متوازيين. وخطا ا د ع ن أيضًا متوازيان، لأنها من خطوط الترتيب. فمثلث ا د ق شبيه مثلث ع ص ن، ونسبة ا د إذًا إلى ع ن كنسبة ا ق إلى ع ص. وقد كنا بيّنا أن نسبة ا د إلى ع ن أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم و، فنسبة ا ق إلى ع ص أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها 〈ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم و. ونسبة ا ق إلى ع ص مثناة بالتكرير كنسبة الدائرة التي نصف قطرها〉 ا ق إلى الدائرة التي نصف قطرها ع ص، 〈فنسبة ا ق

2 للمجسم: يعني المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د / ولمجسم هـ: مجسم و / ونسبة: فنسبة – 5 ا د: ا ذ – 7 ا د: ا جـ – 18 عمودًا: عمدا – 20 ا ق (الأولى): ا و / ا د: ا ذ – 21 شبيه: سبه.

إلى ع ص مثناة بالتكرير⟩ أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم و مثناة بالتكرير. فأما نسبة الدائرة التي نصف قطرها ا ق إلى الدائرة التي نصف قطرها ع ص، فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا ق وارتفاعه ب د إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ص وارتفاعه ب د؛ وأما نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى المجسم و مثناة بالتكرير، فهي كنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم هـ. فنسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا ق وارتفاعه ب د إلى المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ص وارتفاعه ب د أعظم من نسبة المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د إلى مجسم هـ. ولكن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ا ق وارتفاعه ب د، هو المجسم الذي قاعدته الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعه ب د؛ فالمجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ص وارتفاعه ب د أصغر من مجسم هـ.



وقد كنا بيّنا في الصورة الأولى، التي هي القبة المعتدلة الرأس، أن المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها ع ن وارتفاعه ب د أصغر من مجسم هـ. ففي الصور الثلاث جميعًا يكون المجسم الذي قاعدته الدائرة التي نصف قطرها العمود الواقع من نقطة ع على سهم ب د وارتفاعه ب د أصغرَ من مجسم هـ. ولكن المجسم الذي يحدث بإدارة شكل ا ف ع ب د المستقيم الأضلاع، إذا كان الخط الثابت ب د، من الصور الثلاث ينقص عن نصف الأسطوانة، التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د، بمثل ثلثي المجسم الذي قاعدته الدائرة التي [نصف] قطرها

12 القبة: للقبة – 15 ا ف ع ب د: افعند – 17 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في لب».

العمود الواقع من نقطة ع على سهم ب د وارتفاعه ب د، لأن نسب أقسام ب ن ن س س د بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد. فالجسم الذي يحدث بإدارة شكل ا ف ع ب د المستقيم الأضلاع، إذا كان الخط الثابت ب د، تحيط به القبة وهو ينقص عن نصف الأسطوانة، / التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ١٢١ – و ب د، بمقدار أقلّ من مجسم هـ، والدائرة التي قطرها ا جـ في الصورة الأولى قاعدة القبة وفي الصورة الثانية والثالثة قاعدة أسفلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

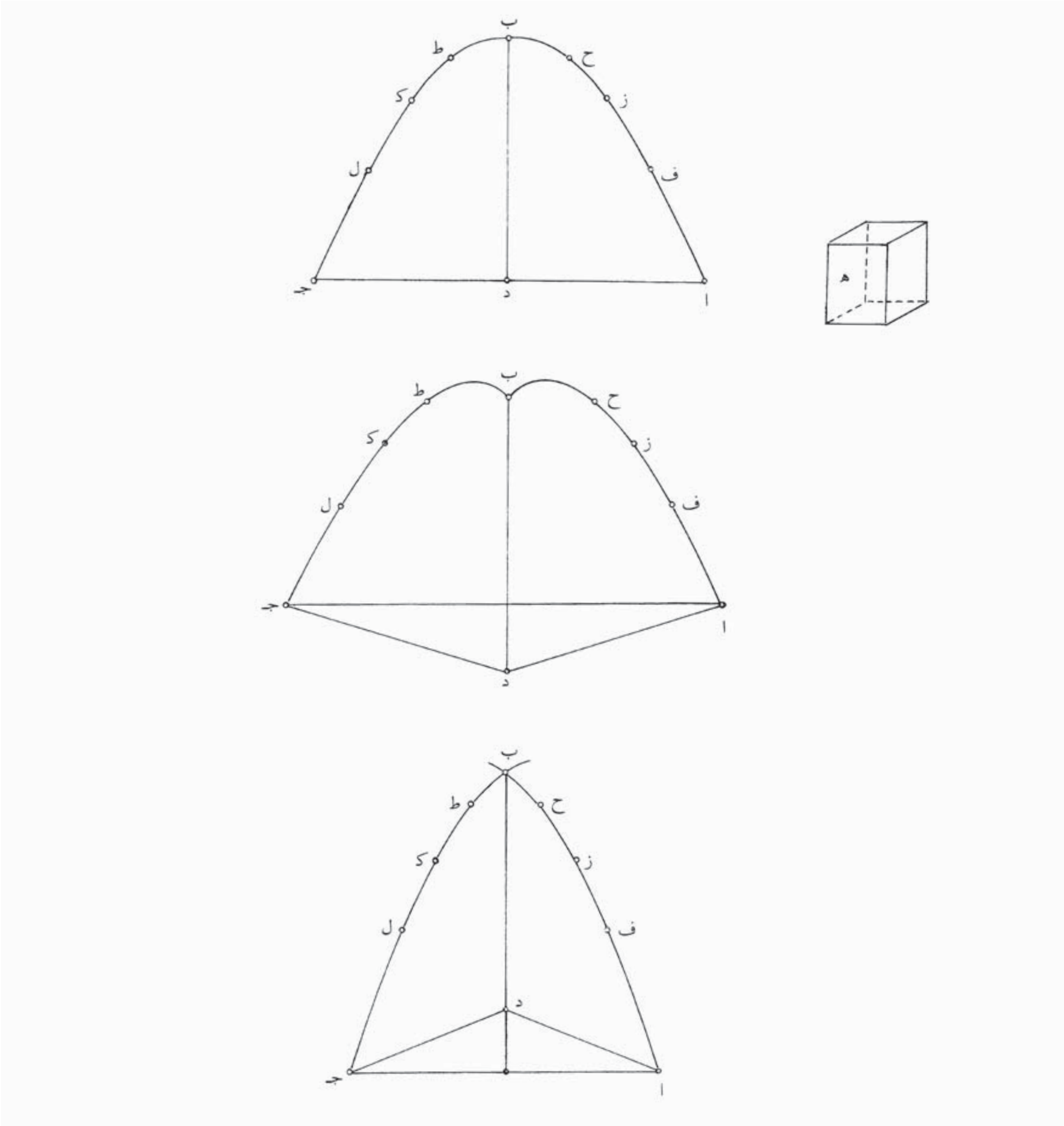
– لو – كلّ قبة مكافئة، فإن مساحتها مساوية لنصف مساحة الأسطوانة التي قاعدتها دائرة قاعدة القبة، إن كانت القبة معتدلة الرأس، أو دائرة قاعدة أسفلها، إن لم تكن معتدلة الرأس، وارتفاعها مثل سهم القبة.

فليكن قبة مكافئة عليها ا ب جـ وعلى سهمها ب د وعلى قطر قاعدتها أو قاعدة أسفلها خط ا جـ.

فأقول: إن مساحة قبة ا ب جـ مساوية لنصف مساحة الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د.

برهان ذلك: أنه إن لم يكن قبة ا ب جـ مساوية لنصف الأسطوانة التي ذكرنا، فإنها إما أن تكون أكثر من النصف ⟨وإما أن تكون أقلّ منها. فلتكن أولاً أكثر من النصف⟩، إن أمكن ذلك، ولتكن زيادتها على النصف بمثل مجسم هـ، فقد يمكن أن نخط في البسيط المحيط بقبة ا ب جـ دوائر موازية لقاعدة هذا البسيط، وتكون متى أخرجت من الخطوط المحيطة بها خطوط ترتيب إلى القطر، قسمته أقسامًا تكون ⟨نسب⟩ بعضها إلى بعض، إذا أخذت على الولاء، كنسب أعداد أفراد متوالية مبتدئة من الواحد، ويكون أصغرها الذي يلي رأس القبة. وإذا وصلت بسط فيما بين الخطوط المحيطة بتلك الدوائر وبسيط آخر فيما بين أصغر الدوائر ورأس القبة، كانت زيادة قبة ا ب جـ على الشكل الذي يحدث فيها أقل من مجسم هـ. فإذا / جعلنا الشكل الحادث ١٢١ – ظ في القبة شكل ا ف زح ب ط ك ل جـ د المجسم، كان شكل ا ف زح ب ط ك ل جـ د المجسم مزيدًا عليه مجسم هـ أعظم من قبة ا ب جـ. وقبة ا ب جـ مساوية لنصف الأسطوانة التي قاعدتها

3 يحدث: تحدث – 16 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في شكلي لج لد» – 22 ا ف زح ب ط ك ل جـ د: ا وزح ب ط ك ل جـ د، ولن نشير إليها فيما بعد.



الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د، مزيدًا عليه مجسم هـ. فشكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د المجسم، مزيدًا عليه مجسم هـ أعظم من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د، مزيدًا عليه مجسم هـ. وإذا أسقطنا المشترك وهو مجسم هـ، بقي شكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د أكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ

وارتفاعها ب د. وقد تبيّن فيما تقدم من الأشكال أنه أقل من نصفها، هذا خلف. فليست قبة ا ب جـ بأكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د.

فأقول: إن قبة ا ب جـ ليست بأقل من نصف الأسطوانة التي ذكرنا.

فإن كان يمكن، فلتكن أقل من نصفها بمقدار مجسّم هـ. فقد يمكن أن يعمل في قبة ا ب جـ شكل مجسم تحيط به القبة ويكون نقصانه عن نصف الأسطوانة التي ذكرنا بمقدار أقل من مجسم هـ. فليكن ذلك الشكل شكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د المجسم، فشكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د المجسم مع مجسم هـ أكثر من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د. ولكن قبة ا ب جـ مع مجسم هـ مساوية لنصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د. فشكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د المجسم مع مجسم هـ أكثر من قبة ا ب جـ مع مجسم هـ. وإذا أسقطنا ⟨المشترك⟩ وهو مجسم هـ، بقي شكل ا ف ز ح ب ط ك ل جـ د المجسم أعظم من قبة ا ب جـ، فهو أعظم منها وهي محيطة به، هذا خلف. فليست قبة ا ب جـ بأقلّ من نصف الأسطوانة التي قاعدتها الدائرة التي قطرها ا جـ وارتفاعها ب د. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأكثر من نصفها، فهي إذًا مساوية لنصفها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

تمت المقالة في مساحة المجسمات المكافئة لثابت بن قرة ١٢٢ – و

والحمد لله ربّ العالمين وصلى الله على محمّد خاتم النبيين وعلى آله.

وكتب أحمد بن محمّد بن عبد الجليل بشيراز

ليلة السبت لثمان بقين من ربيع الأول

سنة ثمانٍ وخمسين وثلاثمائة.

1 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في لب» – 5 كتب في الهامش إزاء هذا السطر «في له».

٤ـ٢ في قطوع الأسطوانة ومساحتها الجانبيّة

٤ـ٢ ـ١ مقدّمة

لقد ترك مؤلَّف ابن قرّة "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، مثلما فعل مؤلَّفاه السابقان، أثراً مُهمّاً في تاريخ رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، وكان أيضاً أحد النصوص الأكثر أهميّة في علم الهندسة . فضلاً عن ذلك، وبما أنّه يتناول دراسة التحويلات الهندسيّة النقطيّة، فقد حوَّل البحث الهندسي نحو وجهة جديدة، ممّا أدَّى إلى إغناء علم الجبر. سنتتَبَّع آثار هذا المؤلَّف في نتاج المؤلِّفين، ومن بينهم، إبراهيم بن سنان وابن سهل وابن الهيثم وشرف الدين الطوسي.

وهذا لا يُشكِّل التباين الوحيد بين هذا المؤلَّف والمؤلَّفيْن الأوَّليْن لثابت بن قرّة ؛ وذلك أنّ ابن قرّة يسلك هنا، في ميدان رياضيّات اللامتناهيات في الصغر طريقاً جديداً أكثر هندسيّة، لا يستخدم فيه لا المقدّمات الحسابيّة ولا المجاميع التكامليّة. ويُضاف، إلى هذا، اختلافٌ ذو طابع تاريخي: لم يكن لثابت سابقون في عمله في مؤلَّف "في مساحة القطع المكافئ" وفي مؤلَّف "في مساحة المجسّم المُكافئ". وذلك أنّه كان يجهل ما كتبه أرشميدس في هذا الموضوع، فابتدع عملاً تجديديّاً بالكامل. بالمقابل، يشير ثابت في مقدّمة مؤلَّفه "في قطوع الأسطوانة" إلى عمل للحسن بن موسى؛ والحسن أكبر منه سناً وكان أستاذه بلا ريب؛ وهذا يعني أنَّ ثابتاً، في هذا المؤلَّف، يتبع التقليد الذي كان دائماً تقليدَه الخاصَّ، وهو تقليد بني موسى.

كتاب الحسن بن موسى هذا، مفقود للأسف. ولكي نفهم الدور الذي أدّاه في انطلاقة بحث ثابت، وكذلك لاحقاً في مساهمة ابن السَّمْح، وهو رياضيّ من الغرب الإسلامي، فإنّه لم يبق لنا سوى بضع شهادات غير مباشرة. تأتي الأولى من أخَوَي الكاتب، محمّد وأحمد، اللذين ذكرناهما سابقاً[١] فهما يخبراننا أنّ الحسن، وبدون معرفة حقيقيّة بكتاب "مخروطات"

[١] انظر الفصل الأوّل: بنو موسى، ص ٣٠-٣١.

أبلونيوس – إذ كان لديه منه نسخة مغلوطة لا يستطيع لا فهمها ولا ترجمتها- درس القِطع الناقص وخصائصه كقطع مستوٍ لأسطوانة، وكذلك مختلف أنواع القطوع الناقصة. ويذكر ثابت نفسُه بأنَّ الحسن بن موسى قد حدّد مساحة القطع الناقص. هذا هو إذاً الميدان الذي سعى ثابت بن قرّة إلى استثماره. لكننا نعلم أيضاً، وفق شاهد آخر هو السجزي، وهو رياضيّ من القرن العاشر، أنّ الحسن بن موسى قد استخدم طريقة البؤرتين لدراسة هذا الشكل "الدائري المستطيل". قد نتوقّع إذاً، إذا استندنا إلى ممارسة رياضيّي ذلك العصر، التي كانت متوافقة مع متطلبات الدقّة، أن يكون جزءٌ من كتاب الحسن بن موسى مخصّصاً لإثبات أنّ الشكل الحاصل بطريقة البؤرتين هو نفسه المولد بواسطة القطع، وأنّه يحقّق على الأخصّ العلاقة الأساسيّة المميِّزة التي يُمكننا التعرّف عليها بإلقاء نظرة بسيطة على المقالة الأولى من "المخروطات". هذه الفرضيّة ليست اعتباطيّة: فهي تتفق مع أقوال الأخوين محمّد وأحمد، التي تفيدنا أنّ الحسن ابتكر نظريّة في القطوع الناقصة وفق طريق مختلف عن طريق أبلونيوس؛ وهي من جهة أخرى ستلقي الضوء على بحث ابن السمح، الذي تـُشكّل أعماله شهادة ممتازة على هذا المسار، كما سنرى ذلك لاحقاً .

إذا انتقلنا الآن إلى مؤلَّف ثابت في قطوع الأسطوانة، نتبيَّن أنَّ طريقة البؤرة المزدوجة لم تـُدرس فيه مطلقاً. لم يتناول ثابت، إذاً، إلّا قسماً من المواضيع التي عالجها بنو موسى. إنَّ ما قد يبدو خياراً محدِّداً، يكتسب معناه إذا ذكرنا باختلاف آخر بين ثابت والحسن بن موسى؛ فثابت بن قرّة، وبخلاف هذا الأخير، كان مطّلعاً بشكل ممتاز على "مخروطات" أبلونيوس. وذلك أنّه ترجم منه المقالات الثلاث الأخيرة من المقالات السبع التي حُفظت باليونانيّة. لقد كان لديه إذاً، ومنذ البداية، نصّ أبلونيوس ونصّ كتاب الحسن بن موسى، وبواسطة وسائل الأوّل حذا حذوَ الثاني. لقد أخذ من أبلونيوس مشروعاً وبعض الإنجازات؛ وأخذ من الحَسن عرضه لكتاب "المخروطات"، وخاصّة ما يتعلق بالقطع الناقص، كما اقتبس وسائلَ فعَّالة لدراسة هذه المخروطات. هذا وضع غير مسبوق تمَّ فيه تحويلُ المشروع وتوسيعُه وتطويرُ الوسائل في اتجاه مختلف عن اتجاه الميدان الأصلي. فأصبح هدف هذا المشروع المُعدَّل، إعداد نظرّية للأسطوانة وقطوعها المستوية مشابهة لنظرية المخروط وقطوعه. أمَّا الوسائل فقد اغتنت بالإسقاطات والتحويلات النقطيّة. وربّما اتبّع في ذلك الحسن بن موسى، لكنه ذهب

إلى أبعد بكثير مما ذهب إليه هذا الأخير. لنوضّح أقوالنا عن هذه السِّمات الأساسيّة لمؤلَّف "في قطوع الأسطوانة"، التي بقيت حتى الآن في الظلّ.

يتناول ثابت بن قرّة، وهذه هي الخطوة الأولى في هذا الاتجاه، السطح الأسطوانيَّ كسطح مخروطيّ، والأسطوانة كمخروط رأسُه مبعدٌ إلى اللانهاية في اتجاه معيّن. وهو، في الواقع، يستبدل الخطوطَ المستقيمة المارّة بنقطة والمستوياتِ المارّة بنقطة، في حالة المخروط، بخطوط مستقيمة متوازية ومستويات موازية لخطّ مستقيم، أو متضمّنة لهذا الخطّ المستقيم، في حالة الأسطوانة. يبدأ بتعريف("تحديد") السطح الأسطوانيّ، ثم الأسطوانة، على غرار ما قام به أبلونيوس في كتاب "المخروطات" عندما عرّف أوّلاً السطح المخروطيَّ ومن ثمّ المخروط. كما أنّه يتبع ترتيب أبلونيوس للتعريفات: المحور، الخطّ المولد، القاعدة، الأسطوانة القائمة أو المائلة.

يعرّف ثابت ارتفاع الأسطوانة، الخارج من مركز القاعدة. حتى وإن لم يظهر تعريفٌ مشابه له عند أبلونيوس، فإنّ دور المستوي الذي يتضمّن المحور والارتفاع (فيكون عموديّاً على القاعدة) عند ثابت، وكذلك دور المستوي المارّ بالمحور والعمودي على القاعدة عند أبلونيوس، جليٌّ عند المؤلفيْن، ابتداءً من القضيّة الخامسة عند أبلونيوس والقضيّة التاسعة عند ثابت. هذا المستوي، الذي نسمّيه المستوي الرئيسيّ، هو مستوي تناظرٍ للمخروط وللأسطوانة؛ وهنا تكمن أهميّته.

لا يعطي ثابت، ونحن نفهم ذلك، تعاريف القطر والقطرين المترافقين وكذلك المحورين بالنسبة إلى منحنٍ، وهي التعاريف التي نجدها في بداية كتاب "المخروطات". ولكنه يعطي تعريف المولدين المتقابلين، وهو التعريف الذي لا يظهر بالطبع عند أبلونيوس.

يتأكد التشابه بين مساريْ المؤلَّفين عندما ندرس القضايا الأولى في كتاب ثابت. فالقضايا ١، ٢، ٣، ٤، ٨، ٩، ١٠ و ١١ متوافقة على التوالي مع القضايا ١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٩ و١٣ عند أبلونيوس. لندرس بشكل سريع هذا التوافق. ولنأخذ في البداية القضيّتين ٥ و ٦ عند ثابت، اللتين تعرضان شرطاً ضروريّاً وكافياً لكي يكون قطع الأسطوانة، بواسطة مستوٍ موازٍ للمحور أو متضمّناً له، مستطيلاً. ولنأخذ القضيّة ٧، عند ثابت، التي تـُعرِّف الإسقاط الأسطواني. فنلاحظ أنَّ القضايا ٥ و ٦ و٧، ، ليس لها ما يقابلها عند أبلونيوس. وبالعكس لا

نجد بالطبع عند ثابت قضايا متوافقة مع القضايا ٦، ٧ و ٨، عند أبلونيوس، التي تخصُّ القطع المكافئ أو القطع الزائد. لنلاحظ بعد ذلك أنّ التشابه بين القضايا الأربع الأولى عند ثابت والقضايا الأربع الأولى عند أبلونيوس هو على درجة من الوضوح بحيث لا يستأهل التوقّف عنده[٢]. أمّا في القضيّتين ٩ عند ثابت و ٥ عند أبلونيوس، فإنّ التوافق يحصل بين الطريقتين المتبعتين. فالطريقة المستخدَمة لدراسة قطعٍ بواسطة مستوٍ مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة هي نفسها: إنّها ترتكز على خاصيّة مميِّزة للدائرة، نعبِّر عنها جبريّاً بالعلاقة ($y^2 = x(d-x)$، حيث d هو قطر الدائرة (الذي يُشكل مع خطّ التماس في أحد طرفيه، محوريْ مَعْلَم الإحداثيات). في القضيّتين ٨ و ١٠ يستخدم ثابت الإسقاط الأسطواني، وفي القضيّتين ١٠ و ١١ تختلف الطريقتان. في القضيّة ١٠ يبيِّن ثابت أنّ القطعَ المعنيَّ بالدرس هو قطع ناقص أو دائرة، وفي القضيّة ١١ يبيّن أنّه لا يمكن أن يكون دائرة، في حين أنّ أبلونيوس في القضيّة ٩ يبدأ بإثبات أنّه ليس دائرة، ليميِّز بعد ذلك في القضيّة ١٣ القطع الناقص بواسطة معادلته الأساسية، ويستنتج من ذلك خاصيّة مميِّزة في القضيّة ٢١؛ ويستخدم ثابت هذه الخاصيّة الأخيرة في القضيّتين ١٠ و ١١، عندما يثبت أنّ القطع المستوي الحاصل ليس سوى القطع الناقص الذي حدّده أبلونيوس. ويستند ثابت، بعد القضيّة ١١، إلى أبلونيوس بكلِّ ما يتعلق بخصائص القطع الناقص: الأقطار المترافقة، القطر الأصغر والقطر الأعظم، الخ ...

لقد وجد ثابت، إذاً، في "مخروطات" أبلونيوس نموذجاً لإعداد نظريّته في الأسطوانة، فطوَّر، لمتطلبات هذه النظريّة، دراسة التحويلات الهندسيّة. هذه هي السِّمة الثانية لمؤلَّف "في قطوع الأسطوانة" الذي أشرنا إليه.

وذلك، أنّ ثابت يستخدم، في القضيّتين ٧ و ٨ من مؤلَّفه، الإسقاط الأسطواني p لمستوٍ على مستوٍ آخر موازٍ له، في حين إنّه في القضيّة ١٠ ينتقل إلى الإسقاط الأسطواني لمستوٍ على مستوٍ آخر اختياريّ. وفي الجزء الثاني من القضية الأخيرة هذه يركب إسقاطين

[٢] انظر القضايا الأربع الأولى ضمن:
Apollonius Pergaeus, éd. J.L. Heiberg (Stuttgart, 1974), tome **I**; *Les coniques d'Apollonius de Perge*, trad. Paul Ver Eecke (Paris, 1959).

أسطوانيّين. ويبيّن، في القضيّة ١٢، أنَّ قِطعَين ناقصين لهما نفس المركز I، ويكون محورا أحدهما (a,b) متسامتين على التوالي مع محوري الآخر (a',b') مع تحقيق العلاقة $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$، يتوافقان في تحاكٍ h، هو $h\left(I,\frac{a'}{a}\right)$؛ ويظهر هذا التحاكي كتركيب من إسقاطين أسطوانيَّين ومن التحاكي بين دائرتي القاعدتين.

يذكر ثابت بأنّ نسبة قطعتين ما تساوي نسبة مثيلتيهما، لكلّ من الإسقاط الأسطواني p والتحاكي h.

تُحدّد القضيّة ١٣ التماثل، بواسطة تآلف عمودي، بين القطع الناقص وكلٍّ واحدة من الدائرتين ذواتي القطرَيْن المطابقيْن على التوالي لمحورَي القطع الناقص. هنا، تُحفَظ فقط نسبتا القطعتين العموديتين على محور التآلف، أو الموازيتين له. في القضيّة ١٤ يبيّن ثابت أنّ نسبة مساحتيْ متعدّديْ أضلاع، متماثلين في تآلف f نسبته $\frac{a}{b}$، تتساوى مع نسبة هذا التآلف، ويبيّن أنّه بالإمكان الانتقال من قطع ناقص إلى دائرة مكافئة له (أي مساحتها مساوية لمساحته)، بواسطة التحويل hof، حيث يكون h تحاكياً نسبته $\sqrt{\frac{b}{a}}$. وهكذا حدَّد تحويلاً بحيث تكون مساحتان متماثلتان متساويتين، وقد استخدم لاحقاً هذا التحويل في القضايا ١٥، ١٦ و ١٧ للحصول على قطعة دائرة، مكافئةٍ لقطعة قطع ناقص. في هذه الحالات الثلاث يُستنبط بناءٌ هندسي بسيط من التحويل hof. وفي القضيّتين ٢٤ و ٢٦، فإنّ النتيجة، المثبتة في البداية لقطعين ناقصين متحاكيين، تُعمَّم فيما بعد على قطعين ناقصين متشابهين. ويحدّد ثابت الإزاحة التي تسمح بالانتقال من التحاكي إلى التشابه. فضلاً عن ذلك، يُدخِل في القضيّة ٩ التناظرَ العموديَّ بالنسبة إلى مستوٍ، بحيث يُحوِّل دائرة القاعدة إلى قَطع ناقص بواسطة مستوٍ مخالفٍ للوضع بالنسبة إلى القاعدة.

إنّ استخدامات هذه التحويلات عديدة، ودورها أساسي للغاية في الحصول على النتائج، فلا يمكن أن تكون وليدة الصدفة. فضلاً عن ذلك، لقد بقي هذا الاستخدام للتحويلات قائماً، كما ذكرنا، بعد ثابت في هذا الميدان وفي ميادين أخرى. هذه الوسائل كلها هي التي سمحت، على أيِّ حال، لثابت بمتابعة إعداد نظريّة الأسطوانة وقطوعها.

لننتقل الآن إلى شرح قضايا ثابت، لكي نتتَبَّعَ استخدام هذه الوسائل في المسار الفعلي لمشروعه ونكشفَ تناوله في هذا السياق للطرائق الأرشميدية. لذلك سنقارن، كلما دعت الحاجة، مسار ثابت بمسار أرشميدس، آملين الحصول من هذا البحث المقارن على إدراكٍ أفضل لمساهمة ثابت. ولن يغيب عن بالنا مطلقاً أنّ هذا الأخير لم يكن مطلعاً على مؤلَّف "المخروطيّات والكرويّات" لأرشميدس.

لنبدأ بالتذكير بالرموز المستخدَمة:

D_1 : "سهم" الأسطوانة أو محور الأسطوانة

D_2 : "ضلع" الأسطوانة أو الخطّ المُوَلد للأسطوانة.

D_3 : السطح الجانبي للأسطوانة

D_4 : الأضلاع المتقابلة

D_5 : ارتفاع الأسطوانة

D_6 : أسطوانة قائمة (إذا كان الارتفاع يساوي المحور)

D_7 : أسطوانة مائلة (إذا كان الارتفاع يختلف عن المحور)

٢ ـ٤ ـ٢ الشرح الرياضي

٢ ـ٤ ـ٢ ـ١ القطوع المستوية للأسطوانة

القضيّة ١ ـ كلُّ خطٍّ مولد(ضلع) لأسطوانة يكون موازياً لمحورها.

وفق التعريف، يكون الخطّ المولد والمحور في نفس المستوي، ويكون لدائرتي القاعدتين نصف القطر نفسه. تـُستنبط النتيجة مباشرة بتطبيق القضيّة ٣٣ من المقالة الأولى من "الأصول" لأقليدس.

القضيّة ٢ ـ الخطوط المستقيمة الوحيدة الواقعة على السطح الجانبي للأسطوانة هي الخطوط المولدة.

يستخدم ثابت برهان الخلف، مرتكزاً على الخاصيّة التالية: كلُّ خطٍّ مستقيم له مع كلّ دائرة نقطتان مشتركتان على الأكثر.

القضـيّة ٣ـ إذا قطَـع مسـتوٍ، يتضـمّن المحـور أو يـوازي المحـور، السـطحَ الجـانبيَّ للأسطوانة، فإنَّ تقاطعهما يكون على خطّين مستقيمين. وإذا لم يتضمّن المستوي المحورَ ولم يكن موازياً له، فإنّ التقاطع لا يكون على خطٍّ مستقيم.

يستخدم البرهان القضيّتين ١ و ٢ ويرتكز على وحدانيّة الخطّ المستقيمِ الموازي لخطّ مستقيم معلوم والخارج من نقطة معلومة.

القضيّة ٤ـ إذا قطع مستوٍ، يتضمّن المحور أو يوازي المحور، أسطوانة، يكون القطعُ متوازيَ أضلاع.

نستنتج مباشرة هذه النتيجة من القضيّة ٣ باستخدام القضيّة ١٦ من المقالة الحادية عشرة من "أصول" أقليدس.

في حالة الأسطوانة القائمة، يكون القطع مستطيلاً.

القضيّة ٥ـ لكي يقطع مستوٍ، مارٌّ بمحورِ أسطوانة مائلة، هذه الأسطوانة وفق مستطيل، يجب ويكفي أن يكون عموديّاً على المستوي الأساسي.

القضيّة ٦ـ لكي يقطع مستوٍ، موازٍ لمحور أسطوانة مائلة، هذه الأسطوانة وفق مستطيل، يجب ويكفي أن يكون عموديّاً على المستوي الأساسي.

القضيّتان ٥ و ٦ هما نتيجتان مباشرتان للقضيّة ٤ وتثْبتَان باستخدام خصائص المستويات العموديّة وخصائص الخطوط المستقيمة العموديّة على المستوي (القضيّتان ١٨ و ١٩من المقالة الحادية عشرة من "أصول" أقليدس).

القضيّة ٧ـ إذا كان لدينا مستويان متوازيان (P) و (P')، ونقطة A حيث $A\in(P)$، ونقطة E حيث $E\in(P')$، وشكلٌ F في المستوي (P)، تقطع الخطوط المستقيمة الموازية لـ AE والمارّة بنقاط الشكل F المستويَ (P')، وتكون نقاط التقاطع على شكل F' مشابه ومساوٍ للشكل F.

تتناول القضيّة ٧ إذاً دراسة للإسقاط الأسطواني، على موازاة AE، لشكلٍ F موجودٍ في المستوي (P)، على المستوي (P') الموازي للأوّل.

وبالرغم من أنّ التحويل المدروس هنا هو أيضاً انسحاب بالمتجه AE، فإنّ ما يتبع يُبيِّن أنَّ ثابتاً يسعى إلى تمييز الإسقاط الأسطواني حتى في الحالة التي يكون فيها المستويان (P) و (P') غير متوازيين، كما سنرى ذلك في القضيّة ١٠.

البرهان، هنا، هو برهان الخُلف.

الشكلان F و F' هما إذاً مُتقايسان.

القضيّة ٨- قِطْع السطح الجانبي لأسطوانة بواسطة مستوٍ موازٍ للقاعدة هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة ومتمركزة على المحور.

وبشكل أعمّ، فإنّ قطعي السطح الجانبي لأسطوانة، بواسطة مستويين متوازيين يقطعان جميع الخطوط المولدة، هما شكلان مُتقايسان.

القضيّة ٨ هي تطبيق للقضيّة ٧.

القضيّة ٩- القطوع المخالفة لوضع القاعدة.

١- تعريف المستويات المخالفة لوضع القاعدة: لنأخذ أسطوانة مائلة دائريّة القاعدتين محورها GH وارتفاعها GI؛ فإنَّ المستوي P وهو مستوي القاعدة والمستوي P' غير الموازي لـِ P يسمّيان مخالفين في الوضع إذا تحقّق الشرطان التاليان:

١) المستوي P' عمودي على المستوي GHI، أي على مستوي التناظر للأسطوانة؛

٢) يتقاطع المستوي (GHI) مع كلّ من المستويين P و P' وفقاً لخطَّين مستقيمين مخالفَي الوضع، أي يشكّلان مع المستقيم GH زاويتين متساويتين.

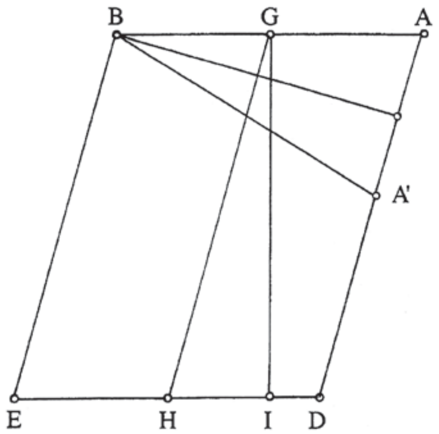
٢- في حالة الأسطوانة المائلة، فإنّ المستوي المنصِّف للمستويين P و P'، العمودي على GH يكون مستوي قطع قائم للأسطوانة، ويكون مستوي تناظر يحوِّل دائرة القاعدة إلى دائرة مخالفة الوضع واقعة في P'. سنرى أنّ هذا المستوي يعطي قطعاً أصغريّاً (القضيّتان ١٨ و ١٩).

٣- يتقاطع السطح الجانبي للأسطوانة مع مستوٍ مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة، وفقاً لدائرة متمركزة على محور الأسطوانة ومساوية لدائرة القاعدة، أو لجزء من دائرة كهذه.

يُسمـّي ثابـت هـذه الـدائرة "قطعـاً مخـالف الوضـع" - τομὴ ὑπεναντία ـ مثلمـا فعـل أبلونيوس في حالة المخروط (القضيّة الخامسة من المقالة الأولى).

الطريقـة التــي اتبعهـا ثابـت هــي طريقـة أبلونيـوس؛ إنّهـا تسـتخدم خاصـيّة الـدائرة: $MN^2 = NO \,.\, NS$، وهـذه هـي معادلـة الـدائرة المنسـوبة إلـى مَعْلَـم الإحـداثيات ذي المحـورين المشكلين من قطرٍ للدائرة ومن خطّ التماسّ في أحد طرفيه؛ وهي تكتب: $y^2 = x(d-x)$، حيث يكون d قطر الدائرة.

لكي نفهم بشكل أفضل بعض جوانب مسار ثابت في القضيّتين ٨ و ٩، لنأخذ الشكل في مستوي تناظر الأسطوانة. متوازي الأضلاع $ABED$ هو المسقط العمودي للأسطوانة على هذا المستوي، والقطعتان AB و DE هما مسقطا دائرتيْ القاعدتين.



حدَّد ثابت، في القضيّة ٨، فصيلة من الدوائر حيث يكون AB أحد ممثّليها.

إذا كانت A' نقطـة من AD بحيث يكـون $BA = BA'$، يكـون لـدينا $\widehat{BAA'} = \widehat{AA'B}$، إذاً $A'B$ هو مسقط مستوٍ مخالف الوضع. وهكذا حدَّد ثابت في القضيّة ٩ فصيلة من الدوائر حيث يكون $A'B$ أحد ممثّليها.

منصّفُ الزاويـة $\widehat{ABA'}$ هو المسقط العمودي لمستوٍ عمودي على المحور، وهو ممثّل لفصيلة من المستويات.

كلُّ مستوٍ من هذه الفصيلة يكون مستوي تناظرٍ للشكل المؤلَّف من دائرةٍ من الفصيلة الأولى ودائرةٍ من الفصيلة الثانية.

القضيّة ١٠- المسقط الأسطواني للدائرة (ABC) ذات المركز D على المستوي (P)، غير الموازي لمستوي الدائرة، هو دائرة أو قطع ناقص.

لنسمِّ p الإسقاط الأسطواني الذي نتناوله.

أ) يمر المستوي (P) بالنقطة D. ويقطع المستويَ (ABC) وفق القطر AB. ليكن DC مع $DC \perp AB$. لكلّ نقطة E من الدائرة، مسْقطة عموديّاً في النقطة H على AB، يكون لدينا $EH^2 = HA.HB$، أيْ $y^2 = x(2a-x)$، إذا كان $AB = 2a$.

إذا كان $F = p(E)$، فإنّ المثلّث FEH يُحدَّد بتشابهٍ ما على التقريب، وإذا كان $G = p(C)$، يكون لدينا $\frac{EH}{FH} = \frac{DC}{DG} = k$، فنحصل على $k^2 FH^2 = HA.HB$. في المستوي (P)، FH هي خطّ الترتيب (الإحداثيّة الثانية) y' بالنسبة إلى AB، $FH // GD$، ولأيّ نقطة F مع $F = p(E)$، يكون لدينا:

$$k^2 y'^2 = x(2a-x)\text{، مع } 0 \le x \le 2a.$$

مجموع النقاط F هو، إذاً، دائرة أو قطع ناقص.

ب) لا يمر المستوي (P) بالنقطة D. ليكن (P') مستوياً موازياً لِـ (P) ومارّاً بالنقطة D، إذا كان p مسقط (ABC) على (P)، و p' مسقط (P') على (P)، و p'' مسقط (ABC) على (P')، حيث تكون الإسقاطات الثلاثة على موازاة خطّ مستقيم واحد. وفق القضيّة ٧، يكون p' إزاحة؛ يستخدم ثابت هنا، كما نرى، التحويل المركب من p و p' : $p = p' \circ p''$.

الشكل الحاصل في (P) يساوي، إذاً، الشكل الحاصل في (P')، إنّه دائرة أو قطع ناقص.

نشير إلى أنّ ابن أبي جرّادة، وهو رياضيّ من القرن الثالث عشر، عند شرحه لهذه القضيّة، درسَ الإسقاط الأسطواني لقطع ناقص وقدّم فيه عرضاً أكثر أهميّة [راجع التعليق الإضافيّ].

القضيّة ١١ـ لتكن (C) أسطوانة مائلة قاعدتاها ABC و DEF. وليكن (P) مستوياً غير موازٍ لِـ (ABC)وغير مخالف لوضع(ABC)، لا يتضمّن المحور ولا يتوازى معه. وإذا كان لدينا أيضاً $(P)\cap(ABC)=\varnothing$ و $(P)\cap(DEF)=\varnothing$، فإنّ $(P)\cap(C)$ قطع ناقص.

يميّز ثابت بين حالتين، عندما يكون خطّ التقاطع بين المستوي P والمستوي الأساسي موازياً للقاعدتين أو غير موازٍ لهما.

استناداً إلى القضيّة ١٠ نعرف أنّ $(P)\cap(C)$ دائرة أو قطع ناقص. يبيّن ثابت بواسطة برهان الخُلف المرتكز على وحدانيّة العمود الخارج من نقطة على مستقيم أنّ $(P)\cap(C)$ لا يمكن أن يكون دائرة.

ينتج من القضايا ٨ و ٩ و ١١ أنّ الدوائر الوحيدة الواقعة على أسطوانة مائلة هي قطوع بواسطة مستويات متوازية مع مستويَيْ القاعدتين أو مخالفة الوضع بالنسبة إلى هذين المستويين.

٢ ـ٤ ـ٢ ـ٢ مساحة القطْع الناقص وقِطَعه

القضيّة ١٢ـ إذا قطعنا بمستوٍ أسطوانتين دائريَّتَيِ القاعدتين، ولهما نفس المحور ونفس الارتفاع، نحصل على قطعَين ناقصين مُتحاكيَيْن، ويكون مركزُ التحاكي المركز المشترك الواقع على المحور ونسبة التحاكي هي نسبة قطري دائرتيْ القاعدتين للأسطوانتين.

يأخذ ثابت كخاصيّة مميّزة لقطعين ناقصين متشابهين، محورا كلٍّ منهما على التوالي $(2a,2b)$ و $(2a',2b')$، المتساوية $\frac{a'}{a}=\frac{b'}{b}$.

لم يثبت أبلونيوس هذه المتساوية في القضيّة ١٢ في المقالة السادسة من كتاب "المخروطات"، لكنها نتيجة لهذه القضيّة (راجع التعليق الإضافيّ).

إذا كان d و d' قطرَي دائرتي القاعدة، وكان δ و δ' قطرين ما متسامتين في القطع الناقص الأعظم والقطع الناقص الأصغر، يكون لدينا: $\frac{\delta'}{\delta}=\frac{d'}{d}$، وذلك مهما كان اختيار القطرين المتسامتين، فنحصل على: $\frac{d'}{d}=\frac{2a'}{2a}=\frac{2b'}{2b}=\frac{\delta'}{\delta}$.

التحاكي $h\left(I,\frac{a'}{a}\right)$، حيث يكون I المركز المشترك للقطعين الناقصين، قد حُدِّد انطلاقاً من تساوي النسبتين الناتج فقط من الإسقاط الأسطواني على موازاة محور الأسطوانة.

القضيّة ١٣ـ ليكن قطع ناقص محوره الأعظم $AC=2a$ ومحوره الأصغر $2b$، ولتكن الدائرة ذات القطر AC. لكلِّ عمود على AC يقطع الدائرة والقطع الناقص والمحور على التوالي في G و H و I، يكون لدينا $\frac{GI}{HI}=\frac{b}{a}$.

يستخدم البرهان الخاصيّة المميِّزة للدائرة وخاصّية القطع الناقص المنسوبتين إلى القطر AC. يكون لدينا: $y^2=x(2a-x)$ وَ $y'^2=\frac{cx}{2a}(2a-x)$ (c هو الضلع القائم بالنسبة إلى المحور AC)؛ فيكون: $\frac{y'^2}{y^2}=\frac{c}{2a}=\frac{b^2}{a^2}$.

وهكذا حدّد ثابت تآلفاً عموديّاً محوره AC ونسبته $\frac{b}{a}$، مع $\frac{b}{a}<1$، بحيث يكون القطعُ الناقص، في هذا التآلف، صورة الدائرة ذات القطر AC، وهذا التآلف هو تقلص.

كذلك، فإنّ القطع الناقصَ هو صورة الدائرة، التي قطرها هو المحور الأصغر للقطع الناقص، في تآلف عمودي نسبته $\frac{a}{b}$، مع $\frac{a}{b}>1$. فيكون هذا التآلف تمدّداً.

- لنأخذ في نظام إحداثيّات متعامد، مع $b<a$، ما يلي:

$$(C_1)=\left\{(x,y),\ x^2+y^2=a^2\right\}$$

$$(C_2)=\left\{(x,y),\ x^2+y^2=b^2\right\}$$

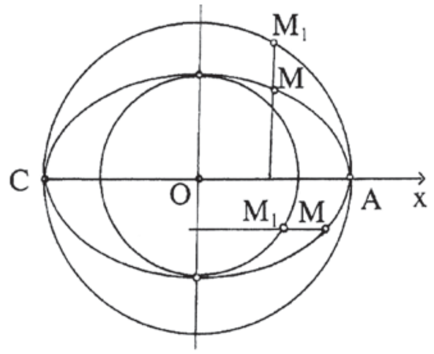
$$(E)=\left\{(X,Y),\ \frac{X^2}{a^2}+\frac{Y^2}{b^2}=1\right\}$$

1) ليكن $(E)=\varphi\left(\left(C_1\right)\right)$ مع $\varphi:(x,y)\rightarrow(X,Y)$، حيث يكون $X=x$ وَ $Y=\frac{b}{a}y$،

وتكون الدالة φ تقلصاً.

2) ليكن$(E)=\psi\left(\left(C_2\right)\right)$ مع $\psi:(x,y)\rightarrow(X,Y)$ حيث يكون $X=\frac{a}{b}x$ وَ $Y=y$،

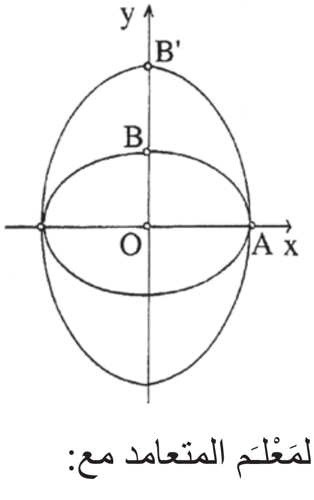
وتكون الدالة ψ تمدُّداً.



• إذا سمّينا المحورَ الأعظم والمحورَ الأصغر لقطعٍ ناقص، أو قطرَ دائرةٍ أقطاراً رئيسيّة، فإنّ القضيّة ١٣ تكون مكافئة لما يلي:

ليكن لدينا قطعان مخروطيّان مغلقان، قطع ناقص أو دائرة، وليكن لهما قطر رئيسيٌّ مشترك $2a$ وقطر ثانٍ هو $2b$ و $2b'$، فيُستخرج أحدهما من الآخر بواسطة تآلف عموديّ:

$$\begin{pmatrix} \frac{x'}{y'} \end{pmatrix}=A\begin{pmatrix} \frac{x}{y} \end{pmatrix} \quad \text{مع} \quad A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{b}{b'} \end{pmatrix}،$$



حيث تنُسَب الإحداثيّات إلى نفس المَعْلَم المتعامد مع:

$\overline{OA}=a$ ، $\overline{OB}=b$، $\overline{OB'}=b'$، $\overline{OB'}\neq a$ أو $\overline{OB'}=a$.

القضيّة ١٤- إذا كانت S مساحة القطع الناقص ***E***، ذي المحورين $2a$ و $2b$، و Σ مساحة الدائرة E ذات نصف القطر r حيث $r=\sqrt{ab}$، يكون لدينا، عندئذ، S=Σ.

لنستخدم الرموز:

S مساحة القطع الناقص ***E*** ← S_n مساحة P_n المحاط بـِ ***E***

Σ مساحة الدائرة المكافئة E ← Σ_n مساحة Π_n المحاط بـِ E

S' مساحة الدائرة ***C*** المحيطة ← S'_n مساحة P'_n المحاط بـِ ***C***.

برهان ثابت بن قرّة

أ) إذا كانت $S>\Sigma$، فإنّ

$$S=\Sigma+\varepsilon \qquad (1)$$

ليكن P_n متعدّدَ أضلاعٍ، عدد أضلاعه 2^{n+1}، محاطاً بالقطع الناقص ***E***، وناتجاً عن P_{n-1} الذي نضاعف عدد رؤوسه عندما نقطع القطع الناقص بواسطة أقطار تمر في منتصفات أضلاع P_{n-1}. متعدّد الأضلاع الأوّل P_1 هو المعيّن المحدّد بواسطة رؤوس القطع الناقص. إذا كانت S_n مساحة P_n، يكون لدينا على التوالي:

$$S_1>\frac{1}{2}S\Rightarrow S-S_1<\frac{1}{2}S،$$

$$S_2-S_1>\frac{1}{2}(S-S_1)\Rightarrow S-S_2<\frac{1}{2^2}S$$

....

$$S_n-S_{n-1}>\frac{1}{2}(S-S_{n-1})\Rightarrow S-S_n<\frac{1}{2^n}S؛$$

يوجَد، عندئذ، لكلِّ ε محدّد بواسطة العلاقة (1)، عدد n، مع $(n\in N)$ بحيث يكون $\frac{1}{2^n}S<\varepsilon$، فنحصل على: $S-S_n<\varepsilon$، $S_n>\Sigma$.

نأخذ عندئذ الدائرة C ومتعدّد الأضلاع P'_n المستخرَجين من E و P_n بواسطة التآلف العمودي ذي النسبة $\frac{a}{b}$، ولتكن S'_n مساحة P'_n و S' مساحة C، فيكون:

$$\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a} = \frac{ab}{a^2} = \frac{\Sigma}{S'}؛$$

لكن $S_n > \Sigma$ ، فنحصل على: $S'_n > S'$، وهذا محال.

ب) إذا كانت $S < \Sigma$، يكون لدينا: $\frac{S}{S'} < \frac{\Sigma}{S'}$، فنحصل على:

$$(2) \qquad \frac{\Sigma}{S'} = \frac{S}{S' - \varepsilon'}.$$

لنتناول مجدّداً الدائرة C والمضلعات السابقة P'_n، يكون لدينا على التوالي:

$$S' - S'_1 < \frac{1}{2} S'$$

$$S' - S'_2 < \frac{1}{2^2} S'$$

$$........$$

$$S' - S'_n < \frac{1}{2^n} S'،$$

يوجد عندئذ، لكلّ ε' محدَّد بالعلاقة (2)، عدد n $(n \in N)$ بحيث يكون $\frac{1}{2^n} S' < \varepsilon'$ ، فيكون:

$$(3) \qquad S' - S'_n < \varepsilon'.$$

إذا كان P_n متعدّدَ الأضلاع المحاطَ بِـ E، الموافق لـِ P'_n في التآلف العمودي ذي النسبة $\frac{b}{a}$ ، يكون: $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{\Sigma}{S'} = \frac{S}{S' - \varepsilon'}$؛ ولكنَّ لدينا، وفق العلاقة (3)، $S'_n > S' - \varepsilon'$، فنحصل على: $S_n > S$؛ وهذا محال.

من أ) و ب) نستنتج، إذاً، أنَّ: $S = \Sigma$.

ملاحظات

ننتقل من القطع الناقص E إلى الدائرة C بواسطة التمدّد العموديّ f ذي النسبة $k_1=\frac{a}{b}$؛ وننتقل من الدائرة C ذات نصف القطر a إلى الدائرة E، ذات نصف القطر r بحيث يكون $r^2=ab$، بواسطة تحاكٍ h نسبته k_2 حيث يكون $k_2=\frac{r}{a}=\frac{\sqrt{ab}}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$. يكون إذاً: E $hof\,(E)=$ ، والتحويل hof يحفظ المساحات، لأنّ $k_1\cdot k_2^2=1$.

إنَّ هدف القضيّة ١٤ بالتحديد هو إثبات هذه الخاصيّة في حالة القطع الناقص E.

يستخدم ثابت العلاقة $\frac{\Sigma}{S'}=\frac{b}{a}=k_2^2$ ويبيّن أنّ $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{b}{a}=\frac{1}{k_1}$ مهما كان n، فيكون:

$$S=\Sigma\Leftrightarrow\frac{S}{S'}=\frac{\Sigma}{S'}\Leftrightarrow\frac{S}{S'}=\frac{S_n}{S'_n}.$$

تتوافق طريقة ثابت، إذاً، مع المرحلتين التاليتين:

أ) $\frac{S_n}{S'_n}<\frac{S}{S'}$، فيكون $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{S-\varepsilon_1}{S'}$ (1).

نبيّن أنّه يوجَد مُضلع P_n مُحاط بالقطع الناقص E بحيث يكون $S-\varepsilon_1<S_n<S$؛ غير أنّ $C\supset P'_n=f\left(P_n\right)$ تحقّق العلاقة (1)، فنحصل على $S'_n>S'$، وهذا محال.

ب) $\frac{S_n}{S'_n}>\frac{S}{S'}$، فيكون $\frac{S_n}{S'_n}=\frac{S}{S'-\varepsilon_2}$ (2).

نبيّن أنّه يوجَد مُضلع $C\supset P'_n$ بحيث يكون $S'-\varepsilon_2<S'_n<S'$؛ غير أنّ $E\supset P_n=f^{-1}\left(P'_n\right)$ تحقّق العلاقة (2)، فيكون $S_n>S$، وهذا محال.

لقد أثبتنا، إذاً، أنَّ: $\frac{S}{S'}=\frac{S_n}{S'_n}$.

إذاً، انطلاقاً من خاصيّة التآلف العمودي، التي تقول إنّ نسبة المساحتين S'_n و S_n للمضلعين المتشابهين P_n و P'_n، مهما كان n، تساوي نسبة التآلف $\frac{a}{b}$، يستنتج ثابت أنّ النتيجة نفسها تنطبق على المساحة S للقطع الناقص E والمساحة S' للدائرة C. وهذا يرجع

إلى القول إنّ النسبة تبقى محفوظة بعد المرور إلى الحدّ عندما يسعى n إلى ما لا نهاية:

$$\forall n \quad \frac{S_n}{S'_n}=\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad \frac{S}{S'}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} S_n}{\lim\limits_{n\to\infty} S'_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{S'_n}=\frac{b}{a}.$$

يُمكن أن نلاحظ أنّ لوكا فاليريو (*Luca Valerio*) أخذ هذا النوع من القول كقاعدة لطريقته[٣]. وهذه الطريقة لا تُدخل المجاميعَ التكامليّة في الاستدلال.

ولقد حصل أرشميدس على هذه النتيجة نفسها في مؤلّف "المخروطيّات والكرويّات"، في القضيّة ٤. لكنَّ رياضيّي ذلك العصر، بما فيهم ثابت، لم يكونوا على علم بهذا الكتاب. والمقارنة بين مساريْ الأوّل والثاني لها فائدة مضاعفة، إذ سيكون باستطاعتنا أن نفهم بشكل أفضل مساهمة رياضيِّي القرن التاسع، وأن نعي أيضاً بشكل أفضل معرفة رياضيّي ذلك العصر بأعمال أرشميدس.

يمكن إعادة كتابة القضيّة ٤ من مؤلَّف "المخروطّيات والكرويّات"[٤]، إذا استخدمنا رموز القضيّة ١٤ عند ثابت، فنكتب:

"نسبة المساحة S لقطع ناقص $\boldsymbol{E}$، محوره الأعظم $2a$ ومحوره الأصغر $2b$، إلى المساحة S' للدائرة $\boldsymbol{C}$ ذات القطر $2a$ هي $\frac{S}{S'}=\frac{b}{a}$".

يُحيل أرشميدس هذه القضيّة مباشرة إلى نصٍّ لقضيّة مكافئة للقضيّة الرابعة عشرة عند ثابت. يحدّد الدائرة Φ ذات المساحة Σ، بحيث يكون $\frac{\Sigma}{S'}=\frac{b}{a}$، ويكتب "أقول إنّ Φ مكافئة لـِ $\boldsymbol{E}$"، أي أنّ $\Sigma=S$. ليست الدائرة Φ سوى الدائرة E عند ثابت.

α) $\Sigma>S$.

[٣] انظر: *De Centro Gravitatis Solidorum Libri Tres* (Bologne, 1661), Livre II, prop. I-III, pp. 69-75.

[٤] انظر: Archimède, *Sur les conoïdes et les sphéroïdes*, texte établi et traduit par Charles Mugler, collection des Universités de France (Paris, 1970), Tome I, pp. 166-169.

ليكن Π_n مضلَّعاً متساوي الأضلاع، عدد أضلاعه 2^{n+1}، محاطاً بالقطع الناقص E وذي المساحة Σ_n بحيث يكون $\Sigma_n > S$. عندئذ، إذا كان φ_1 التشابهَ ذا النسبة $\sqrt{\frac{a}{b}}$ و φ_2 التآلفَ العمودي ذا النسبة $\frac{b}{a}$، يكون لدينا

$$\varphi_1: \ E \to C$$

$\Pi_n \to P'_n$ حيث يكون P'_n مضلَّعاً محاطاً بِـ $\boldsymbol{C}$

$$\varphi_2: \ C \to E$$

$P'_n \to P_n$ حيث يكون P_n مضلعاً محاطاً بِـ $\boldsymbol{E}$

يكون لدينا إذاً: $\frac{S'_n}{\Sigma_n} = \frac{a}{b}$ و $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$، فيكون: $S_n = \Sigma_n$؛ وهذا محال لأنّ $S_n < S$ ولأنّنا قد فرضنا $\Sigma_n > S$.

لنلاحظ أنّ أرشميدس لم يثبت أنّ التحويل φ_2 هو تآلف عمودي، وهو يستخدم $\frac{b}{a}$ بدون تعليل.

β) $\Sigma < S$.

ليكن P_n مضلَّعاً متساوي الأضلاع، عدد أضلاعه 2^{n+1}، محاطاً بِـ $\boldsymbol{E}$، بحيث يكون $S_n > \Sigma$.

$$\varphi_2^{-1}: \ E \to C \quad P_n \to P'_n \qquad ، \qquad \varphi_1^{-1}: \ C \to E \quad P'_n \to \Pi_n$$

يكون لدينا: $\frac{S'_n}{S_n} = \frac{a}{b}$ و $\frac{\Sigma_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$، فيكون $\Sigma_n = S_n$؛ وهذا محال لأنّ $\Sigma' < \Sigma_n$ ولأننا قد فرضنا $S_n > \Sigma'$.

من α) و β) نستنتج أنَّ $S = \Sigma$.

يأخذ ثابت قسميْ برهانه بترتيب معاكس للترتيب الذي اعتمده أرشميدس.

- $\Sigma < S$ (a بالنسبة إلى ثابت، β بالنسبة إلى أرشميدس).

يفصِّل ثابت شرح بناء متعدّدات الأضلاع P_n ويستخدم القضيّة ١٧ من المقالة الأولى لأبلونيوس ليُدخل العامل $\frac{1}{2}$ بهدف تطبيق القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس وذلك ليفسّر وجود n بحيث يكون $S - S_n < \varepsilon$، مع $\varepsilon = S - \Sigma$. في β لا يشرح أرشميدس بناء P_n، وهو يعتبر أنّه حاصل، كما في α، انطلاقاً من Π_n، لكنه لا يعطى هنا أيَّ تفسير لوجود n بحيث يكون $S_n > \Sigma$.

ينتقل ثابت بعد ذلك من P_n إلى P'_n بواسطة التمدّد العمودي $f = \varphi_2^{-1}$ الذي وصفه في القضيّة ١٣ واستخدمه أرشميدس بدون تعليل. والاثنان يثبتان أنّ $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$ من خلال تقسيم متعدّدات الأضلاع إلى مربّعات منحرفة وإلى مثلثات.

لا يعمد ثابت إلى إدخال Π_n المحاط بـِ E.

- $\Sigma > S$ (b بالنسبة إلى ثابت، α بالنسبة إلى أرشميدس).

ينطلق أرشميدس من Π_n ذي المساحة Σ_n والمحاط بـِ E بحيث يكون $\Sigma > \Sigma_n > S$.

لقد استخدم وجود مضلع كهذا في القضيّة الأولى من مؤلَّف "في مساحة الدائرة"، واعتبر هذا الوجود "بديهيّاً" في القضيّة السادسة من مؤلَّف "الكرة والأسطوانة" كما اعتبر أنّ هذا الوجود قد " نُقلَ في "الأصول" ". ينطلق ثابت مباشرة من P'_n ويعلِّل كما في الحالة أ) وجود n بحيث يكون $S' - S'_n < \varepsilon'$. والاثنان، كما في السابق، يستخدمان $\frac{S_n}{S'_n} = \frac{b}{a}$، كما أنّهما يستعملان كمصادرة القول التالي: من بين سطحين مستويين يحيط أحدهما بالآخر، فإنّ السطح المُحاط هو الأصغر.

ملاحظات حول أعمال أرشميدس

يستخدم أرشميدس الأسطوانة القائمة والمخروطَ القائم في العديد من قضايا المؤلَّف "الكرة والأسطوانة" (٧، ١٠، ١١، ١٢...). ومن بين المقدِّمات التي تسبق القضيّة ١٧، فإنَّ المقدّمة ٥ تبيّن بوضوح أنَّ المخروطات التي تناولها ذات أضلاع(أي خطوط مولدة) متساوية في الطول. ولا يجري الكلام في أيِّ مكان من النصّ عن أسطوانة مائلة أو عن

مخروط مختلف الأضلاع. فأرشميدس يتقيّد بتعاريف أقليدس (انظر القضيّتين ٢١ و ٢٨ من المقالة الحادية عشرة).

ولم يُعطِ أرشميدس أيّ تعريف للقطوع المخروطيّة الثلاثة ضمن مؤلَّفه في "المخروطيّات والكرويّات".

يستنتج أرشميدس من القضيّة ٤ قضيّتين –٥ و ٦– ولازمة نوردها فيما يلي.

القضيّة ٥- إذا كان E قطعاً ناقصاً محوراه 2a و 2b و C دائرة قطرها d، بحيث يكون $d = 2r$، يكون لدينا: $\frac{S(\mathrm{E})}{S(\mathrm{C})} = \frac{4\mathrm{ab}}{\mathrm{d}^2} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{r}^2}$.

القضيّة ٦- إذا كان E قطعاً ناقصاً محوراه 2a و 2b و E' قطعاً ناقصاً محوراه $2\mathrm{a}'$ و $2\mathrm{b}'$، يكون لدينا: $\frac{S(\mathrm{E})}{S(\mathrm{E}')} = \frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}'\mathrm{b}'}$.

لازمة - إذا كان E و E' متشابهين، يكون: $\frac{S(\mathrm{E})}{S(\mathrm{E}')} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}'^2} = \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{b}'^2}$.

القضيّتان ٢١ و ٢٢ اللتان استنتجهما ثابت من القضيّة ١٤، هما حالتان خاصتان من القضيّة ٥ عند أرشميدس. إذا كانت S_m مساحة القطع الناقص الأصغريّ، و S_M مساحة القطع الناقص الأعظميّ ، و S مساحة دائرة قاعدة الأسطوانة ويكون نصف قطرها r، يكون لدينا:

القضيّة ٢١- $\frac{S_m}{S} = \frac{b_m}{r}$ (لأنّ $a_m = r$).

القضيّة ٢٢- $\frac{S_M}{S} = \frac{a_M}{r}$ (لأنّ $b_M = r$).

القضيّة ٢٣ هي لازمة للقضيّتين ٢١ و ٢٢، لكنّها أيضاً نتيجة للقضيّة ٦.

القضيّة ٢٣- $\frac{S_m}{S_M} = \frac{b_m}{a_M}$.

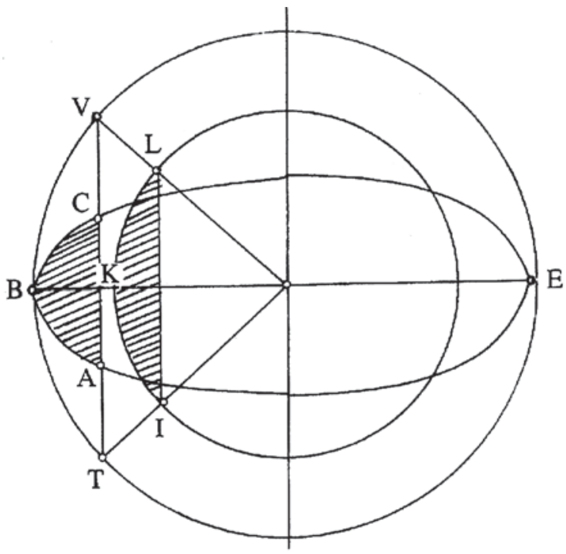
القضيّة ٢٧، التي يستنتجها ثابت من القضيّة ١٤، ليست سوى القضيّة ٦ ولازمتها عند أرشميدس.

القضيّة ١٥- ليكن $\boldsymbol{E}$ قطعاً ناقصاً محوره الأعظم $EB = 2a$ ومحوره الأصغر $2b$، ولتكن E الدائرة المكافئة ونصف قطرها $r = \sqrt{ab}$. الوتر AC $(AC \perp BE)$ والوتر IL من الدائرة يفصلان في $\boldsymbol{E}$ و E على التوالي القطعتين ABC ومساحتها S_1 و IKL ومساحتها $\sum_1$؛ إذا كان $\frac{IL}{\sqrt{ab}} = \frac{AC}{b}$، فيكون $S_1 = \sum_1$.

إذا كانت C الدائرة ذات القطر EB، فإنّ ثابت، بواسطة التآلف العموديّ f ذي المحور EB والنسبة $\frac{a}{b}$، يُرفق بالقطعة ABC قطعة هي TBV. يبني في القطعة ABC متعدّدَ أضلاع P_n بالطريقة المشار إليها في القضيّة ١٤ ويُرفق به بواسطة التآلف f متعددَ أضلاع P'_n. ويبيِّن أن القطعتين TBV و IKL تتماثلان في تحاكٍ نسبته $\sqrt{\frac{b}{a}}$؛ يكون، إذاً:

$$(IKL) = hof\left((ABC)\right). \qquad (1)$$

البرهان في هذه الحالة مطابق لبرهان القضيّة ١٤.



ملاحظة – من العلاقة (1) نستنتج بناءً هندسيّاً بسيطاً للقطعة IKL إذا عرفنا القطعة ABC وافترضنا أنّ القطع $\boldsymbol{E}$ والدائرة E مُتراكزان.

يكون لدينا بالفعل: $\frac{AC}{IL} = \sqrt{\frac{b}{a}}$ و $\frac{IL}{TV} = \sqrt{\frac{b}{a}}$، فيكون: $IL^2 = AC.TV$.

الوتر IL من الدائرة E هو متوسّط متناسب بين الوترين AC من القطع الناقص و TV من الدائرة، وهما الوتران القائمان على مستقيم واحد عموديّ على المحور BE، فنحصل على بناء بسيط للوتر IL.

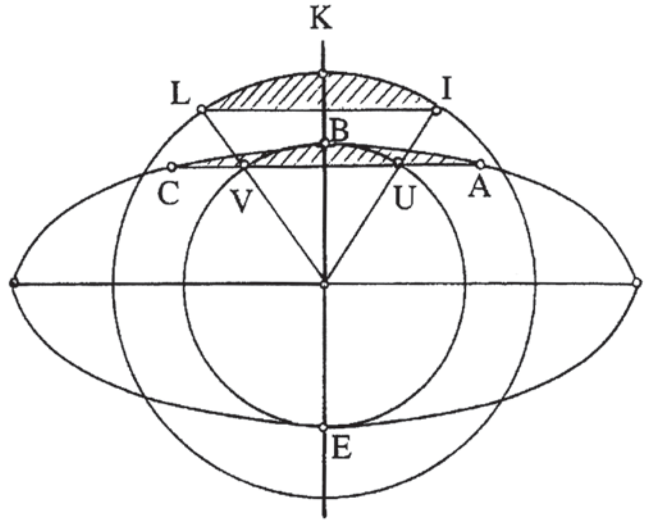
القضيّة ١٦- ليكن $\boldsymbol{E}$ قطعاً ناقصاً محوره الأصغر $EB = 2b$ ومحوره الأعظم $2a$، ولتكن E الدائرة المكافئة لـِ $\boldsymbol{E}$. الوتر AC $(AC \perp BE)$ والوتر IL من الدائرة يفصلان في $\boldsymbol{E}$ و E القطعتين (ABC) ومساحتها S_2 و (IKL) ومساحتها Σ_2. إذا كان: $\frac{AC}{a} = \frac{IL}{\sqrt{ab}}$، يكون: $S_2 = \Sigma_2$.

إذا كانت C الدائرة ذات القطر EB، فهي صورة $\boldsymbol{E}$ بواسطة التآلف f' ذي المحور EB والنسبة $\frac{b}{a}$، عندئذ يبني ثابت $(UBV) = f'((ABC))$.

تُستنتج الدائرة E من C بواسطة تحاكٍ، h'، نسبته $\sqrt{\frac{a}{b}}$، ويبيّن ثابت أنّ $(IKL) = h'(UBV)$، إذاً،

$$(IKL) = h' o f'(ABC). \qquad (2)$$

يُحدَّدُ المُضلّعان P_n و P'_n، كما جرى في السابق، ويكون البرهان بالتالي مماثلاً لبرهان القضيّة ١٤.



ملاحظة – من العلاقة (2) نستنتج بناءً هندسياً لِـ IKL.

كما في القضيّة ١٥، يمكن أن نكتب: $\frac{AC}{IL}=\sqrt{\frac{a}{b}}$ ويكون لدينا من جهة أخرى: $\frac{IL}{UV}=\sqrt{\frac{a}{b}}$،

فيكون: $IL^2 = AC.UV$.

القضيّة ١٧- ليكن E قطعاً ناقصاً وليكن DE أحد محوريه، ولتكن E الدائرة المكافئة وقطرها NO. نسقط العمودين AI و CK على DE من نقطتين A و C من القطع الناقص، ومن النقطتين L و M من الدائرة نسقط العمودين LP و MU على NO؛ إذا كان وضع LM بالنسبة إلى NO هو نفسه وضع AC بالنسبة إلى DE، وإذا كان وضع النقطتين P و U بالنسبة إلى مركز الدائرة هو نفسه وضع النقطتين I و K بالنسبة إلى مركز القطع الناقص، وإذا كان 2a المحور الأعظم و 2b هو المحور الأصغر، يكون لدينا: $\frac{AI}{b}=\frac{LP}{\sqrt{ab}}$

و $\frac{CK}{b}=\frac{MU}{\sqrt{ab}}$ (عندما يكون $DE=2a$)

أو $\frac{AI}{a}=\frac{LP}{\sqrt{ab}}$ و $\frac{CK}{a}=\frac{MU}{\sqrt{ab}}$ (عندما يكون $DE=2b$)؛

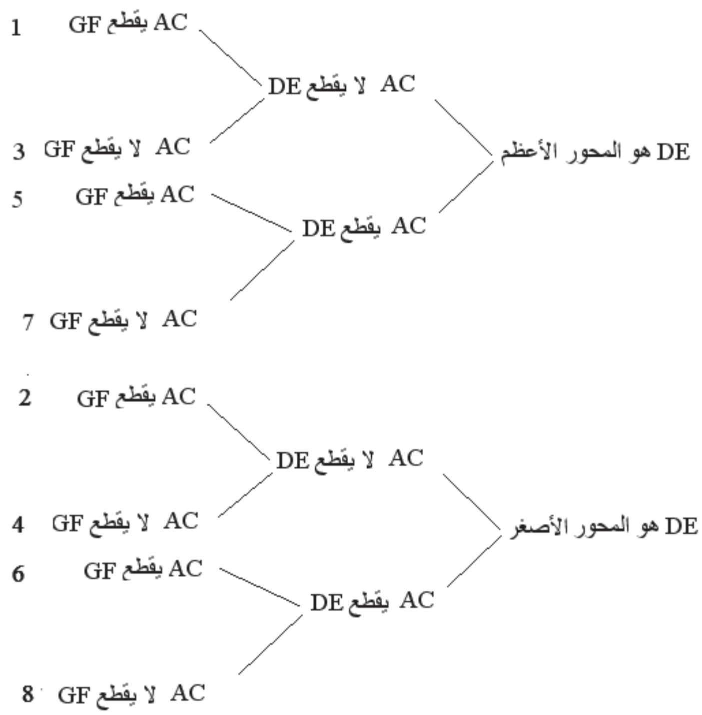
وفي هذه الحالة تكون القِطَع التي يفصلها AC في القطع الناقص و LM في الدائرة متكافئة ثُنَاءً.

سنستخدم الرموز التالية: مساحة قطعة: S_{sg}، مساحة مثلث: S_{tr}،

مساحة المربّع المنحرف: S_{tp}، مساحة E أو $S:E$.

ترتكز الطريقة التي استخدمها ثابت على حساب مساحتَي قطعة قطع مكافئ وقطعة دائرة معلومتين، بواسطة مجاميع أو فروق مساحاتٍ هي على التوالي مساوية للمساحتين السابقتين.

يميِّز ثابت ثماني حالات للشكل. لنمدِّد على استقامة العمودين AI و CK حتى Q و R والعمودين LP و MU حتى V و T. لتكن S مساحة القطع الناقص والدائرة.



1) $S_{sg}(ABC)<\frac{1}{2}S$ و $S_{sg}(LM)<\frac{1}{2}S$.

لدينا في جميع حالات الشكل ووفق القضيّتين ١٥ و ١٦:

$S_{sg}(ADQ)=S_{sg}(LNV)$ و $S_{sg}(CDR)=S_{sg}(MNT)$.

أ) في الأشكال ١، ٢، ٣، ٤، يكون لدينا وفق الفرضيّات

$S_{tp}(AQRC)=S_{tp}(LVTM)$.

ويكون لدينا أيضاً:

$$S_{sg}(ABC)=\frac{1}{2}\left[S_{sg}(CDR)-S_{sg}(ADQ)-S_{tp}(AQRC)\right]$$

$$S_{sg}(LM)=\frac{1}{2}\left[S_{sg}(MNT)-S_{sg}(LNV)-S_{tp}(LVTM)\right]،$$

فيكون: $S_{sg}(ABC)=S_{sg}(LM)$.

ب) للأشكال ٥، ٦، ٧، ٨، يكون لدينا:

$$S_{sg}(ABC)=S_{sg}(ADQ)+S_{sg}(QC)+S_{tr}(AQC)$$

$$S_{sg}(LVM)=S_{sg}(LNV)+S_{sg}(VM)+S_{tr}(LVM).$$

وفــق القضـــيّتين ١٥ و ١٦، يكـــون لـــدينا: $S_{sg}(ADQ)=S_{sg}(LNV)$؛ وفــق أ) لـــدينا: $S_{sg}(QC)=S_{sg}(VM)$، ووفق الفرضيّات لدينا: $S_{tr}(AQC)=S_{tr}(LVM)$،

إذاً: $S_{sg}(ABC)=S_{sg}(LVM)$.

2) $S_{sg}(ABC)>\frac{1}{2}S$ و $S_{sg}(LVM)>\frac{1}{2}S$.

وفق 1) نعرف أنَّ: $S-S_{sg}(ABC)=S-S_{sg}(LVM)$،

فيكون: $S_{sg}(ABC)=S_{sg}(LVM)$.

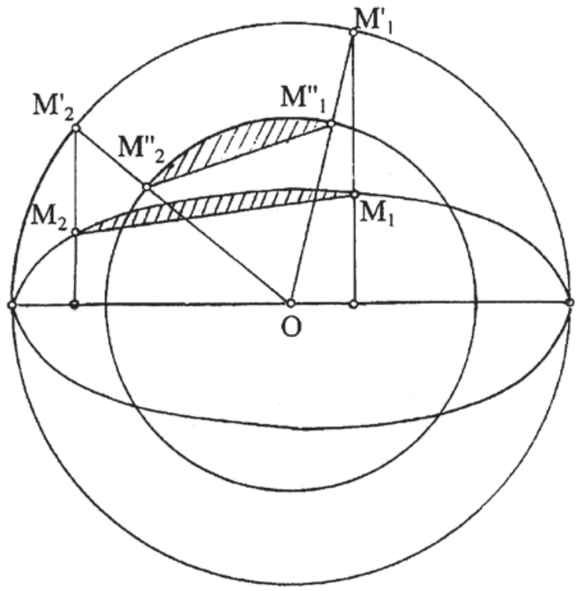
3) إذا كان $S_{sg}(ABC)=\frac{1}{2}S$، يكون عندئذ $S_{sg}(LVM)=\frac{1}{2}S=S_{sg}(ABC)$.

إذا نسبنا إلى نفس المَعْلَم (Ox,Oy) القطعَ الناقص $\boldsymbol{E}$، والدائرةَ C التي قطرها المحور الأعظم، والدائرةَ E المكافئة لـِ $\boldsymbol{E}$، حيث تكون النقطة O مركز الدائرتين، يكون معنا، كما رأينا في القضيّتين ١٤ و ١٥، $(\boldsymbol{E})$ $E=hof$، مع:

$$f:\ \boldsymbol{E}\to C \qquad\qquad h:\ C\to E$$

$$(x',y')\to(X,Y)=\left(\sqrt{\frac{b}{a}}x',\sqrt{\frac{b}{a}}y'\right) \qquad\qquad (x,y)\to(x',y')=\left(x,\frac{a}{b}y\right)$$

يكون عندئذ: $\frac{Y}{\sqrt{ab}}=\frac{y}{b}$ ؛ هذه هي العلاقة التي أعطاها ثابت في الحالة التي تكون فيها النقطتان A و C مُسقطتين على المحور الأعظم. إذاً، تثبت القضيّة ١٧، أنّه إذا كانت M_1 و M_2 نقطتين من القطع الناقص، و M_1'' و M_2'' صورتهما بالتحاكي hof، يكون عندئذ: $S_{sg}(M_1M_2)=S_{sg}(M_1''M_2'')$.



من هنا نستنتج بناءً هندسياً.

٢ ـ٤ ـ٢ ـ٣ في القطع الأعظميّ للأسطوانة وفي قطوعها الأصغريّة

القضيّة ١٨ـ قطعُ أسطوانة مائلة محورها IK وارتفاعها IL بواسطة مستوٍ (P)، عمودي على IK، هو قطع ناقص محوراه 2a و 2b، مع a > b، حيث $2a = d$، و d هو قطر دائرة القاعدة، ويكون: $\frac{b}{a} = \frac{IL}{IK}$.

وفق القضيّة ١١، نعلم أنّ القطع هو قطع ناقص ***E***. المستوي (Q)، الذي يمرُّ بـِ IK والعموديّ على المستوي الرئيسيّ، يقطع المستوي (P) وفق قطرٍ من القطع الناقص. هذا القطر: 1) مساوٍ لقطر دائرة القاعدة، 2) هو أعظم قطرٍ في ***E***، يكون إذاً $2a = d$.

يكون لدينا $(P)\cap(Q) \perp (P)\cap(IKL)$، إذاً، المحور الأصغر هو في (IKL). نبيّن بواسطة تشابه مثلثين قائميْ الزاوية أنّ: $\frac{2b}{d} = \frac{IL}{IK}$.

ملاحظات ـ

• يستخدم الاستدلال القضيّة ٥ وخصائص الخطوط المستقيمة والمستويات المتعامدة.

• المستوي الرئيسيّ IKL هو مستوي تناظرٍ للأسطوانة وللمستوي (P) في آن معاً، فيكون مستوي تناظر بالنسبة إلى ***E***، ويتضمّن إذاً أحد محوريْ القطع الناقص.

• المستوي (P) يسمّى مستوي القطع المستقيم. جيب التمام لزاوية (P) مع مستوي القاعدة هو: $\frac{IL}{IK}=\cos\widehat{KIL}$.

القضيّة ١٩ـ ليكن $\boldsymbol{E_m}$ القطع الناقص الحاصل في مستوي القطع المستقيم (P)، وليكن $\boldsymbol{E}$ قطعاً ناقصاً في مستوٍ (Q) اختياريّ. إذا كان $2a_m$ ، $2b_m$ ، S_m و $2a$، $2b$، S على التوالي المحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة $\boldsymbol{E_m}$ و $\boldsymbol{E}$، يكون لدينا:

$a \geq a_m$، $b_m \leq b \leq a_m$ و $S \geq S_m$.

1) $(Q)//(P)$، في هذه الحالة ووفق القضيّة ٨ يكون: $a=a_m$، $b=b_m$، $S=S_m$.

2) (P) وَ (Q) غير متوازيين. ليكن $d=2r$ قطر دائرة القاعدة؛ وفق القضيّة ١٨، لدينا $a_m=r$.

• إذا كان $a=r$، عندئذ يكون $a=a_m$ و $b<a_m$.

• إذا كان $b=r$، عندئذ يكون $b=a_m$ ، $b>b_m$ و $a>a_m$.

• إذا كان $a\neq r$ و $b\neq r$، عند ذاك يكون $a>r>b$، فيكون $a>a_m>b$.

لدينا إذاً في جميع الأحوال $a \geq a_m$ و $b \leq a_m$.

المستوي الذي يتضمّن محور الأسطوانة والمحور الأصغر لـِ $\boldsymbol{E}$ يتضمّن قطراً، δ من $\boldsymbol{E_m}$، $2a_m \geq \delta \geq 2b_m$، لكن $2b \geq \delta$، فيكون $b \geq b_m$. لدينا في جميع الحالات $a_m \geq b \geq b_m$.

ونستنتج من ذلك $a_m.b_m \leq a.b$، فيكون $S \geq S_m$.

كل قطع ناقص حاصل في مستوي قطع مستقيم يُسمّى قطعاً ناقصاً أصغريّاً.

القضيّة ٢٠ـ ليكن AE القطر الأعظم في تقاطع أسطوانة C مع مستويها الرئيسيّ GHI. ليكن (P) المستوي المتضمّن AE، بحيث يكون $(P)\perp(GHI)$، في هذه الحالة يكون $(P)\cap(C)$ قطعاً ناقصاً هو $\boldsymbol{E_M}$. إذا كان $2a_M$ ، $2b_M$ ، S_M و $2a$، $2b$، S على التوالي

المحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة E_M والمحور الأعظم والمحور الأصغر ومساحة قطعٍ ناقصٍ E اختياريّ واقعٍ على الأسطوانة، عندئذ يكون

$a_M \geq a$ ، $b_M \geq b$ و $S_M \geq s$.

1) يبيِّن ثابت أنّ:

أ) AE هي أعظم القِطَع التي تصل بين نقطتين واقعتين على خطّين مولديْن متقابليْن.

ب) AE هي أعظم القِطَع التي تصل بين نقطتين واقعتين على خطّين مولديْن اختياريّين.

عندئذ يكون AE المحور الأكبر من بين المحاور العظمى للقطوع الناقصة للأسطوانة، ويكون $AE = 2a_M$ ، ويكون، إذاً: $a \leq a_M$.

2) المحور الأصغر لـِ E_M عموديّ على AE وهو موجود في (P)، إذاً هو عموديّ على المستوي الرئيسيّ، فيكون $2b_M = d$ ، حيث يكون d قطر دائرة القاعدة؛ لكن وفق القضيّة ١٩، $2b \leq d = 2r$ ، فيكون $b \leq b_M$. ونستنتج من ذلك أنّ $S \leq S_M$.

القطع الناقص E_M يسمّى قطعاً ناقصاً أعظميّاً، وهو وحيد في أسطوانة معلومة.

إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيّتين ١٩ و ٢٠، يكون لدينا:

$a_m = b_M = r$ ، $a_m \leq a \leq a_M$ ، $b_m \leq b \leq b_M$ ، $S_m \leq S \leq S_M$.

القضيّة ٢١- "إذا كان GH محور أسطوانة مائلة و GI ارتفاعها، و (ABC) دائرة قاعدتها وقطرها d ، حيث $d = 2r$ ، و S_m مساحة القطع الأصغريّ، يكون لدينا:

$$\frac{S_m}{S(ABC)} = \frac{b_m}{r} = \frac{b_m}{a_m} = \frac{GI}{GH}.$$

هذه النتيجة تستنتج مباشرة من القضايا ١٤، ١٨ و ١٩.

القضيّة ٢٢- إذا كانت S_M مساحة القطع الأعظميّ، يكون لدينا: $\frac{S_M}{S(ABC)} = \frac{a_M}{r} = \frac{a_M}{b_M}$.

هذه النتيجة تستنتج من القضيّتين ١٤ و ٢٠.

القضيّة ٢٣- هي لازمة القضيّتين ٢١ و ٢٢. $\frac{S_m}{S_M} = \frac{b_m}{a_M}$.

القضيّة ٢٤- إذا كان لدينا قطعان ناقصان متشابهان $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{E'}$ ومتراكزان، بحيث يكون محوراهما الأعظمان متسامتين، وكذلك محوراهما الأصغرين، فإنَّ خطَّ التماسّ في أيّ نقطة من القطع الناقص الصغير يُحَدِّد في القطع الناقص الكبير وتراً تكون نقطة التماسّ في منتصفه.

يمكن تحديد تشابه القطعين الناقصين بواسطة المتساوية $\frac{2a}{c} = \frac{2a'}{c'}$ ("مخروطات" أبلونيوس، القضيّة ١٢ من المقالة السادسة)، حيث يكون c و c' الضلعين القائمين بالنسبة إلى المحورين $2a$ و $2a'$، أو بواسطة متساوية نسبتيْ المحاور $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$. يبيِّن ثابت، مستخدماً المتساوية الأولى والثانية والقضيّة ١٣ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس، أنَّ لأيِّ نصف مستقيم يخرج من المركز I ويقطع القطع الناقص الصغير في N والقطع الناقص الكبير في L، يكون لدينا:

$$\frac{IN}{IL} = \frac{a'}{a} \qquad (1)$$

هذه الخاصيّة والقضيّة ٥٠ من الكتاب الأوّل من "مخروطات" أبلونيوس تسمحان لنا بالحصول على النتيجة.

تحدّد المتساوية (1) التحاكي $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ حيث يكون: $\boldsymbol{E' = h(E)}$.

يعرض ثابت في المقطع الأخير نتيجة تتعلق بالحالة العامّة للتشابه. ليكن $\boldsymbol{E''}$ قطعاً ناقصاً مساوياً لِـ $\boldsymbol{E'}$، ولتكن k الإزاحة – التي قد تكون انسحاباً أو دوراناً – حيث يكون $(E'' = k(E')$، فيكون $E'' = koh(E)$، حيث يكون koh تشابهاً. تحافظ الإزاحة على الزوايا، فيشكل قطران متماثلان من $\boldsymbol{E}$ و $\boldsymbol{E''}$ مع محورين متماثلين زاويتين متساويتين – وهكذا يحدّد ثابت هذين المحورين.

لقد حُدِّد التحاكي $h\left(I, \frac{a'}{a}\right)$ هنا بواسطة متساويات بين النسب، وقد حُصِل على هذه المتساويات انطلاقاً من العلاقات المتريّة، وذلك بخلاف ما تمَّ فعله في القضيّة ١٢.

القضيّة ٢٥ـ نأخذ قطعين ناقصين متحاكيين متراكزين. المطلوب بناء مضلع محاط بالقطع الناقص الكبير، حيث لا تلتقي أضلاعه بالقطع الناقص الصغير ويكون I مركز تناظر.

ليكن AC و EG المحورين الأعظمين، BD و FH المحورين الأصغرين، حيث يكون $AC > EG$ و $BD > FH$.

ليكن EK خطّ التماس في E ولتكن الزاوية $\alpha_1 = \widehat{KIE}$. نُخرج بعد ذلك خطّ التماسّ KLM ثمّ خطّ التماس MSY، ونكرّر العمليّة حتى الحصول على خطّ تماسّ يقطع القطعة IB. نضع $\alpha_2 = \widehat{MIE}$ و $\alpha_3 = \widehat{YIE}$، وتوافق الزاوية α_n خطّ التماسّ ذا المرتبة n.

يبيّن ثابت، مستخدماً القضيّة ٢٤ والقضيّة ٢٩ من المقالة الثانية من "المخروطات" وكذلك القضيّة ١١ من المقالة الخامسة من "المخروطات" لأبلونيوس، أنّ:

$$\alpha_2 > 3\alpha_1 \text{ ، } \alpha_3 > 5\alpha_1 \quad \ldots \quad \alpha_n > (2n-1)\alpha_1 \text{ ؛}$$

ويَقبَل (بموجب مسلمة أودوكس–أرشميدس) بوجود n، حيث يكون $(2n-1)\alpha_1 > \frac{\pi}{2}$، وينتج من ذلك $\alpha_n > \frac{\pi}{2}$؛ وهكذا يحصل على خطّ التماسّ المطلوب.

تكون رؤوس متعدّد الأضلاع على القوس $\widehat{AB}$ من القطع الناقص الكبير على التوالي النقطتين A و K والنقطة O الواقعة كيفما اتفق على القوس $\widehat{KM}$ التي يحدّدها خطّ التماسّ الثاني، والنقطة M الواقعة على القوس التالية، وهكذا دواليك إلى أن نصل إلى طرف خطّ التماسّ ذي المرتبة $(n-1)$ وأخيراً إلى النقطة B.

نحصل على الرؤوس الأخرى لمتعدّد الأضلاع

1) بواسطة التناظر بالنسبة إلى المحور BD،

2) بواسطة التناظر بالنسبة إلى I.

نحصل أيضاً على متعدّد أضلاع عدد أضلاعه $8(n-1)$. إنّ وجود هذا النوع من متعدّدات الأضلاع سوف يدخل في القضايا ٢٦، ٣١، ٣٢.

القضيّة ٢٦ـ نسبة محيطي قطعين ناقصين متشابهين تساوي نسبة التشابه.

يجري الاستدلال على قطعين ناقصين متحاكيَيْن E_1 و E_2 متراكزين في النقطة K، ويكون المحور الأعظم والمحور الأصغر والمحيط لكل منهما، على التوالي، $(2a_1, 2b_1, p_1)$ و $(2a_2, 2b_2, p_2)$. نفترض أنّ $a_1 < a_2$ ، فيكون $b_1 < b_2$ و $p_1 < p_2$. نريد أن نبيّن أنّ: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

أ) لنفترض أنّ $\frac{p_1}{p_2} > \frac{a_1}{a_2}$.

يوجد، عندئذ، a_3 بحيث يكون $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_3}{a_2}$، مع $a_1 < a_3 < a_2$.

ليكن f التحاكي $\left(K, \frac{a_1}{a_2}\right)$ و g التحاكي $\left(K, \frac{a_3}{a_2}\right)$، فيكون لدينا $E_1 = f(E_2)$ ونأخذ القطع الناقص $E_3 = g(E_2)$. وفق القضيّة ٢٥، نحن نعرف كيف نبني متعدّدَ أضلاع P_n عدد أضلاعه $8(n-1)$، محاطاً بِـ E_3 وليس له نقاط مشتركة مع E_1، ليكن p'_3 محيطه؛ يكون لدينا إذاً $p_1 < p'_3 < p_2$. انظر مصادرة أرشميدس في أطوال المنحنيات المحدّبة ["الكرة والأسطوانة"، المصادرة ٢][5].

ليكن $P_n = g^{-1}(P_n)$ محاطاً بِـ E_2، وليكن p'_2 محيطه؛ يكون لدينا $\frac{p'_3}{p'_2} = \frac{a_3}{a_2}$، فيكون $\frac{p'_3}{p'_2} = \frac{p_1}{p_2}$، وهذا محال لأنّ $p'_3 > p_1$ و $p'_2 < p_2$. يكون لدينا إذاً $\frac{p_1}{p_2} \leq \frac{a_1}{a_2}$.

ب) لنفترض أنّ $\frac{p_1}{p_2} < \frac{a_1}{a_2}$.

يوجَد، عندئذ، a'_3 بحيث يكون $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a'_3}$، مع $a'_3 > a_2 > a_1$.

ليكن h التحاكي $\left(K, \frac{a'_3}{a_1}\right)$؛ نبني القطع الناقص E'_3، بحيث يكون $E'_3 = h(E_1)$، ونبني في E'_3 متعدّد أضلاع P'_n بدون نقاط مشتركة مع E_2، ونستنتج من ذلك متعدّد الأضلاع $P'_n = h^{-1}(P'_n)$، المحاط بِـ E_1. إذا كان p'_3 محيط E'_3 و p'_1 محيط P'_n، يكون لدينا:

$\frac{p'_1}{p'_3} = \frac{a_1}{a'_3} = \frac{p_1}{p_2}$؛ وهذا محال لأنّ $p'_3 > p_2$ و $p'_1 < p_1$. يكون لدينا إذاً $\frac{p_1}{p_2} \geq \frac{a_1}{a_2}$.

---

[5] انظر: Archimède, *De la sphère et du cylindre*, éd. et trad. par Charles Mugler، المجلد الأوّل، ص. ١٠-١١.

نستخلص من أ) و ب) أنَّ: $\frac{p_1}{p_2} = \frac{a_1}{a_2}$.

النتيجـة المثبتـة للقطعـين الناقصـين المتحـاكيَيْن E_1 و E_2 تبقـى صـحيحة إذا اسـتبدلنا E_1 بقطـع نـاقص E'_1 نـاتج مـن E_1 بواسـطة إزاحـة، وهـذا يـؤدّي إلـى تعمـيم النتيجـة علـى قطعـين ناقصين متشابهين.

في هذه القضيّة، يستند ثابت إلى النتيجة الحاصلة، وهي أنّ نسبة محيطَـيْ متعدِّديْ أضـلاع متشابهين تساوي نسبة التشابه، ليبرهن أنَّ نسبة محيطـيْ قطعين ناقصـين متشـابهين تسـاوي أيضاً نسبة التشابه.

ترتكز طريقة ثابت من جهة على استدلال يخصُّ اللامتناهيات في الصغر ويرجعنـا إلـى القضيّة ٢٥؛ ومضمونه أنّه يمكن دائماً أن نُدخِل، بين قطعين ناقصـين متحـاكيين بالنسبة إلـى مركزهما المشترك، متعدّدَ أضلاعٍ محاطاً بالقطع الناقص الكبير دون أن يمسّ القطـع النـاقص الصغير؛ ويكون ذلك مهما كانت نسبة التحـاكي، حتـى وإن كانـت قريبـة للغايـة مـن ١؛ ومـن جهة أخرى ترتكز الطريقة على استدلال بالخُلف، يُستخدَم فيـه تحديدٌ مـن أعلـى أو تحديدٌ مـن أدنى.

لماذا لا يحسب ثابت المحيط؟

يقوم ثابت، فـي القضـيّة ١٤ المكرَّسـة لحسـاب مسـاحة القطـع النـاقص E، بتحويـل القطـع الناقص E إلى دائرة E لها نفس المساحة، بواسطة تركيب من تـآلف عموديّ وتحـاكٍ، بحيث تكون نسبة المساحات المتماثلة معلومة.

لا يمكننـا مقارنـة محيط القطـع النـاقص بمحيط دائرتـه الكبـرى انطلاقـاً مـن المضـلَّعات المتسـاوية الأضـلاع P'_n ذات المحيطـات p'_n والمحاطـة بالـدائرة، ومـن مثيلاتهـا P_n * ذات المحيطات p'_n والمحاطة بالقطع الناقص، لأنّ نسبة قطعتين مستقيمتين متماثلتين فـي التـآلف المعنيّ بالأمر ليست ثابتة، $\frac{p_n}{p'_n} \neq \frac{b}{a}$؛ إذ إنَّ التآلف لا يحـافظ علـى نسبة الأطـوال، وبالتـالي لا يمكن استخدامه كما فعلنا في حالة المساحات.

* المضلَّعات P_n ليست متساوية الأضلاع.

لِنُشِرْ مع ذلك إلى أنّها المرّة الأولى التي يتمّ فيها تناول طول محيط القطع الناقص، أو بشكل أعم طول منحنٍ غير الدائرة.

القضيّة ٢٧ـ

أ) نسبة المساحتين S_1 و S_2 لقطعين ناقصين حيث يكون محورا كلٍّ منهما على التوالي $(2a_1, 2b_1)$ و $(2a_2, 2b_2)$ هي: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1 b_1}{a_2 b_2}$.

ب) إذا كان القطعان الناقصان متشابهين وإذا كان δ_1 و δ_2 قطرين متماثلين في هذا التشابه، فإنّ: $\frac{S_1}{S_2} = \frac{a_1^2}{a_2^2} = \frac{b_1^2}{b_2^2} = \frac{\delta_1^2}{\delta_2^2}$.

إنَّ الفقرة أ) لازمة للقضيّة ١٤؛ ونبيِّن أنَّ الفقرة ب) لازمة للفقرة أ)، إذا استخدمنا نسبة التشابه.

٢ ـ٤ ـ٢ ـ٤ في المساحة الجانبيّة للأسطوانة والمساحة الجانبيّة لقطعة أسطوانة محصورة بين قطعين مستويين يلتقيان بجميع أضلاعها

القضيّة ٢٨ـ يكون الخطّان المولِّدان، لأسطوانة قائمة أو مائلة، متقابلين إذا، وفقط إذا، مرَّا بطرفي قطرٍ من كلِّ قطعٍ ناقصٍ أو دائريّ.

وفق التعريف، المولدان Δ و Δ' يكونان متقابلين إذا أُخرجا من طرفيْ قطرِ إحدى القاعدتين؛ إنَّهما إذاً في مستوٍ واحدٍ يتضمّن المحور، من هنا تبرز النتيجة التي يمكن كتابتها على الشكل التالي: لكي يكون مولّدان Δ و Δ' متقابلين، ينبغي ويكفي أن تلتقي قطعة مستقيمة، تصل نقطةً ما من Δ مع نقطةٍ ما من Δ'، بالمحور.

القضيّة ٢٩ـ في أيِّ أسطوانة قائمة أو مائلة، يكون مجموع قطعتين، محدّدتين على مولِّدين متقابلين بواسطة مستويين لا يتقاطعان داخل الأسطوانة ويلاقيان جميع المولدات، ثابتاً ومساوياً لضعفي القطعة المحدّدة على المحور بهذين المستويين. وأحد المستويين يمكن أن يكون مستوي إحدى القاعدتين.

يستخدم البرهان خاصيّة القطعة التي تصل بين منتصفي ضلعين غير متوازيين لمربَّع منحرف، ويبرهنها ثابت انطلاقاً من خاصيّة القطعة المستقيمة التي تصل بين منتصفَي ضلعين في مثلث.

القضيّة ٣٠- ليكن لدينا أسطوانة مائلة وقطع أصغريٌّ E_m وقطع آخر كيفما اتفق (يمكن أن يكون قطعاً ناقصاً أو دائرة)، لا يلتقي بِـ E_m. إذا أَحَطْنا بالقطع E_m متعدّدَ أضلاع P رؤوسه متقابلة قطريّاً ثُنَاءً، فإنّ المولدات المارّة برؤوس P تحدّد سطحاً منشوريّاً تكون مساحته الجانبيّة $\Sigma = \frac{1}{2}\mathrm{p}(l + \mathrm{L})$، إذا كان p محيطَ متعدّد الأضلاع P، l و L القطعتين الواقعتين على مولدين متقابلين بين القطعين.

يستخدم البرهان القضيّة ٢٩ ومساحة المربَّع المنحرف. وتبقى النتيجة صحيحة إذا كان القطعان متماسَّيْن.

القضيّة ٣١- المساحة الجانبيّة Σ لقطعةٍ من أسطوانة مائلة واقعةٍ بين قطعين قائمين هي: $\Sigma = p.l$، إذا كان p محيطَ قطع ناقص أصغر و ℓ طول قطعة المولِّد الواقعة بين القَطعين.

ليكن E أحد القطعين، مركزه K ومحوره الكبير $2a$.

١) إذا كانت $\Sigma < P.\ell$، فإنَّه يوجد طول g، مع $g < p$، بحيث يكون $\Sigma = g.\ell$.

ليكن h بحيث يكون $g < h < p$؛ في هذه الحالة توجد مساحة ε بحيث يكون $\Sigma + \varepsilon = h.\ell$، فيكون $\varepsilon = \ell(h - g)$.

نبني القطع الناقص E_1، مع $E_1 = \varphi(E)$، حيث يكون φ التحاكيَ ذا المركز K والنسبة $\frac{a_1}{a}$ وبحيث يكون $1 > \frac{a_1}{a} > \frac{h}{p}$، ومحيط هذا القطع p_1 يحقّق العلاقة $\frac{p_1}{p} = \frac{a_1}{a}$ وفق القضيّة ٢٦، فيكون $\frac{p_1}{p} > \frac{h}{p}$ وبالتالي $p_1 > h$.

ليكن P_n متعدّدَ أضلاع محاطٍ بِـ E دون أن يلاقيِ E_1، وليكن P'_n مسقطه على القاعدة الأخرى و p_n محيطه. إذا كانت Σ_n المساحة الجانبيّة للمنشور ذي القاعدتين P_n و P'_n، يكون لدينا $\Sigma_n = P_n.\ell$؛ لكن $p_n > p_1 > h$، فيكون $\Sigma_n > h\ell$؛ فنحصل على:

$$\Sigma_n > \Sigma + \varepsilon . \qquad (1)$$

أ) إذا كـان $s \geq \frac{\varepsilon}{2}$، وبمـا أنّ المسـاحتين s و s' للقاعـدتين، اللتـين همـا قطعـان ناقصـان أصغران، متساويتان، يكون لدينا $\varepsilon \geq s + s'$، فيكون $\sum_n > \sum + s + s'$.

في هذه الحالة تكون المساحة الجانبيّة للمنشور المحاط بالأسطوانة أكبر من المساحة الجانبية الكاملة للأسطوانة، وهذا محال.

ب) إذا كان $s < \frac{\varepsilon}{2}$، نفرض على a_1 الشرطَ $\frac{a_1^2}{a^2} > \frac{s - \frac{\varepsilon}{2}}{s}$؛ لكن وبما أنّ s_1 هي مساحة E_1، فإنَّ $\frac{s_1}{s} = \frac{a_1^2}{a^2}$، فنحصل على: $s - s_1 < \frac{\varepsilon}{2}$.

إذا كانت s_n مساحة P_n و s'_n مساحة P'_n، يكون لدينا: $s_n = s'_n$، $s > s_n > s_1$، $s - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$ و $\varepsilon > (s - s_n) + (s' - s'_n)$.

من (1) نستنتج أنَّ: $\sum_n > \sum + (s - s_n) + (s' - s'_n)$، وهذا محال.

من أ) و ب) نستنتج أنَّ $\sum \geq P.\ell$.

٢) إذا كانت $\sum > P.\ell$، فإنَّه يوجد طول g، مع $g > p$، بحيث يكون $\sum = g.\ell$.

ليكن h، مع $p < h < g$، ولتكن ε مساحة بحيث يكون $\sum = h.\ell + \varepsilon$.

لـيكن $E_1 = \varphi(E)$، حيـث يكـون φ التحـاكيَ ذا المركـز K والنسـبة $\frac{a_1}{a}$ وبحيـث يكـون: $\frac{a_1}{a} < \frac{h}{P}$ و $\frac{a_1^2}{a^2} < \frac{s + \frac{\varepsilon}{2}}{s}$. إذا كان p_1 محيط E_1، يكون لدينا $\frac{p_1}{p} = \frac{a_1}{a}$، فيكون $p_1 < h$.

نُحيط بِـ E_1 متعدّدَ أضلاع P_n ليس له نقاط مشتركة مع E، وإذا استخدمنا الرموز المعتمدة في الجزء الأوّل، يكون لدينا $\sum_n = p_n.\ell$، لكن $h > p_1 > p_n$، فيكون $\sum_n < h.\ell$، وبالتالي

$$\sum > \sum_n + \varepsilon. \qquad (2)$$

لكنَّ: $\frac{s_1}{s} = \frac{a_1^2}{a^2}$، فيكون: $s_1 < s + \frac{\varepsilon}{2}$؛ غير أنّ $s_1 - s > s_n - s$، فيكون $s_n - s < \frac{\varepsilon}{2}$.

نعرف أنّ: $\sum_n + (s_n - s) + (s'_n - s') > \sum$، فيكون: $\sum_n + \varepsilon > \sum$، وهذا يتعارض مع العلاقة (2). يكون لدينا إذاً $\sum \leq P.\ell$.

من (1) و (2) نستنتج أنَّ: $\Sigma = P.\ell$.

لِنلاحظْ أنّ المساحات الوحيدة للسطوح المنحنية المأخوذة حتى ذلك الحين كانت مساحات لأسطوانة قائمة ولمخروط قائم ولكرة (انظر: أرشميدس، "الكرة والأسطوانة"). لقد كان ثابت أوّل من درس مساحة الأسطوانة المائلة، التي سنعبّر عنها بواسطة تكامل أصمّ (غير قابل للحساب بدقّة بواسطة أعداد جبرية).

لنتابع المقارنة بين النتائج والطرق التي ابتكرها أرشميدس للوصول إلى هذه النتائج، وبين القضيّة ٣١ لثابت بالإضافة إلى طرقه الخاصّة . ومن أجل القيام بهذه المقارنة، لنذكر في البداية بالقضايا التي صاغها أرشميدس في "الكرة والأسطوانة"، هذا المؤلَّف الذي راجع ثابت بن قرة نفسه إحدى ترجماته العربيّة. والقضايا المعنيّة هذه هي القضايا ١١ و ١٢ و ١٣ عند أرشميدس.

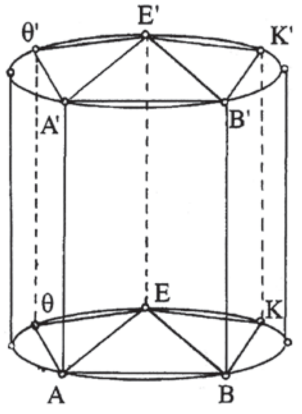
القضيّة ١١- المساحة σ لقطعة، من السطح الجانبي لأسطوانة قائمة، محصورة بين خطّين مولدين، هي أكبر من المساحة s للمستطيل المحدّد بهذين المولدين، $\sigma > s$.

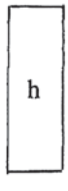
ليكن AA' و BB' المولّديْن المعلومين، وليكن EE' أيَّ مولِّدٍ واقع في قطعة الأسطوانة المعلومة؛

$\text{aire}(AA'B'B) = s$ (مساحة: $aire$)، $\text{aire}(AEE'A') = s_1$، $\text{aire}(BEE'B') = s_2$.

يكون لدينا $AB < AE + EB$، فيكون $s < s_1 + s_2$.

لنضع $s_1 + s_2 = s + h$.





١) لنفترض أنّ $h > \left[S_{sg}(AE)+S_{sg}(EB)\right]+\left[S_{sg}(A'E')+S_{sg}(E'B')\right]$.

نعرف وفق المصادرة ٤ من كتاب "الكرة والأسطوانة" أنّ

$$\sigma+\left[S_{sg}(AE)+S_{sg}(EB)\right]+\left[S_{sg}(A'E')+S_{sg}(E'B')\right]>s_1+s_2$$

يكون لدينا إذاً : $\sigma+h>s+h$، فيكون $\sigma>s$.

٢) لنفترض أنّ $h < \left[S_{sg}(AE)+S_{sg}(EB)\right]+\left[S_{sg}(A'E')+S_{sg}(E'B')\right]$.

ليكن θ و K منتصفيْ القوسين $\widehat{AE}$ و $\widehat{EB}$، وليكن $\theta\theta'$ و KK' المولدين الخارجين من هاتين النقطتين*. يكون لدينا: $S_{tr}(A\theta E)>\frac{1}{2}S_{sg}(AE)$؛ إذاً:

$S_{sg}(AE)-S_{tr}(A\theta E)<\frac{1}{2}S_{sg}(AE)$. وهذا يعني أنَّ:

$$S_{sg}(A\theta)+S_{sg}(\theta E)<\frac{1}{2}S_{sg}(AE)\text{ ، }S_{sg}(EK)+S_{sg}(KB)<\frac{1}{2}S_{sg}(EB)\text{ ، }$$

$$S_{sg}(A'\theta')+S_{sg}(\theta'E')<\frac{1}{2}S_{sg}(A'E')\text{ ، }S_{sg}(E'K')+S_{sg}(K'B')<\frac{1}{2}S_{sg}(E'B').$$

ومن خلال التكرار، بقدر ما هو ضروري، نحصل (بطريقة أقليدس في القضيّة الأولى من المقالة العاشرة) على مجموع قِطَع مساحتها أقل من h.

لنفترض أنّ هذه النتيجة حاصلة في حالة الشكل؛ لتكن s_1' و s_1'' مساحتي المستطيلين ذوَي القاعدتين $A\theta$ و θE، على التوالي، ولتكن s_2' و s_2'' مساحتيْ المستطيلين ذوَي القاعدتين EK و KB، على التوالي.

إذا أخذنا بعين الاعتبار المصادرة ٤، يكون

$$\begin{aligned}\sigma+z &> s_1'+s_1''+s_2'+s_2''\\ &> s_1+s_2\\ \sigma+z &> s+h\end{aligned}$$

لكن: $z<h$، فيكون: $\sigma>s$.

* راجع القضيّة ١٤ عند ثابت بن قرّة.

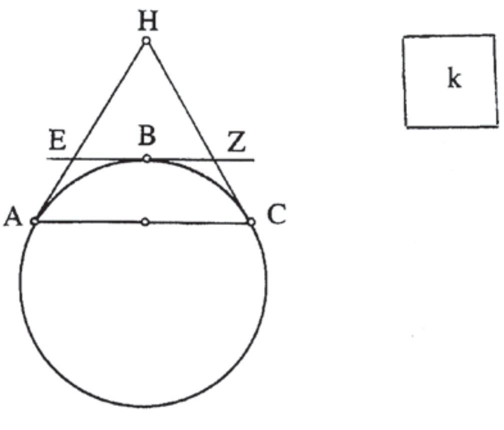
لازمة القضيّة ١١- إذا كانت Σ المساحة الجانبيّة لأسطوانة و Σ_n المساحة الجانبيّة لمنشور اختياريّ محاطٍ بالأسطوانة، يكون $\Sigma > \Sigma_n$.

القضيّة ١٢- لتكن $\widehat{AC}$ قوساً من دائرة القاعدة لأسطوانة قائمة؛ يتقاطع خطّي التماسّ في A و C على النقطة H. المساحة σ لقطعة السطح الجانبي للأسطوانة، المحصورة بين المولّدين AA' و CC'، هي أقل من مجموع مساحتي المستطيلين ذوَي الارتفاع AA' والقاعدتيْن AH و HC، على التوالي؛ وهذا يعني أنَّ أي $\sigma < s_1 + s_2$.

لتكن B نقطة من القوس $\widehat{AC}$، يقطع خطُّ التماسّ في B، HA و HC على التوالي، على النقطتين E و Z. لدينا $EH + HZ > EZ$، فيكون: $AH + HC > AE + EZ + ZC$.

لتكن s_1' و s_2' و s_3' مساحات المستطيلات التي قواعدها AE، EZ، ZC، وارتفاعها AA'. لدينا $s_1 + s_2 > s_1' + s_2' + s_3'$.

لتكن k المساحة بحيث يكون $s_1 + s_2 = s_1' + s_2' + s_3' + k$.



وفق المصادرة ٤، وإذا أخذنا بعين الاعتبار الأشكال المتساوية، المربَّعات المنحرفة والقطع الدائريّة في القاعدتين، يكون لدينا:

$$s_1' + s_2' + s_3' + 2S_{tp}(AEZC) > \sigma + 2S_{sg}(ABC)،$$

$$s_1' + s_2' + s_3' + 2\left[S_{tp}(AEZC) - S_{sg}(ABC)\right] > \sigma.$$

1) إذا كان $\left[S_{tp}(AEZC) - S_{sg}(ABC)\right] \leq \frac{k}{2}$، يكون لدينا $s_1' + s_2' + s_3' + k > \sigma$، فيكون $s_1 + s_2 > \sigma$.

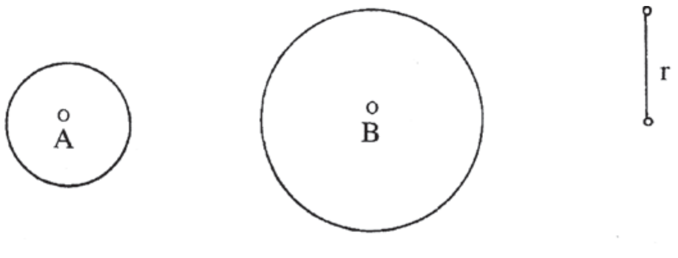
2) إذا كان $\left[S_{tp}\left(AEZC\right)-S_{sg}\left(ABC\right)\right]<\frac{k}{2}$.

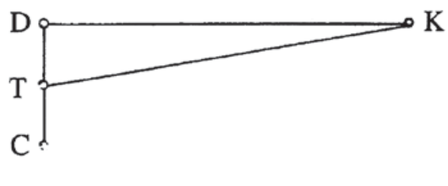
نأخذ نقطة θ على القوس $\widehat{AB}$، ونقطة K على القوس $\widehat{BC}$، نرسم خطّي التماس في θ و K ونكرّر العمليّة إلى أن يصبح مجموع فروق المساحتين، بين كلّ مربَّع منحرف حاصل والقطعة المرفقة به، أقل من $\frac{k}{2}$.

يكون لدينا عندئذ: $s'_1+s'_2+s'_3+k>\sigma$، فيكون $s_1+s_2>\sigma$.

لازمة القضيّة ١٢- إذا كانت Σ المساحة الجانبيّة لأسطوانة و Σ_n المساحة الجانبيّة لمنشور محيطٍ بالأسطوانة، يكون لدينا عندئذ، مهما كان هذا المنشور، $\Sigma<\Sigma_n$.

القضيّة ١٣- المساحة الجانبيّة لأسطوانة قائمة تساوي مساحة دائرة نصف قطرها r، و r هو المتوسط المتناسب بين ℓ مولد الأسطوانة و d قطر قاعدة هذه الأسطوانة: $r^2=\ell.d$.





لتكن A دائرة القاعدة وقطرها d، مع $d=CD$، ولتكن B الدائرة التي نصف قطرها r، بحيث يكون $r^2=\ell.d$.

لتكن Σ المساحة الجانبيّة للأسطوانة و S مساحة الدائرة B، نريد أن نبيّن أنّ $\Sigma=S$.

1) لنفترض أنّ $S<\Sigma$.

وفق القضيّة ٥ لأرشميدس، نستطيع بناء متعدّد أضلاع P_n محيط بـِ B ومتعدّد أضلاع Q_n محاط بـِ B، مساحتاهما على التوالي S_n و S'_n بحيث يكون $\frac{S_n}{S'_n}<\frac{\Sigma}{S}$.

ليكن R_n متعدّدَ أضلاع محيط بـِ A، و R_n مشابه لـِ P_n. لتكن σ_n مساحة R_n وليكن p_n محيطه. لنضع $p_n = KD = ZL$ و $EZ = l$.

المنشور ذو القاعدة R_n المحيط بالأسطوانة له مساحة جانبيّة: $\Sigma_n = l.p_n = EZ.ZL$.

ليكن T منتصف CD ولتكن النقطة P بحيث يكون $ZP = 2ZE$، يكون عندئذ: $\Sigma_n = S_{tr}(LZP)$. ومن جهة أخرى: $\frac{\sigma_n}{s_n} = \frac{TD^2}{r^2} = \frac{TD^2}{2TD.EZ} = \frac{TD}{PZ}$.

لكنَّ: $\frac{S_{tr}(KTD)}{S_{tr}(PLZ)} = \frac{TD}{PZ}$ و $\sigma_n = S_{tr}(KTD)$، فيكون: $s_n = S_{tr}(PLZ)$؛ وبالتالي $\Sigma_n = s_n$.

لكن وفق الفرضيّة: $\frac{\Sigma}{S} < \frac{s_n}{s'_n}$؛ فيكون $\frac{\Sigma}{S} < \frac{\Sigma_n}{s'_n}$؛ وهذا محال لأنّ $\Sigma_n > \Sigma$ و $S > s'_n$. يكون لدينا إذاً $S \geq \Sigma$.

2) لنفترض أنّ $S > \Sigma$.

وفق القضيّة ٥ لأرشميدس نستطيع بناء متعدّد أضلاع P_n محيط بـِ B وآخر Q_n محاط بـِ B بحيث يكون $\frac{S}{\Sigma} < \frac{s_n}{s'_n}$. ليكن، إذاً، R'_n متعدّدَ أضلاع محاطاً بـِ A ومشابهاً لـِ Q_n، وليكن p'_n و σ'_n على التوالي محيطه ومساحته.

لنضع أيضاً، كما في 1)، $KD = ZL = p'_n$، يكون لدينا: $\sigma'_n < S_{tr}(KTD)$ و $\frac{\sigma'_n}{s'_n} = \frac{TD^2}{r^2} = \frac{TD}{PZ} = \frac{S_{tr}(KTD)}{S_{tr}(ZPL)}$، فيكون $s'_n < S_{tr}(ZPL)$.

لتكن Σ'_n المساحة الجانبيّة للمنشور ذي القاعدة R'_n، والمحاط بالأسطوانة، يكون لدينا: $\Sigma'_n = p'_n.l = EZ.ZL = S_{tr}(LZP)$، فيكون $\Sigma'_n > s'_n$، وبالتالي $s'_n < \Sigma$. لكننا وضعنا: $\frac{S}{\Sigma} < \frac{s_n}{s'_n}$؛ وهذا محال لأنّ $S > s_n$ و $\Sigma < s'_n$. يكون لدينا إذاً $S \leq \Sigma$.

من 1) و 2) نستنتج أنَّ: $S = \Sigma$.

تشكل القضيّة ٣١ عند ثابت، كما رأينا ذلك، مرحلة نحو تحديد المساحة الجانبيّة لأسطوانة مائلة قاعدتاها دائريّتان، والمساحة الجانبيّة لأيِّ قطعة من أسطوانة مائلة محصورةٍ بين مستويين متوازيين أو غير متوازيين.

تتناول القضيّة ٣١ عند ثابت قطعة أسطوانة مائلة محصورة بين مستوَيَي قطعين قائمين؛ وهذه القطعة هي أسطوانة قائمة قاعدتها قطعٌ ناقص. القضيّة هي إذاً أكثر عموميّة من قضيّة أرشميدس التي تتناول الأسطوانة الدورانيّة.

يثبت أرشميدس في القضيّة ١٣ أنّ $\Sigma = \pi.r^2$ مع $r^2 = \ell.d$، أي أنَّ $\Sigma = \pi.\ell.d$ ، وَ πd هو المحيط p لدائرة القاعدة، فيكون $\Sigma = p.\ell$، وهذه المتساوية هي صيغة النتيجة في القضيّة ٣١ عند ثابت، حيث يكون p محيط القطع القائم. من جهة أخرى ، فإنّ الصيغة $\Sigma = p.\ell$ هي تلك التي تنتج منطقيّاً من عبارة المساحة الجانبيّة لمنشور قائم، أي $\Sigma_n = p_n.\ell$، التي يستند إليها المؤلَّفان، كما تُعمَّم من جهة أخرى على المساحة الجانبيّة لمنشور مائل، إذا كان p_n محيط قطعٍ قائمٍ للمنشور؛ هذه الصيغة، $\Sigma = p.\ell$، سيجري برهانها في الحالة العامّة لأسطوانة مائلة.

لقد استخدم المؤلَّفان التعريفات والمصادرات التي أعطاها أرشميدس في بداية مؤلَّف "الكرة والأسطوانة"، والمتعلّقة بتقعّر السطوح وبعِظَمِ مساحتيْ سطحين، حيث يحيط أحدهما بالآخر وفق الشروط المحدّدة في المصادرة ٤.

القضيّتان ١١ و ١٢ لأرشميدس واللازمات الخاصّة بكلٍّ منهما هي مقدّمات للقضيّة ١٣. وتستخدم هذه المقدِّمات المصادرة ٤، في القضيّة ١١، بالنسبة إلى منشور محاطٍ بالأسطوانة، وفي القضيّة ١٢ بالنسبة إلى منشور محيط بها. فضلاً عن ذلك، تَستخدم القضيّة ١١ لأرشميدس القضيّة ١ من المقالة العاشرة لأقليدس.

في القضيّة ١٣ يستخدم أرشميدس القضيّة ٥ في قسمَي برهان الخـُلف، ليستنتج من جهة منشوراً محاطاً بالأسطوانة ومن جهة أخرى منشوراً محيطاً بها.

في الجزء الأوّل من القضيّة ٣١، ينطلق ثابت من منشور محاط بالأسطوانة ويبيّن أنّ الفرضيّة $\Sigma < p.\ell$ والمصادرة ٢ (أطوال المنحنيات المُحدّبة) متناقضتان. في الجزء الثاني ينطلق من منشور يحيط بالأسطوانة، بدون أيِّ تماس معها، وهنا أيضاً تُطبَّق المصادرة ٤ وهي على تناقض مع الفرضية $\Sigma > p.\ell$.

مسارا المؤلِّفين مختلفان فأرشميدس في استدلاله يرتكز على الدائرة B المكافئة للسطح الجانبي وعلى متعدِّد الأضلاع المحاط ومتعدّد الأضلاع المحيط المرفقين بالدائرة B.

ويستنتج من ذلك، وبواسطة التشابه، متعدّدَ أضلاعٍ محاطاً بالدائرة المعلومة A أو متعدّدَ أضلاع محيطاً بهذه الدائرة.

أمّا ثابت فإنَّه يستخدم القضيّة ٢٥ ليبنيَ مباشرة في الجزء الأوّل من استدلاله متعدّدَ أضلاع محاطاً بِـ E وليس له أيّة نقطة مشتركة مع القطع الناقص E_1، المحاكي لِـ E؛ كما يستخدم القضيّة ليبني في الجزء الثاني متعدّدَ أضلاع محاطاً بالقطع الناقص E_1 ومحيط بِـ E بدون أيِّ تماسٍ معه. ويستخدم القضيّتين ٢٦ و ٢٧ اللتين تعطيان نسبة المحيطين ونسبة المساحتين للقطعين الناقصين المتشابهين. مسار ثابت أكثر انسياباً ويؤدّي إلى برهانٍ هو، بشكل جلي، أكثر سهولة في المتابعة.

من أجل تطبيق القضيّة ١ من المقالة العاشرة لأقليدس، يستخدم أرشميدس خاصيّة لِقِطَع الدائرة تسمح له بإبراز العامِل $\frac{1}{2}$، فيحصل بواسطة التكرار على $\frac{1}{2^n}$. لقد رأينا أنّ ثابتاً يستخدم الطريقة نفسها في القضيّة ١٤، من خلال تطبيقها على قِطَع قِطعٍ ناقص في الجزء الأوّل وعلى قِطَعِ دائرةٍ في الجزء الثاني.

في القضيّة ٣١، يستخدم ثابت "مبدأ الاتصال" في $\boldsymbol{R}$ (إذا كان $g < p$، فإنَّه يوجد h حيث $h \in]g, p[$).

القضيّة ٣٢- المساحة الجانبيّة Σ لقطعةٍ، من أسطوانة مائلة دائريّة القاعدتين، محصورة بين قطْع قائم محيطه p وقطعٍ اختياريّ، هي: $\Sigma = \frac{1}{2} p(L+\ell)$، إذا كان ℓ و L طوليْ قِطْعَتَي المولدين المتقابلين المحصورتين بين القِطعين.

1) لنفترض $\Sigma < \frac{1}{2} p(L+\ell)$؛

ليكن g طولاً، مع $g < p$، حيث $\Sigma = \frac{1}{2} g(L+\ell)$، وليكن h طولاً و ε مساحة بحيث يكون:

$$g < h < p \quad \text{و} \quad \varepsilon = \frac{1}{2} g(L+\ell)(h-g) \qquad (1)$$

ليكن G مركز الدائرة C ذات القطر d؛ C هي قاعدة الأسطوانة، ولتكن C' الدائرة المتحاكية مع C في التحاكي $\left(G, \frac{d'}{d}\right)$ بحيث يكون $1 > \frac{d'}{d} > \frac{h}{p}$. الأسطوانة، ذات القاعدة C' والمحور GH

المشترك مع الأسطوانة المعلومة، تقطع المستوي Π للقطع القائم وفق قطع ناقص E' محاكٍ للقطع الناقص الأصغريّ E. ليكن p' محيط E'؛ يكون لدينا $\frac{p'}{p}=\frac{d'}{d}>\frac{h}{p}$، فيكون $p'>h$.

ليكن P_n متعدّدَ أضلاع عدد أضلاعه $2n$، محاطاً بالقطع الناقص E، الذي رؤوسه ثُنُاءً متقابلة قطريّاً، والواقع خارج القطع الناقص E'، وليكن p_n محيطه، لدينا: $p_n>p'>h$.

نرفق بمتعدّد الأضلاع P_n جذعَ منشور مساحته الجانبية Σ_n، مع

$\Sigma_n=\frac{1}{2}p_n(L+\ell)>\frac{1}{2}h(L+\ell)$؛ لكن وفق (1)، $\frac{1}{2}h(L+\ell)=\varepsilon+\frac{1}{2}g(L+\ell)$، فيكون

$$\Sigma_n>\Sigma+\varepsilon. \qquad (2)$$

لتكن s مساحة القطع الناقص الأصغريّ E و s_1 مساحة القطع الثاني E_1؛ يكون لدينا $s_1>s$.

أ) إذا كان $\frac{1}{2}\varepsilon\geq s_1$، فإنّ $\frac{1}{2}\varepsilon>s$؛ من (2) نستنتج أنَّ: $\Sigma_n>\Sigma+s+s_1$ ؛ وهذا محال.

ب) إذا كان $\frac{1}{2}\varepsilon<s_1$، نفرض على d' شرطاً إضافيّاً: $\frac{d'^2}{d^2}>\frac{s_1-\frac{1}{2}\varepsilon}{s_1}$.

ليكن E'_1 القطع الناقص المحاكي لِـ E_1. يكون لدينا: $\frac{s'_1}{s_1}=\frac{d'^2}{d^2}=\frac{s'}{s}>\frac{s_1-\frac{1}{2}\varepsilon}{s_1}$،

فيكون: $s'_1>s_1-\frac{1}{2}\varepsilon$ و $\frac{s_1-s'_1}{s_1}=\frac{s-s'}{s}$، فيكون: $s-s'<s_1-s'_1<\frac{1}{2}\varepsilon$، ويكون:

$$\Sigma+(s-s')+(s_1-s'_1)<\Sigma+\varepsilon.$$

إلّا أنَّ لدينا، استناداً إلى المصادرة ٤، $\Sigma+(s-s')+(s_1-s'_1)>\Sigma_n$، $\Sigma+\varepsilon>\Sigma_n$؛ وهذا محال استناداً إلى (2)، يكون إذاً:

$$\Sigma\geq\frac{1}{2}p(L+\ell). \qquad (3)$$

2) لنبيّن استحالة المتباينة $\Sigma>\frac{1}{2}p(L+\ell)$. لتكن LS القطعة العظمى من بين قِطَعِ الخطوط المولدة المحصورة بين قِطعَيْ الأسطوانة المعنيين بالأمر. يُحدّدُ مُستويا القِطْعَين القائمين،

المارّين بـِ L و S، سطحاً أسطوانياً قاعدتاه هما القطعان الناقصان الأصغريّان E و E_2 ؛ وفق القضيّة ٣١، مساحته هي $\Sigma_2 = p.\ell$، إذا كان L طول القِطعة العظمى من خطّ مولد.

تساوي مساحة السطح الأسطواني المحصور بين E_1 و E_2، استناداً إلى الجزء الأوّل: $\frac{1}{2}p(\ell - L) \le \Sigma_1$ ؛ لكنَّ: $\Sigma_1 + \Sigma = \Sigma_2$، فيكون:

(4) $$\Sigma \le \frac{1}{2}p(L+\ell).$$

من (3) و (4) نستنتج أنَّ: $\Sigma = \frac{1}{2}p(L+\ell)$.

ملاحظتان -

1) الطريقة المستخدمة في الجزء الأوّل من برهان القضيّة ٣٢، هي نفسها المستخدمة في القضيّة ٣١. فالمنشور، في القضيّة ٣١، ذو المساحة الجانبيّة $\Sigma_n = p_n.\ell$، الذي يؤدِّي إلى مساحة السطح الجانبي للأسطوانة $\Sigma = p.\ell$، استُبدِل في القضيّة ٣٢ بجذع منشور ذي مساحة جانبيّة $\Sigma_n = \frac{1}{2}p_n(L+\ell)$، يؤدِّي إلى مساحة السطح الجانبي لجذع الأسطوانة:

$$\Sigma = \frac{1}{2}p(L+\ell).$$

2) بدلاً من أن يعالج ثابت الجزءَ الثاني بواسطة برهان للخلف من النوع الذي استخدمه في الجزء الأوّل، يبيِّن أنّه إذا افترضنا خلاصة الجزء الأوّل صحيحة، أي $\Sigma \ge \frac{1}{2}p(L+\ell)$، يمكن الوصول إلى $\Sigma \le \frac{1}{2}p(L+\ell)$ بواسطة عمليات جمع أو طرح مساحات.

القضايا الخمس التالية هي لازمات القضيّة ٣٢. تُستخدَم فيها نفس الرموز: p هو محيط قِطع قائم، L و ℓ هما طولا القطعتين المحدّدتين على خطَّين مولدين متقابلين بواسطة المستويَيْن P و Q للقطعين المعلومَين، Σ هي المساحة الجانبيّة لقطعة الأسطوانة المحصورة بين P و Q.

القضيّة ٣٣- إذا كان P و Q مستويين اختياريَّيْن، يكون $\Sigma = \frac{1}{2}p(L+\ell)$.

يُدخل ثابت مستوياً لِقطع قائم ويستخدم الفرق بين مساحتي سطحين يُحقّقان شروط القضيّة ٣٢.

القضيّة ٣٤- إذا كان P و Q مستويين متوازيين، فإنّ $L = \ell$ و $\Sigma = p.\ell$.

إذا كـان P و Q مستويـيْ قاعدتي الأسطوانة، عندئذ، يكـون L طـول المولـدين وتكـون Σ المساحة الجانبيّة للأسطوانة نفسها.

ملاحظـة– إذا كـان P و Q مسـتويَيْ قِطـع قـائم، فإننـا نجـد مـرّة أخـرى نتيجـة القضـيّة ٣١، ويكون لدينا أسطوانة قائمة قاعدتها قِطع ناقص.

القضيّة ٣٥- هي حالة خاصّة من القضيّة ٣٣.

إذا كـان قطعـا الأسـطوانة بواسـطة المسـتويين P و Q متماسّـين فـي نقطـة، يكـون لـدينا $\Sigma = p.L$، حيث يكون L طول قطعة المولد المقابل لقطعة طولها معدوم.

القضـيّتان ٣٦ و ٣٧ هــي ملاحظتــان تَسـتخدمان القضـيّة ٢٩. إذا كــان ℓ_m و L_M علــى التوالي طولَ القطعة الأقصر والقطعة الأطول لمولدٍ، وإذا كان L_1 طول القطعة المحدَّدة على محور الأسطوانة بواسطة المستويَيْن P و Q يكون لدينا:

القضيّة ٣٦- $\Sigma = \frac{1}{2} p.(\ell_m + L_M)$.

القضيّة ٣٧- $\Sigma = \mathrm{p.L_1}$.

*

* *

من حيث طبيعتها، إنّ مسائل حساب أطوال الخطوط أو حساب مسـاحة السطوح المنحنيـة لا تقتصر مباشرة على عمليّات تربيع. لذلك نفهم لماذا لا يستخدم ثابت المجـاميع التكامليّـة فـي هذا المؤلَّف. وكما رأينا، فإنَّ الوسائل الأساسية المستخدَمة خلال بحثه هي:

- التحويلات النقطيّة
- المصادرة الثانية لأرشميدس في التحدّب
- مسـلمة أودوكـس–أرشـميدس وكـذلك القضـيّة ١ مـن المقالـة العاشـرة مـن "الأصـول" لأقليدس.
- بناء متعدّد أضلاع محاط بقطع ناقص لا يلتقي بقطع ناقص محاكٍ له أصغر منه.

٢-٤-٣ نصّ كتاب

"في قطوع الأسطوانة وبسيطها"

لثابت بن قرَّة الحرّاني

٤ – و

كتاب ثابت بن قرة الحرّاني
في قطوع الأسطوانة وبسيطها

جمل ما في هذه المقالة

في أول هذه المقالة صفةُ أنواع قطوع الأسطوانة القائمة والأسطوانة المائلة، وأنها متوازية الأضلاع، وأنها أسطحةٌ متوازية الأضلاع أو دوائر أو قطع دوائر، وأن سائر قطوع الأسطوانة هي من النوع الذي يقال له القطع الناقص من قطوع المخروط، أو قطعة منه.

ويتلو ذلك: القولُ في مساحة قِطع الأسطوانة، الذي كان استخرج مساحتَه أبو محمدٍ الحسنُ بن موسى رضي اللّه عنه، وهو القِطع الناقص من قطوع المخروط، وفي مساحة أنواع قطع هذا القطع.

ويتلو ذلك: القولُ في أعظم قطوع الأسطوانة مساحةً، وأصغرها مساحةً، وأطولها أقطارًا، وأقصرها أقطارًا، ونسبها بعضِها إلى بعض، ونسب سهامها بعضِها إلى بعض.

وباقي المقالة في مساحة بسيط الأسطوانة القائمة والمائلة، ومساحةِ ما يقع من بسيط كل واحدةٍ منها فيما بين قطوعها التي تلقى أضلاعها.

وهذا ابتداء المقالة:

1 البسملة: كتب بعدها «وحسبنا اللّه وحده» – 6 أسطحة ... أو: ناقصة، ونجدها في التحرير – 8 ويتلو: ويتلوا – 11 ويتلو: ويتلوا – 13 كل: مكررة – 14 واحدة: واحد / تلقى: تلقا، ولن نشير إليها فيما بعد.

〈الحدود〉

إذا كانت دائرتان متساويتان في سطحين متوازيين، ووصل فيما بين مركزَيْهما خطٌّ مستقيم، وفيما بين الخطين المحيطين بهما خطٌّ آخر مستقيم – فكان هذان الخطان المستقيمان في سطح واحد – وأثبتت الدائرتان والخط الذي فيما بين المركزين، وأدير الخط الثاني على الخطين المحيطين بالدائرتين من موضعٍ منهما حتى يعود إلى ذلك الموضع الذي منه بدأ، وكان في جميع دورانه، هو والخط الذي فيما بين المركزين جميعًا في سطح واحد، فإن الشكل المجسم، الذي يحوزه هذا الخطُّ والدائرتان المتوازيتان، يسمّى أسطوانة.

والخطّ الذي وَصل فيما بين مركزي الدائرتين يسمّى سهمَ الأسطوانة.

والخطّ الذي وَصل فيما بين الخطين المحيطين بالدائرتين، وأدير حيثما كان، فهو يسمّى ضلع الأسطوانة.

والدائرتان المتوازيتان اللتان ذكرناهما تسمّيان قاعدتي الأسطوانة.

والبسيط الذي فيه كان ضلع الأسطوانة يسمّى بسيط الأسطوانة.

ولنسمِّ كلَّ ضلعين من أضلاع الأسطوانة – يكونان فيما بين أطراف قطرين من أقطار قاعدتيها – ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة.

ولنسمِّ العمودَ الواقع من مركز إحدى قاعدتي الأسطوانة على سطح القاعدة الأخرى منها عمودَ الأسطوانة.

فإذا كان سهمُ الأسطوانة هو عمودَها، فإن تلك الأسطوانة تسمّى الأسطوانةَ القائمة؛ وإذا لم يكن سهمها عمودًا لها، سميت الأسطوانة / المائلة. ٤ – ظ

تم صدر المقالة.

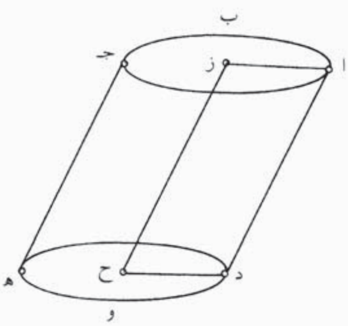
2 ووصل ... مستقيم: مكررة، ثم ضرب عليها بالقلم – 4 الثاني: قد تقرأ «الباقي» – 5 من: مع – 9 حيثما: حيث ما – 15 الأخرى: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.

‹١ – قطوع الأسطوانة الحادثة من السطوح القاطعة لها›

– آ – كلّ ضلع من أضلاع أسطوانة فهو موازٍ لسهمها ولسائر أضلاعها.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح؛ وليكن ضلعٌ من أضلاع الأسطوانة ا د.

فأقول: إن ا د موازٍ لسهم ز ح ولكل ضلع من أضلاع الأسطوانة.



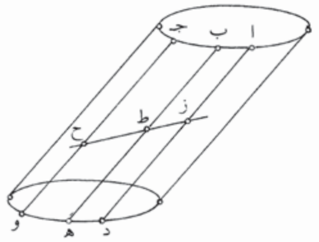
برهان ذلك: أن خط ا د ضلع من أضلاع الأسطوانة، فهو وسهم ز ح جميعًا في سطح واحد، وذلك السطح يقطع سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و. وإذا جعلنا الفصلين المشتركين لذلك السطح ولسطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و خطي ز ا ح د، كان خطّا ز ا ح د مستقيمين، لأنها فصلان مشتركان لسطح ز ا د ح مع سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و، وكانا متوازيين لأن سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و متوازيان؛ وكانا نصفي قطري دائرتي ا ب جـ د و هـ، لأن مركزي هاتين الدائرتين نقطتا ز ح، وكانا متساويين، لأن هاتين الدائرتين متساويتان. فخطّا ا د ز ح – اللذان يصلان فيما بين أطرافها – متوازيان. فكل ضلع من أضلاع الأسطوانة فهو موازٍ لسهمها. ومن ذلك أيضًا يتبيّن أن خط ا د مساوٍ لسائر أضلاع الأسطوانة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

9 سطحي (الأولى): سطح.

– ب – كلُّ خطٍّ مستقيم يقع في بسيط أسطوانة فهو ضلع من أضلاعها، أو قطعةٌ من ضلع منها.

فليكن أسطوانةٌ على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وليكن في بسيط الأسطوانة خطّ مستقيم وهو ز ح.

فأقول: إن ز ح ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلع منها.



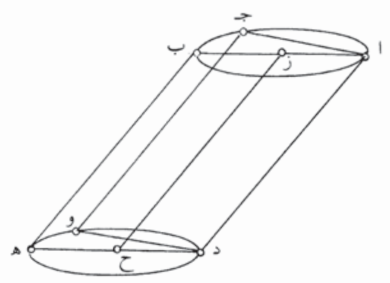
برهان ذلك: أنا إذا تعلمنا على خط ز ح ثلاث نقط كيفما وقعت، وهي ز ط ح، كانت هذه النقط في بسيط الأسطوانة، لأن جميع خط ز ح في بسيطها. فإن أمكن ألّا يكون خط ز ح ضلعًا من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلع منها، فإنا إذا جعلنا أضلاع الأسطوانة التي تمر بنقط ز ط ح خطوط ا د ب هـ جـ و، لم يقع واحد منها على خط ز ح، وكانت هذه الخطوط متوازية، وخطُّ ز ط ح مستقيم، وهو قاطع لها، فهي إذن في سطح واحد. ولذلك تكون نقط د هـ و الثلاث في هذا السطح، وهي أيضًا في سطح دائرة د و هـ، فهي إذن على الفصل المشترك لهذين السطحين. وكل فصل مشترك لسطحين فهو خط مستقيم، فنقط د هـ و يمرّ بها خط واحد مستقيم، ويلقى الخط المحيط بدائرة د هـ و على ثلاث نقط؛ وهذا غير ممكن. فخط ز ح ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعةٌ من ضلع منها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– جـ – كلّ بسيط يقطع أسطوانة ويمرّ بسهمها أو يكون موازيًا له، فإنه يقطع بسيطها على خطين مستقيمين. وإن لم يكن ذلك السطح مارًا بالسهم ولا موازيًا له، فليس يقطع شيئًا من بسيط تلك الأسطوانة على خط مستقيم.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح، وليقطع الأسطوانة سطح ما.

6 كيفما: كيف ما، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 7 ألا: ان لا، ولن نشير إليها فيما بعد.

فأقول: إن هذا السطح إن كان مارًا بسهم زح أو موازيًا له، فإنه يقطع بسيط أسطوانة ا ب ج د ه و على خطين مستقيمين؛ وإن لم يكن كذلك، فليس يقطع شيئًا من بسيط هذه الأسطوانة على خط مستقيم.



برهان ذلك: أن السطح القاطع للأسطوانة، إن كان مارًا بسهم زح، فإنه يقطع 〈بسيط〉 الأسطوانة على خطين. وإذا جعلنا الفصلين المشتركين له ولبسيط الأسطوانة خطّي ا د ب ه، وأخرجنا خط ا ز ب، كان خطّا ا ز ب زح في ذلك السطح القاطع للأسطوانة. فخط ا د هو فصلٌ مشترك للسطح الذي فيه خطّا ا ز ب زح ولبسيط الأسطوانة، مارٌّ بنقطة ا. وضلع الأسطوانة الذي يخرج من نقطة ا هو مع زح في سطح واحد، وخط ا ز ب الذي يقطعها هو أيضًا في ذلك السطح؛ فضلع الأسطوانة الذي يخرج من نقطة ا هو في السطح الذي فيه خطّا ا ز ب زح، وهو أيضًا في بسيط الأسطوانة، فهو / إذن فصل مشترك لهما مارٌّ بنقطة ا. وقد كنا بيّنّا أن خط ا د أيضًا فصل مشترك لهما مارٌّ بنقطة ا، فخط ا د ضلع من أضلاع الأسطوانة فهو إذن خط مستقيم. وكذلك أيضًا نبيّن أن خط ه ب مستقيم. ه – و

وأيضًا، فإن السطح القاطع للأسطوانة، إن كان موازيًا لسهم زح، فأما إذا جعلنا خط ا د فصلاً مشتركًا له ولبسيط الأسطوانة، وجعلنا سطح ا ب ه مارًا بسهم زح وبنقطة من خط ا د، فإنه سيمرّ بجميع خط ا د، الذي هو فصل مشترك للسطح القاطع ولبسيط الأسطوانة، فإنه سيقطع بسيط الأسطوانة على خط ما مستقيم مارّ بنقطة من خط ا د، ويقطع ذلك السطح القاطع على خط آخر مستقيم مارّ بتلك النقطة من خط ا د. وإذا جعلنا قطعَه لبسيط الأسطوانة على خطٍّ ا ط المارِّ بنقطة ا، وقطْعه للسطح القاطع للأسطوانة على خط ا ك المارّ أيضًا بنقطة

12 ه ب: مطموسة – 13 أيضًا: غير واضحة / ا د: ا ب – 16 ذلك: مطموسة – 18 ا ك: ا ل.

ا، فإن خط اط يكون ضلعًا من أضلاع الأسطوانة، أو قطعةً من ضلعٍ منها. وذلك أنه خط مستقيم، فهو موازٍ لسهم زح. وخط اك هو مع خط زح في سطح واحد، وهو موازٍ له، لأنه لو لم يكن موازيًا له لَلَقِيَهُ – إذ كان معه في سطح واحد – ولو لقيه لقطع سهم زح السطح القاطع للأسطوانة إذ كان اك في ذلك السطح؛ وليس يمكن ذلك لأن السطح القاطع للأسطوانة قد كان موازيًا لسهم زح. فخط اك موازٍ لسهم زح. وقد كنا بيّنّا أن خط اط أيضـًا موازٍ لسهم زح، فخطّا اط اك متوازيان؛ وقد التقيا على نقطة ا، وهذا غير ممكن. فسطح اب ه يمر بخط اد، وخط اد هو فصل مشترك لسطح ادوج مع بسيط الأسطوانة، فهو خط مستقيم.

وأيضـًا، فإن السطح القاطع للأسطوانة يقطع بسيطها على خط آخر. وذلك أنه لو لم يقطعها إلّا على خط اد وحده لكان يكون مماسًا للأسطوانة غير قاطع لها، لأن اد خط مستقيم. فإن كان قاطعًا لها فهو يقطع بسيطها على خطٍّ سوى اد، كما يقطعها سطح اجود على خط جو. ونبيّن كما بينّا آنفًا أن خط جو أيضـًا مستقيم.

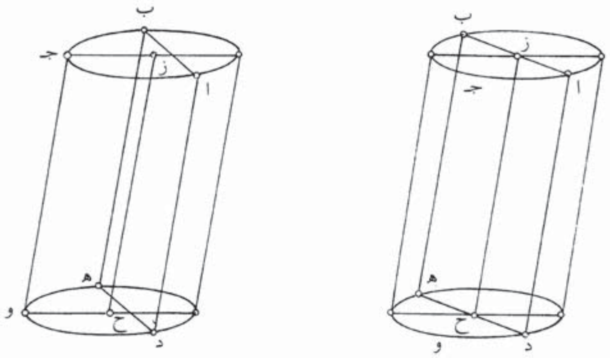
وأيضـًا، فإن السطح القاطع للأسطوانة إن لم يكن مارًا بسهم زح ولا موازيًا له، وجعلنا خط اد فصلاً مشتركًا له ولشيء من بسيط الأسطوانة، لم يكن مستقيمًا. فإن أمكن، فليكن خط اد مستقيمًا، فهو ضلع من أضلاع الأسطوانة أو قطعة من ضلعٍ من أضلاعها، ويكون كذلك موازيًا لسهم زح، وهو معه في سطح زح دا. وخط زح يلْقى السطح الذي يقطع الأسطوانة، فهو إذن يلقاه على الفصل المشترك لذلك السطح وسطح زح دا. والفصل المشترك لهما هو خط اد، فخط زح يلقى خط اد. وقد كنّا بيّنا أنه موازٍ له، هذا خُلف. فليس خط اد بمستقيم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **د** – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً، وكان مارًا بسهمها أو موازيًا له، فإن القطع – الذي يُحدثه فيها – سطحٌ متوازي الأضلاع.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ابج ده و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة زح. وليقطع الأسطوانة سطح يمرّ بسهم زح، كما في الصورة الأولى، أو سطح موازٍ لسهم زح كما في الصورة الثانية. وليحدث في الأسطوانة قطع اب ه د.

فأقول: إن اب ه د سطح متوازي الأضلاع.

2 اك: ال – 7 ادوج: ادهج – 12 وجعلنا: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.



برهان ذلك: أن خطي ا ب د ه من الصورتين جميعًا مستقيمان، لأنهما فصلان مشتركان لسطح ا ب ه د ولسطحي دائرتي ا ب ج د ه و، وهما متوازيان، لأن سطحي هاتين الدائرتين متوازيان. وخطّا ا د ب ه اللذان يصلان فيما بين / أطرافهما مستقيمان، لأنهما فصلان مشتركان لسطح ا ب ه د – الذي هو مارّ بسهم ز ح أو موازٍ له – ولبسيط الأسطوانة، فهما ضلعان من أضلاع الأسطوانة، ويكونان لذلك متوازيين. فسطح ا ب ه د متوازي الأضلاع؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ه – ظ

وتبيّن مما قلنا أنه إذا قطع سطحٌ أسطوانةً قائمةً ومرّ بسهمها ⟨أوكان موازيًا له⟩، فإن القطع الحادث فيها سطحٌ قائم الزوايا.

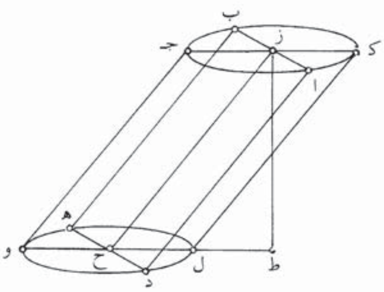
– ه – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً مائلة، وكان مارًّا بسهمها قائمًا على السطح الذي يمرّ بعمودها وبسهمها على زوايا قائمة، فإن القطع الذي يحدثه فيها سطحٌ قائم الزوايا، والقطوع الحادثة من سائر السطوح التي تمرّ بالسهم ليست بقائمةِ الزوايا.

فليكن أسطوانةٌ مائلة، على قاعدتيها ا ب ج د ه و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح وعلى عمودها ز ط. وليقطع الأسطوانةَ سطحٌ يمرّ بسهم ز ح، ⟨وليكن السطح الذي عليه ا ب ه د⟩ ويقطع السطح الذي يمرّ بسهم ز ح وبعمود ز ط، على زوايا قائمة ⟨السطح الذي⟩ عليه ا ب ه د.

5 فسطح: الأفضل «فقطع»، ولن نعلق على مثلها مرة أخرى / ا ب ه د: ا ه ب د – 9 سطح: سهم – 12 ز ح: ز ح – 14 ويقطع ... ز ح: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.

فأقول: إن سطح ا ب ه د قائمُ الزوايا، وإن القطوعَ الحادثة من سائر السطوح التي تمرّ بسهم ز ح ليست بقائمةِ الزوايا.

برهان ذلك: أن خط ز ط عمودٌ على سطح دائرة د ه و، فجميع السطوح التي تمرّ به هي قائمةٌ على سطح دائرة د ه و على زوايا قائمة، وهو أيضًا قائم عليها على زوايا قائمة، فسطح دائرة د ه و قائمٌ على السطح الذي يمرّ بخطي ز ح ز ط على زوايا قائمة. وسطح ا ب ه د أيضًا قد كان قائمًا عليه على زوايا قائمة، فالفصل المشترك لهذين السطحين – الذي هو ⟨خط⟩ د ه – عمودٌ على السطح الذي يمرّ بخطي ز ح ز ط، فهو إذن عمود على جميع الخطوط التي تخرج من نقطة ح في هذا السطح. وأحد هذه الخطوط خط ح ز، فخط ه ح عمود على خط ح ز، وخط ا د موازٍ لخط ز ح، فزاوية ا د ح قائمة. وسطح ا ب ه د متوازي الأضلاع، فهو إذن قائم الزوايا.



فأقول: إنه ليس في القطوع – التي تحدث عن السطوح التي تقطع الأسطوانة وتمرّ بسهمها ز ح – قطع قائم الزوايا غير سطح ا ب ه د.

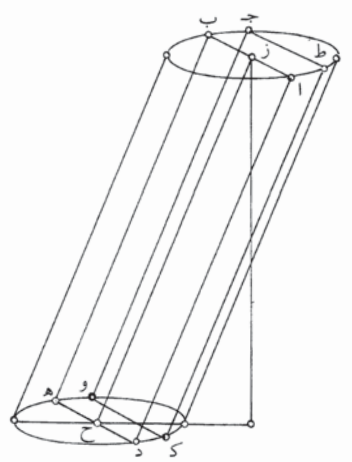
فإن أمكن غير ذلك، فليكن أيضًا قطع ج ك ل و قائم الزوايا، وليكن مارًّا بسهم ز ح، فزاوية ج و ل قائمة وخط ز ح موازٍ لخط ج و، فزاوية و ح ز قائمة. وقد كنا بيّنا أن زاوية د ح ز قائمة، فسهم ز ح عمودٌ على السطح الذي فيه خطّا د ح و ح، الذي هو دائرة د ه و، فهو عمود عليها؛ والأسطوانة مائلة، هذا غير ممكن. فليس ج ك ل و بقائم الزوايا، ولا غيرُه من القطوع التي تحدث عن سطحٍ يمر بسهم ز ح سوى سطح ا ب ه د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

8 ا د: ا ج – 16 سوى: سوا.

– و – إذا قطَع سطحٌ أسطوانةً مائلة وكان موازيًا للسطح القائم الزوايا الذي يمر بسهمها، فإن القِطعَ الحادثَ فيها سطحٌ قائم الزوايا، وليس في القطوع الموازية للسطوح الباقية التي تمرّ بسهمها قِطع قائم الزوايا.

فليكن أسطوانة مائلة / على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى و – ٦ سهم الأسطوانة ز ح، وعلى القِطع القائم الزوايا الذي يمرّ بسهم ز ح ا ب هـ د، وعلى القِطع الموازي لسطح ا ب هـ د ط جـ و ك.

فأقول: إن سطح ط جـ و ك قائمُ الزوايا، وإنه ليس في القطوع الموازية للسطوح الباقية التي تمرّ بالسهم قِطعٌ قائم الزوايا.



برهان ذلك: أن خطّي ا د ط ك متوازيان لأنهما ضلعان من أضلاع الأسطوانة. وقد قَطعت دائرة ا ب جـ ط سطحين متوازيين وهما سطحا ا ب هـ د ط جـ و ك، فالفصلان المشتركان لها ولهما – اللذان هما ا ب جـ ط – متوازيان. فخطّا ا ب ا د موازيان لخطي ط جـ ط ك، كل واحد لنظيره. فالزاوية د ا ب التي يحيط بها خطا ا ب ا د مساوية للزاوية التي يحيط بها خطا ط جـ ط ك. ولكن زاوية د ا ب قائمة، فزاوية ك ط جـ قائمة. وسطح ط جـ و ك متوازي الأضلاع، فهو إذن قائم الزوايا.

12 د ا ب: ا د ب.

وأيضًا، فإنا نجعل قِطع ا ب هـ د أحدَ القطوع التي تمر بسهم ز ح وليست بقائمة الزوايا، وليكن قِطعُ ط جـ و ك موازيًا له.

فأقول: إنه ليس بقائم الزوايا.

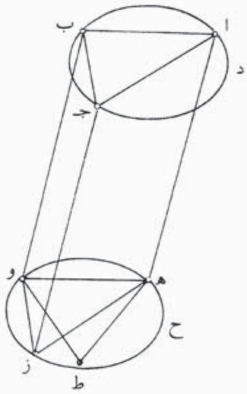
برهان ذلك: أنا نبيّن كما بيّنا آنفًا أن زاوية د ا ب مساويةٌ لزاوية ك ط جـ. وزاوية د ا ب ليست بقائمة، فزاوية ك ط جـ غير قائمة، فسطح ط جـ و ك ليس بقائمِ الزوايا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويتبيّن مما قلنا أنه إذا قَطع سطحٌ أسطوانةً قائمة وكان موازيًا لسهمها، فإن القِطع الحادث فيها سطح قائم الزوايا.

– زَ – إذا كان سطحان متوازيان، وكان فيها شكلان، ووَصل فيما بين نقطةٍ من الخط أو الخطوطِ المحيطة بأحد الشكلين وبين نقطةٍ مما يحيط بالشكل الآخر، خطٌّ مستقيم – فكان كل خطٍّ يخرج من نقطةٍ مما يحيط بالشكل الأول، ويكون موازيًا للخط الأول المُخرَج واقعًا على نقطة مما يحيط بالشكل الثاني–، فإن الشكلين متشابهان متساويان.

فليكن في سطحين شكلان، على أحدهما ا ب جـ د وعلى الآخر هـ وز ح؛ وليكن فيما بين الخط أو الخطوط التي تحيط بشكل ا ب جـ د والخط أو الخطوط التي تحيط بشكل هـ وز ح، خط مستقيم وهو ا هـ؛ وليكن كل خط يخرج من نقطةٍ مما يحيط بشكل ا ب جـ د ويكون موازيًا لخط ا هـ، واقعًا على نقطة مما يحيط بشكل هـ وز ح.

فأقول: إن شكلي ا ب جـ د هـ وز ح متشابهان متساويان.



برهان ذلك: أنّا إذا تعلمنا على الخط أو الخطوط المحيطة بشكل ا ب جـ د نقطة ب كيفما وقعت، وأخرجنا منها خطًا موازيًا لخط ا هـ، وقع على نقطة مما يحيط بشكل هـ وزح. وإذا جعلناه واقعًا على نقطة و، كان خطّا ا هـ ب و متوازيين، فهما في سطح واحد. وسطحا ا ب جـ د هـ وزح متوازيان، فإذا قطعهما السطح الذي فيه خطّا ا هـ ب و، كان الفصلان المشتركان لهما وله متوازيين. وهذان الفصلان هما: الخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي ا ب والخط المستقيم الذي يصل بين نقطتي هـ و، فخطّا ا ب هـ و متوازيان. وخطّا ا هـ ب و أيضًا متوازيان، فخطّا ا ب هـ و متساويان. فإذا وضعنا شكل ا ب جـ د على شكل هـ وزح، ووضعنا نقطة ا منه على نقطة هـ من الشكل الآخر، ووضعنا خط ا ب على خط هـ و، ووقعت نقطة ب على نقطة و، فإن باقي الشكل يقع على باقي الشكل الآخر فينطبق عليه. وذلك أن جميع ما يحيط بشكل ا ب جـ د ينطبق على جميع ما يحيط بشكل هـ وزح، لأنه إن أمكن ألّا ينطبق عليه، فإنا إذا جعلنا نقطة جـ من شكل ا ب جـ د واقعةً على نقطة ليست على شيء مما يحيط بشكل هـ وزح مثل نقطة ط، وأخرجنا خطوط جـ ا جـ ب ط هـ ط و، كان ⟨خط⟩/ ا جـ واقعًا على خط هـ ط وخط ٦ – ظ جـ ب على خط ط و. والخط الذي يخرج من نقطة جـ ويكون موازيًا لخط ا هـ يقع على نقطةٍ مما يحيط بشكل هـ وزح، فإذا جعلنا تلك النقطة نقطةَ ز وأخرجنا خطّي زهـ زو، تبيّن كما بيّنا آنفًا أن خط جـ ا مساوٍ لخط زهـ، وخط جـ ب لخطّ زو. ولكن نقط ا ب جـ واقعةٌ على نقط هـ و ط، وخطّ ا جـ واقعٌ على خط هـ ط، وخط جـ ب على خط ط و، فخطّا هـ ط ط و مساويان لخطّي هـ ز زو، كلٌّ واحدٍ منها لنظيره. وقد خرجا من مخرجهما من خط هـ و وفي جهتها، فالتقيا على غيرِ نقطة ز، وهذا غير ممكن. فجميع ما يحيط بشكل ا ب جـ د يقع على جميع ما يحيط بشكل هـ وزح فينطبق عليه، فشكلا ا ب جـ د هـ وزح متشابهان متساويان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

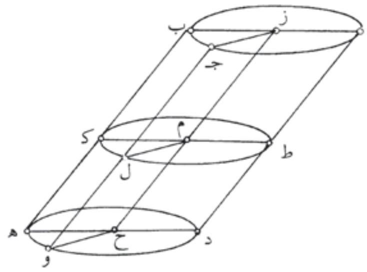
– ح – إذا قطَع سطحٌ أسطوانةً وكان موازيًا لقاعدتيها، فإن القِطْعَ الحادث فيها دائرةٌ مركزها النقطةُ التي يقطع عليها السهم.

فليكن أسطوانةٌ على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم

7 منه: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 12 واقعًا: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 17 هـ و: هو.

الأسطوانة ز ح. وليقطع الأسطوانةَ سطحٌ موازٍ لدائرتي ا ب ج د هـ و، وليكن القطع الحادث سطح ط ك ل، وليقطع هذا القطعُ السهمَ على نقطة م.

فأقول: إن ط ك ل دائرةٌ مركزها نقطة م.



برهان ذلك: أنا إن جعلنا الخطَّ المحيطَ بالقِطع الحادث في الأسطوانة خط ط ك ل، كان شكلا ا ب ج ط ك ل في سطحين متوازيين؛ وإن أخرجنا من نقطةٍ من الخط المحيط بدائرة ا ب ج ضلعًا من أضلاع الأسطوانة –كخط ا ط د–، كان كلُّ خطٍّ يخرج من نقطةٍ من الخط المحيط بدائرة ا ب ج ويكون موازيًا لخط ا ط د ضلعًا من أضلاع الأسطوانة. فكل خطٍ منها إذًا يقع على نقطة من الخط المحيط بِقطع ط ك ل، فشكلا ا ب ج ط ك ل متشابهان متساويان. وشكل ا ب ج دائرة، فشكل ط ك ل دائرة. وبمثل السبيل التي سلكناها في الشكل الذي قبل هذا يتبيّن أن مركز هذه الدائرة نقطة م ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويتبيّن مع ذلك أيضًا أن هذه الدائرة التي ذكرنا مساوية لكل واحدة من قاعدتي الأسطوانة. وبمثل ذلك أيضًا يتبيّن أنه إذا كان سطحان متوازيان يقطعان جميعَ أضلاع الأسطوانة فإنها يُحدثان فيها قطعين متشابهين متساويين؛ ومتى وضعت نقطة من أحدهما على نظيرتها من الآخر، وهي التي يمرّ بها الضلع الذي يمرّ بالأولى، أمكن أن يوضع جميع القطع على جميع القطع، فينطبق عليه ولا يزيد ولا ينقص.

– **ط** – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً مائلة، ومرّ بسهمها وبعمودها، وقطعها سطح آخر قائم على السطح الذي ذكرنا على زوايا قائمة، فلقِي الفصل المشترك للسطحين اللذين ذكرنا ضلعي القِطع الذي يحدثه السطح الأول منها، اللذين هما ضلعان من أضلاع الأسطوانة – إما في الأسطوانة

7 ا ب ج: ا ب ج د – 8 ا ب ج: ا ب ج د – 9 ا ب ج: ا ب ج د – 17 الفصل: للفصل.

وإما خارجًا عنها – وأحاط مع واحدٍ منها بزاويةٍ مساوية للزاوية التي تليها من الزاويتين اللتين يحيط بها مع ذلك الضلعِ أحدُ ضلعي ذلك السطحِ الباقيين، فإن القِطع الحادث في الأسطوانة من السطح الثاني – من السطحين اللذين ذكرنا – دائرةٌ أو قطعةٌ من دائرةٍ، ومركزُها هو النقطة التي يلقى عليها السهم، ولنسمّ هذه الدائرة قطعًا مخالفَ الوضع./

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم ٧ - و الأسطوانة ز ح، وعلى العمود الواقع من نقطة ز على سطح دائرة د هـ و ز ط. وليكن القِطعُ الذي يُحدثه السطحُ الذي يمرّ بخطي ز ح ز ط في الأسطوانة قِطْعَ ا ب هـ د المتوازي الأضلاع. وليقطع الأسطوانةَ سطحٌ آخر قائمٌ على سطح ا ب هـ د على زاوية قائمة، فيلقى خطي ا د ب هـ إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها. وليكن القطعُ الحادث من هذا السطح في الأسطوانة قِطعَ ك ل م، وليكن الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح ا ب هـ د خط ك ل، وليكن زاويتا ا ك ل ك ا ب متساويتين.

فأقول: إن قطع ك ل م دائرةٌ أو قطعةٌ من دائرة، ومركزها النقطة التي يلقى عليها سهم ز ح.

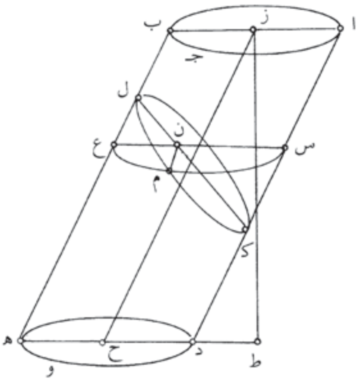
برهان ذلك: أن خط ك ل إما أن يكون قاطعًا لأحد خطي ا ب د هـ، وإما أن يكون غير قاطع لواحد منها. فإن لم يقطع واحدًا منها، فإنا إذا تعلّمنا على خط ك ل نقطة ن كيفما وقعت، وأجزنا عليها سطحًا موازيًا لكل واحد من سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و، وكان القِطعُ الحادثُ منه في الأسطوانة قِطعَ س م ع، كان هذا القطع دائرةً. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذه الدائرة ولسطح ا ب هـ د خط س ع، كان س ع قطرًا لدائرة س م ع، لأن مركزها على سهم ز ح. وخطُّ ز ط عمودٌ على سطح د هـ و، فهو إذن عمود على سطح ا ب جـ الموازي له، وكل سطح يمرّ بعمود ز ط، فهو قائم على سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و على زوايا قائمة، فسطح ا ب هـ د قائم على سطحي دائرتي ا ب جـ د هـ و على زوايا قائمة. فهذان السطحان أيضًا قائمان على سطح ا ب هـ د على زوايا قائمة، وكذلك سطح س م ع. ولكن سطح ك ل م قد كان أيضًا قائمًا على سطح ا ب هـ د على زوايا قائمة؛ فإن جعلنا الفصل المشترك لهذين السطحين خط ن م، كان عمودًا على سطح ا ب هـ د، فهو إذن عمود على كل واحد من خطي ك ل س ع لأنها في سطح ا ب هـ د. وقد كنا بيّنا أن خط س ع قطر لدائرة م س ع، فالسطح الذي يكون من ضرب س ن في ن ع مساوٍ لمربع خط ن م. ولكن زاوية ن س د مثل زاوية ب ا د لأن خطي ا ب س ع

8 فيلقى: بلقا – 14 واحدًا: واحد.

متوازيان، وذلك لأنهما فصلان مشتركان لسطح ا ب هـ د مع سطحي ا ب جـ س م ع المتوازيين. وزاوية ب ا د قد كنا جعلناها مثلَ زاوية ا ك ل، فزاويةُ ن س د مثل زاوية ا ك ل، فمثلّث س ن ك إذن متساوي الساقين. ومن ذلك أيضًا نبيّن أن مثلث ع ن ل متساوي الساقين، فالسطح الذي يكون من ضرب س ن في ن ع مثل السطح الذي يكون من ضرب ك ن في ن ل. وقد كنا بيّنا أن السطح الذي يكون من ضرب س ن في ن ع مساوٍ لمربع خط ن م، فالسطح الذي يكون من ضرب ك ن في ن ل مساوٍ لمربع خط ن م.

وكذلك أيضًا يتبيّن أن كل عمود يقع من نقطة من الخط المحيط بقطع ك م ل على خط ك ل، فإن مربعه مساوٍ للسطح الذي يكون من ضرب أحد القسمين اللذين يقسم بهما خط ك ل في القسم الآخر منهما. فقِطع ك م ل دائرة قطرها ك ن ل.

فأقول: إن مركز دائرة ك م ل هي النقطة التي يقطع عليها سهم ز ح سطح ك م ل.



برهان ذلك: أنا إذا جعلنا هذه النقطة نقطة ن، وأجزنا عليها خطًا في سطح ا ب هـ د موازيًا لخط ا ب عليه س ن ع، ونبيّن كما بيّنا آنفًا أن مثلثي ك ن س ع ن ل متساويا الساقين وخط س ن مثل خط ن ع، فخط ك ن مثل خط ن ل. وقد كنا بيّنا أن خط ك ن ل قطر دائرة ك م ل، فمركزها إذن نقطة ن.

وبمثل هذا المسلك أيضًا نبيّن أن خط ك ل إن كان قاطعًا لخط ا ب أو لخط د هـ أو لهما جميعًا، فإن القطع الحادث منه في الأسطوانة قطعة دائرةٍ مركزها النقطة التي يلقى عليها السهم؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

3 ع ن ل: ع ن ك – 10 النقطة: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.

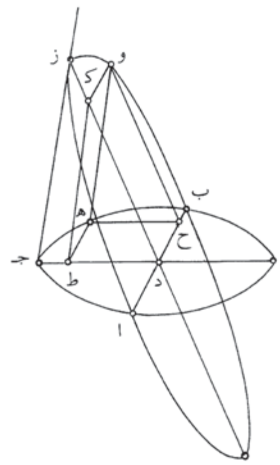
فلنسمّ الدائرة التي ذكرنا قطعًا مخالفَ الوضع. ٧ – ظ

وهناك استبان أن القِطع المخالِفَ الوضعِ مساوٍ لكل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، وأن جميع القطوع المخالفةِ الوضعِ التي تقطع الأسطوانةَ متوازية.

– يَ – إذا كانت دائرة في سطح ما، وأُخرج من الخط المحيط بها خطوط مستقيمة إلى سطح آخر، وكان كل واحد من الخطوط المخرجة موازيًا لباقيها، فإنها تقع من ذلك السطح الآخر على نقطٍ يمرّ بجميعها خطٌّ واحد محيط بقِطع ناقص أو بدائرة.

فليكن دائرة عليها ا ب جـ ومركزها د.

فأقول: إنه إن أخرجت من الخط المحيط بدائرة ا ب جـ إلى سطح غيرِ سطحها خطوطٌ مستقيمة، وكان كل واحدٍ منها موازيًا لباقيها، فإنها تقع جميعًا على نقط يمرّ بها خط واحد محيط بقِطْعٍ ناقص أو بدائرة.



برهان ذلك: أن السطح الذي يقع عليه الخطوط التي ذكرنا، إما أن يكون مارًّا بمركز دائرة ا ب جـ الذي هو نقطة د وإما ألّا يكون مارًّا به. فإن جعلناه أولاً مارًّا به فإنه سيقطع سطح دائرة ا ب جـ، ويصير الفصل المشترك له ولها خطًا يمرّ بنقطة د. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط ا د ب، وأخرجنا من نقطة د في سطح دائرة ا ب جـ خط د جـ عمودًا على خط ا د ب، وتعلمنا

6 بجميعها: بجميعا / محيط: ومحيط – 12 الذي: مكررة – 13 الفصل (الأولى): للفصل.

على الخط المحيط بدائرة ا ب جـ نقطةً ما من النقط التي تخرج منها الخطوط المتوازية التي ذكرنا وكانت نقطة هـ ، وأخرجنا منها ذلك الخط الموازي ⟨الذي يقع⟩ في السطح الذي يقع عليه سائر الخطوط المتوازية ، فكان خط هـ و، ووقع على نقطة و من ذلك السطح. وأخرجنا من نقطة جـ إلى ذلك السطح أيضًا خط جـ ز موازيًا لخط هـ و، وأخرجنا من نقطة هـ خط هـ ح عمودًا على ب د ، ووصلنا فيما بين نقطتي د ز بخط د ز، وفيما بين نقطتي و ح بخط و ح ، فإن خطي و ح د ز يكونان في سطح ا و ز ب الذي عليه تقع الخطوط المتوازية لأنهما يصلان فيما بين نقط من النقط التي في هذا السطح. وإذا أخرجنا من نقطة هـ في سطح دائرة ا ب جـ خط هـ ط موازيًا لخط د ح ، فإن سطح هـ ح د ط يكون متوازي الأضلاع. وذلك أن خط هـ ح موازٍ لخط ط د لأنهما عمودان على ب د. وخطّا هـ ط ح د اللذان يصلان بين أطرافهما متوازيان، فخطّا هـ ح د ط متساويان ، وكذلك أيضًا خطّا ح د هـ ط. وأيضًا فإنا إذا أخرجنا من نقطة ط في سطح مثلث د جـ ز خط ط ک موازيًا لخط جـ ز ووصلنا فيما بين نقطتي و ک بخط و ک ، فإن الخط الذي يصل فيما بينهما يكون في سطح ا و ز د ، لأن خطي ح و د ز هما في هذا السطح ، وهو أيضًا مع خطوط و هـ هـ ط ط ک جميعًا في سطح واحد ، وذلك أن خطي هـ و ط ک متوازيان لأنهما موازيان لخط جـ ز، فخط و ک هو الفصل المشترك للسطح الذي فيه نقط و ح د ز وللسطح الذي فيه نقط و هـ ط ک . وإذا أخرجنا من نقطة و خطًا موازيًا لأحد خطي هـ ط ح د، فإنه يكون موازيًا للآخر منهما ، لأنهما متوازيان ، ويكون مع كل واحد منهما في سطح واحد ، فهو إذن في السطح الذي فيه نقط و ح د ز وفي السطح أيضًا الذي فيه نقط و هـ ط ک ، فهو إذن الفصل المشترك لهذين السطحين. ⟨و⟩قد بيّنا أنه خط و ک ، فخط و ک موازٍ لخط هـ ط. وقد كان خط هـ و موازيًا لخط ط ک ، فهو إذن مساوٍ له. وأيضًا فإنا قد كنا بيّنا أن خط هـ ط مساوٍ لخط د ح ، وهو أيضًا مساوٍ لخط و ک ، فخط د ح مساوٍ لخط و ک ومواز له. فخطّا و ح ک د اللذان يصلان فيما بين أطرافهما متساويان متوازيان. وقد كنا بيّنا أن خط د ط مساوٍ لخط هـ ح وأن خط هـ و مساوٍ لخط ط ک ، فأضلاع مثلث ح هـ و مساوية لأضلاع مثلث د ط ک . ومثلث د ط ک شبيه بمثلث د جـ ز لأن خط ط ک موازٍ لخط جـ ز، فمثلث و هـ ح شبيه بمثلث ز جـ د، فنسبة مربع خط هـ ح إلى مربع خط ح و كنسبة مربع خط جـ د إلى مربع خط د ز. ولكن مربع

2 في : إلى -- 5 ب د: ب جـ – 9 ب د: ب جـ / ح د: مطموسة – 12 ح و: حـ و / وهو أيضًا: مطموسة – 23 ز جـ د: ز ح د.

خط هـ ح مساوٍ للسطح الكائن من ضرب ا ح في ح ب لأن ا ب قطر لدائرة ا ب جـ، وخط هـ ح عمود عليه؛ ومربع خط جـ د / أيضـًا مساوٍ للسطح الكائن من ضرب ا د في د ب، فنسبة ٨ – و السطح الكائن من ضرب ا ح في ح ب إلى مربع خط ح و كنسبة السطح الكائن من ضرب ا د في د ب إلى مربع خط د ز. فنقطتا و ز هما على خط محيط بقطعٍ ناقصٍ مركزُه د وأحدُ أقطاره ب ا، وخطوط الترتيب لذلك القطر تلقاه على مثل زاوية ا د ز، أو بدائرة هذه صفتها، للذي تبيّن من عكس الشكل ٢١ من المقالة ا من كتاب أبلونيوس في المخروطات.

وكذلك أيضـًا نبيّن أن جميع الخطوط المستقيمة التي تخرج من الخط المحيط بدائرة ا ب جـ وتكون موازيةً لخط هـ و، تقع على الخط المحيط بالقِطع أو بالدائرة التي وقع عليها خط هـ و وهو ا و ز ب.

وأيضـًا فإنا إن جعلنا السطح الذي تقع عليه الخطوط المتوازية سطحًا لا يمرّ بنقطة د – التي هي مركز دائرة ا ب جـ – وأخرجنا سطحًا يمرّ بنقطة د ويكون موازيًا للسطح الذي تقع عليه الخطوط المتوازية مثل سطح ا و ز ب، تبيّن كما بيّنا فيما تقدم أن الخطوط المتوازية التي ذكرنا تقطع سطح ا و ز ب على نقطٍ يمرّ بجميعها خط واحد محيط بقِطع ناقص مركزه د وأحدُ أقطاره ا ب، أو بدائرة هذه صفتها. وإذا أخرجت على استقامة، حتى تقع على السطح الآخر الموازي لسطح ا و ز ب، وقعت منه على نقطٍ يمرّ بها خط محيط بقطعٍ ناقص أو بدائرة، ويكون ذلك القِطع أو الدائرة مساويًا للقطع أو الدائرة التي تقع عليها من سطح ا و ز ب؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وتبيّن مع ذلك أن مركز القطع أو الدائرة اللذين تقع عليها الخطوط المتوازية هو الوضع الذي يقع عليه الخط الموازي لتلك الخطوط الذي يخرج من مركز الدائرة الأولى.

– يا – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً وكان غيرَ موازٍ لقاعدتيها ولا لسهمها ولا مارٍّ بالسهم، ولم يكن القطع الذي يحدث منه في الأسطوانة المائلة قِطعًا مخالفَ الوضع، ولا قطعةً من القطع المخالفِ الوضع، فهو قِطع ناقص أو قطعة من القِطع الناقص. أما إن كان غيرَ قاطع لقاعدتي الأسطوانة ولا لواحدةٍ منها فهو قِطع ناقص، وأما إن كان قاطعًا لإحداهما فهو قطعة من القِطع

2 جـ د: ح د / أيضـًا: مطموسة – 5 ب ا: ب جـ – 19 الذي: التي – 23 لواحدة: لوحده، وصححها في الهامش / لإحداهما: لاحديها / قطعة من: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.

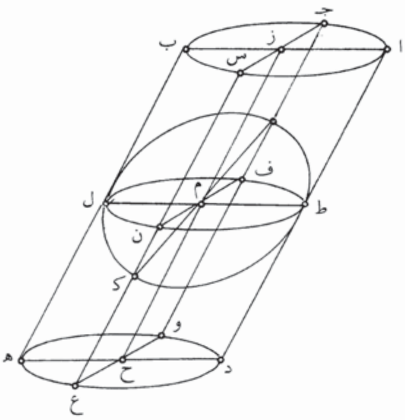
الناقص يحيط بها خط مستقيم وطائفة من الخط المحيط بالقطع ، وأما إن كان قاطعًا للقاعدتين جميعًا ، فهو قطعة من القطع الناقص يحيط بها خطان مستقيمان متوازيان وطائفتان من الخط المحيط بالقطع ، ومركز ذلك القطع الناقص هو النقطة التي يقع عليها سهم الأسطوانة.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح ، وعلى سهم الأسطوانة ز ح ؛ وليقطعها سطح غير موازٍ لقاعدتيها ولا لسهمها ولا مارٍّ به ، وليُحدِث فيها قِطعًا عليه ط ك ل ، ولا يكون هذا القطع – إن كانت الأسطوانة مائلة – قطعًا مخالف الوضع ، ولا قطعة من القِطع المخالف.

وليكن أولاً سطح ط ك ل غيرَ قاطع لقاعدتي الأسطوانة ولا لواحدة منها.

أقول : إن قطع ط ك ل قطعٌ ناقص ، وإن مركزه النقطة التي يقطع عليها سهم ز ح.

برهان ذلك : أن كل نقطة من الخط المحيط بقطع ط ك ل يقع عليها ضلع من أضلاع الأسطوانة التي تخرج من الخط المحيط بدائرة ا ب جـ. وهذه الخطوط التي قلنا – أعني أضلاعَ الأسطوانة – كلٌّ واحد منها موازٍ لباقيها ولخط ز ح. فكل النقط التي تتعلّم على الخط المحيط بقطع ط ك ل يمرّ بها خط واحد محيط بقطع ناقص أو بدائرة ، ومركزُه على خط ز ح ، فقطع ط ك ل إما أن يكون قِطعًا ناقصًا وإما دائرةً.

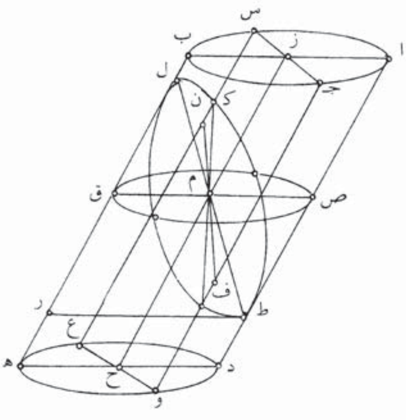


فأقول: إنه قِطع / ناقص. ٨ – ظ

فإن أمكن ألّا يكون كذلك، فليكن دائرة مركزها نقطة م من خط ز ح. فإذا أخرجنا سطحًا يمرّ بخط ز ح، وبعمود الأسطوانة الواقع من نقطة ز على سطح د هـ و، فإن القطع الذي يحدث منه في الأسطوانة يكون سطحًا متوازيَ الأضلاع. وإذا جعلناه سطح ا ب هـ د، وجعلنا الفصلَ المشتركَ لهذا السطح ولسطح ط ك ل خطَّ ط ل، وأجزنا على نقطة م سطحًا موازيًا لكل واحدة من قاعدتي ا ب جـ د هـ و، فإنه يحدث منه في الأسطوانة دائرة، وهذه الدائرة ليست هي قِطع ط ك ل، لأن سطح ط ك ل قد كان غيرَ موازٍ لقاعدتي الأسطوانة. وهذه الدائرة الموازية إما أن يكون الفصلُ المشترك لها ولسطح ا ب هـ د هو خطَّ ط ل، وإما أن يكون خطًا آخر غير خط ط ل.

وإذا جعلنا أولاً فصلها المشترك خط ط ل، فكانت الدائرة الموازية للقاعدتين دائرة ط ن ل، وأجزنا على سهم ز ح سطحًا يقطع سطح ا ب هـ د على زوايا قائمة، فكان القِطع الحادث منه في الأسطوانة جـ س ع و، فإن سطح جـ س ع و يكون قائمَ الزوايا. وإذا جعلنا الفصلَ المشترك لهذا السطح ولسطح دائرة ط ن ل خطَّ ن م ف، وجعلنا النقطةَ التي يمرّ بها خط س ن ع من قِطع ط ك ل نقطة ك، ووصلنا فيما بين نقطتي ك م بخط م ك، فإن سطح جـ س ع و يكون قد قطع ثلاثة سطوح متوازية، وهي سطوح ا ب جـ ط ن ل د هـ و، فالفصول المشتركة له ولها متوازية. وإذا جعلناها خطوط س جـ ن م و ع، وكان زاويةُ جـ س ع قائمةً لأن سطح جـ س ع و قائم الزوايا، فزاوية م ن ك قائمة. وأيضًا فإن نقطة م مركز دائرة ط ن ل، فخط ط م مثل خط ن م، ونقطة م أيضًا مركز قطع ط ك ل، فإن كان قطع ط ك ل دائرة فإن خط ط م مثل خط م ك. وقد كان خط ط م مثل خط م ن، فخط م ن مثل خط م ك، ولذلك يكون زاويةُ م ن ك من مثلث ن م ك مثلَ زاوية م ك ن من هذا المثلث. وقد كنا بيّنا أن زاوية م ن ك قائمة، فزاوية م ك ن أيضًا قائمة، وهما في مثلث واحد، وذلك غير ممكن. فليس قِطع ط ك ل دائرة.

4 منه: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 12 جـ س ع و (الثانية): حـ ش ع ق – 13 يمرّ: تمر – 16 ن م و ع وكان: ن م و ع و كان.



وأيضـًا، فإنا إن جعلنا الفصلَ المشتركَ لسطح ا ب هـ د وللدائرة الموازية لقاعدتي الأسطوانة خطـًا غيرَ خط ط ل وهو خط ص ق، فهو بيّنٌ أن هذا الخط يمرّ بنقطة م التي هي مركز هذه الدائرة، والفصل المشترك لهذه الدائرة ولدائرة ط ك ل يمرّ أيضـًا بنقطة م، فهو إذن قطر لهاتين الدائرتين، فيصير مساويًا لخط ط ل – إذ كان قطرًا لدائرة ط ك ل – ومساويًا لخط ص ق أيضـًا، إذ كان قطرًا للدائرة الموازية لقاعدتي الأسطوانة. فخط ط ل مساوٍ لخط ص ق. وإذا أخرجنا من نقطة ط خط ط ر موازيًا لخط ص ق، كان خط ط ر أيضـًا مساويًا لخط ص ق. فخط ط ل مساوٍ لخط ط ر، فزاوية ط ل ر مساوية لزاوية ل ر ط؛ وخط ص ق موازٍ لخط د هـ لأنهما فصلان مشتركان لدائرة د هـ و وللدائرة الموازية لها التي قطرها ص ق ⟨وسطح ا ب هـ د⟩، وخط ط ر قد كان موازيًا لخط ص ق أيضـًا، فخطا د هـ ط ر متوازيان، فزاوية د هـ ل مساوية لزاوية ط ر ل، وزاوية ط ر ل قد كنا بيّنا أنها مثل زاوية ط ل ر، فزاوية د هـ ل مثل زاوية ط ل ر. وإذ كان ذلك كذلك، فإن زاويتي ل ط د ط د هـ متساويتان، فالقِطع المخالف الوضع يمرّ بخط ط ل، وقِطع ط ك ل الذي يمرّ بخط ط ل ليس هو القطع المخالف الوضع. فإذا جعلنا القِطعَ المخالف الوضع دائرةً أخرى تمر بخط ط ل، وهي دائرة ط ن ل، وكان الفصل المشترك لها ولسطح جـ س ع و خط ن م ف، فإن كل واحد من خطي ن م ك م يكون مساويًا لخط ط م، فخطّا ن م ك م متساويان، وخطّ م ن منها هو نصف قطر القطع المخالف

ليس هذا الشكل في المخطوطة – 3 يمرّ: تمر – 6 ط ر (الأولى والثانية): ط ز – 7 ط ر: ط ز/ ط ل ر: ط ل ز – 9 ط ر (الأولى والثانية): ط ز – 10 ط ر ل (الأولى والثانية): ط ز ل / ط ل ر: ط ل ز – 11 ط ل ر: ط ل ز/ ط د هـ: مطموسة – 15 ط م: ط ز.

الوضع، فهو إذن مساوٍ لخط زس الذي هو نصف قطر دائرة ا ب جـ. وخط زس عمود على خط ن س، وخطا س ز م ن بين خطين متوازيين، فخط م ن أيضًا عمود على س ع، فزاوية م ن ع إذن قائمة. وقد كنا بيّنا أن خط م ن مساوٍ لخط م ك، فزاوية م ن ك مثل زاوية م ك ن. وزاوية م ن ك قائمة، فزاوية م ك ن أيضًا قائمة، ففي مثلث م ن ك زاويتان قائمتان، وذلك غير ممكن. فليس قِطع ط ك ل دائرة، فهو إذن قطع ناقص ومركزه نقطة م.

وأيضًا، فإنا إن جعلنا السطح القاطع للأسطوانة قاطعًا لقاعدتيها أو لإحداهما، فإنه إن أخرج ذلك السطحُ على استقامة، وأخرج أيضًا بسيط الأسطوانة على استقامةٍ / أضلاعها، ٩-و قطع ذلك السطحُ بسيطَ الأسطوانة الذي أخرج وأَحدَث قِطعًا ناقصًا، وكان ما يقع منه في أسطوانة ا ب هـ د قطعةً من القِطع الناقص. أما إن كان السطح قاطعًا لقاعدة واحدة من قاعدتي الأسطوانة فقط، فإنه يحيط بتلك القطعة خط مستقيم وطائفةٌ من الخط المحيط بالقطع الناقص. وأما إن كان السطح قاطعًا لقاعدتي الأسطوانة جميعًا، فإنه يحيط بها طائفتان من الخط المحيط بالقطع الناقص وخطان مستقيمان متوازيان، لأن سطحي القاعدتين متوازيان، وقد قطعهما سطح القطع، فيكون فصلاهما المشتركان لهما وله خطين متوازيين؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

〈 ٢ – مساحة القطع الناقص وقطعه 〉

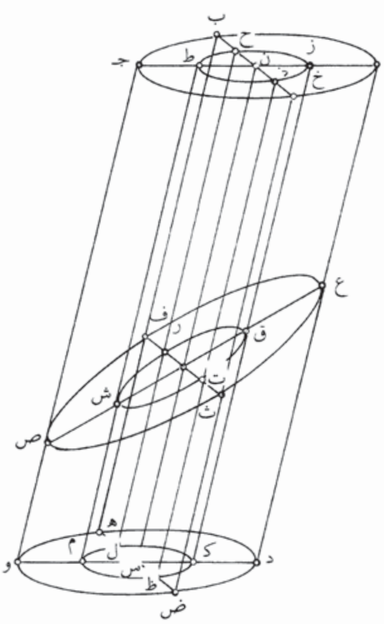
– **يب** – إذا كانت أسطوانتان وكانت دائرتا قاعدتي إحداهما في سطح دائرتي قاعدتي الأسطوانة الأخرى، وكان مركزاهما مركزيها، وقَطَع الأسطوانتين جميعًا سطحٌ واحد يقطع أضلاعهما فيهما، فإن القطعين الحادثين في الأسطوانتين متشابهان، ونِسَبُ أقطارِهما بعضِها إلى بعض، كلُّ نظيرٍ إلى نظيره، كنسبة قطرِ دائرةِ قاعدةِ الأسطوانةِ 〈الواحدةُ إلى قطر دائرة قاعدةِ〉 الأخرى.

فليكن أسطوانتان على دائرتي قاعدتي إحداهما ا ب جـ د هـ و، وعلى دائرتي قاعدتي الأسطوانة الأخرى ز ح ط ك ل م، وليكن دائرتا ا ب جـ ز ح ط في سطح واحد، ومركزهما جميعًا نقطة ن، وليكن دائرتا د هـ و ك ل م أيضًا في سطح واحد ومركزهما جميعًا نقطة س،

1 زس (الأولى والثانية): رس – 3-4 مثل ... فزاوية م ن ك: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 3 م ن ك: م ز ك – 6 إن: أثبتها فوق السطر – 11 بها: به – 17 أقطارهما: أقطارها، وهو أيضًا صحيح على تقدير أن أقلّ الجمع اثنان.

وسهم الأسطوانتين جميعًا ‹ن س؛ وليقطع الأسطوانتين معًا› سطحٌ يقطع أضلاعها فيها، وليحدثْ في أسطوانة ا ب جـ د هـ وقِطع ع ف ص، وفي أسطوانة ز ح ط ك ل م قطع ق ر ش.

فأقول: إن قطعي ع ف ص ق ر ش متشابهان، وإن نسبة كل واحد من أقطار قطع ع ف ص إلى نظيره من أقطار قطع ق ر ش كنسبة قطر دائرة ا ب جـ إلى قطر دائرة ز ح ط.



برهان ذلك: أنا إن قطعنا الأسطوانتين جميعًا بسطح يمرّ بسهمها – الذي هو ن س – أحدث فيها سطحين متوازيي الأضلاع، وإذا جعلناهما سطحي ا د و جـ ز ك م ط، كانت أضلاع هذين السطحين متوازية. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذين السطحين وللسطح الأول القاطع للأسطوانتين خط ع ق ش ص، كانت نسبة ع ص إلى ق ش كنسبة ا جـ إلى ز ط، وكنسبة د و إلى ك م، لأن خطوط ا ع د ز ق ك ط ش م ‹جـ ص و› متوازية وكان خطّا ع ص ق ش قطرين من أقطار قطعي ع ف ص ق ر ش، لأنها يمرّان بموضع قطع هذين القطعين لسهم ن س الذي هو مركز للقطعين.

وكذلك أيضـًا نبيّن أن كل قطر من أقطار قطع ع ف ص ينفصل منه في قطع ق ر ش قطر من أقطار ق ر ش مثلَ ما انفصل من قطر ع ص قطرُ ق ش.

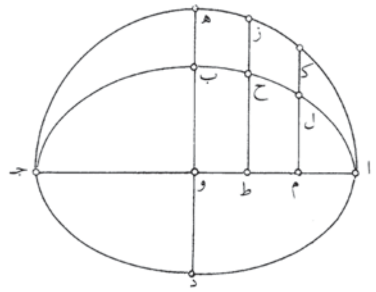
وإنا إن قطعنا الأسطوانتين بسطح يمرّ بقطر آخر من أقطار قطع ع ف ص – أيّ قطر كان – مثل قطر ف ر ت ث فأحدث في دوائر قواعد الأسطوانتين فصول ب خ ح ذ هـ ض ل ظ، كانت نسبة ف ث إلى ر ت كنسبة ب خ إلى ح ذ وكنسبة هـ ض إلى ل ظ. وقد كنا بيّنا أن نسبة ع ص إلى ق ش كنسبة ا جـ إلى ز ط وكنسبة د و إلى ك م. ولكن خطوط ا جـ د و ب خ هـ ض متساوية لأنها أقطارٌ لدائرتي ا ب جـ د هـ و، وخطوط ز ط ح ذ ك م ل ظ أيضًا متساوية لأنها أقطارٌ لدائرتي ز ح ط ك ل م، فنسبة قطر ف ث إلى قطر ر ت كنسبة قطر ع ص إلى قطر ق ش. وكذلك أيضًا نبيّن أن جميع أقطار قطعي ع ف ص ق ر ش هذه حالها. فإذ كان ذلك كذلك فإن قطعي ع ف ص ق ر ش إما أن يكونا جميعًا دائرتين، فيكون قد تبيّن ما أردنا، وإما ألاّ يكونا كذلك، فيكون الذي ينفصل من أطول أقطار قطع ⟨ع ف ص داخل قطع ق ر ش هو أطول أقطار قطع⟩ ق ر ش، والذي ينفصل من أقصر أقطار قطع ع ف ص داخلَ قِطع ق ر ش هو أقصرَ أقطار قطع ق ر ش. وأطولُ أقطار كل قطعٍ هو سهمه الأطول، وأقصرُ أقطاره هو سهمه الأقصر؛ فيكون نسبة السهم الأطول / من سهمي قطعٍ ع ف ص إلى السهم الأطول من سهمي ٩ – ظ قطع ق ر ش كنسبة السهم الأقصر من سهميه إلى السهم الأقصر من سهميه. وإذا بدلنا كانت نسبة السهم الأول من سهمي قطع ع ف ص إلى السهم الأقصر منها كنسبة السهم الأطول من سهمي قطع ق ر ش إلى السهم الأقصر، فقطعا ع ف ص ق ر ش متشابهان، للذي تبيّن في شكل ١٢ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط. وقد تبيّن أيضًا أن نسبة كل واحد من أقطار قطع ع ف ص إلى نظيره من أقطار قطع ق ر ش كنسبة قطر دائرة ا ب جـ إلى قطر دائرة ز ح ط؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– يج – إذا كان قطع ناقص وعمل على سهمه الأطول نصف دائرة، فإن الأعمدة التي تخرج من قوس النصف دائرة إلى سهم القطع الناقص الأطول تكون نسبها إلى ما يقع منها داخل القطع الناقص نسبًا متساوية.

فليكن قطع ناقص عليه ا ب جـ د وعلى سهمه الأطول ا جـ، وليكن على ا جـ نصف دائرة عليها ا هـ جـ، ولنخرج من قوس ا هـ جـ إلى سهم ا جـ أعمدة هـ ب و ز ح ط ك ل م.

فأقول: إن نسب هـ و إلى و ب، و ز ط إلى ط ح، و ك م إلى م ل نسب متساوية.

5 لأنها: لأنها – 9 يكونا: يكون – 15 فقطعا: فقطع – 16 ١٢: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٦: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها.



برهان ذلك : أن نسبة السطح الكائن من ضرب ا و في و ج إلى مربع خط و ب كنسبة سهم ا ج إلى ضلعه القائم للذي بيّن في شكل ٢١ من مقالة ١ من كتاب أبلونيوس في المخروط. ولكن السطح الكائن من ضرب ا و في و ج هو مثل مربع خط ه و، فنسبة مربع خط ه و إلى مربع خط و ب كنسبة سهم ا ج إلى ضلعه القائم.

وكذلك أيضًا نبيّن أن نسبة مربع خط ز ط إلى مربع خط ط ح، ونسبة مربع خط ك م إلى مربع خط م ل –كل واحدة منها– كنسبة سهم ا ج إلى ضلعه القائم. فنسب ه و إلى و ب، وز ط إلى ط ح، وك م إلى م ل نسب متساوية لأن نسب مربعاتها متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

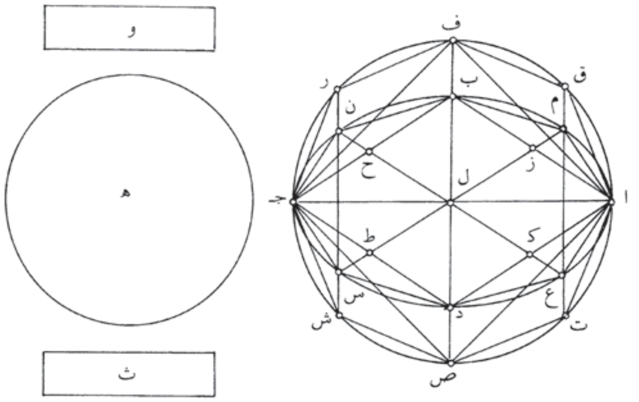
ويتبيّن أيضًا بمثل هذا المسلك أنه يجب في السهم الأقصر نظير ما قلناه في السهم الأطول.

– **يد** – كلُّ قطع ناقص فإن مساحته مساوية لمساحة دائرة يكون مربع قطرها مساويًا للسطح الكائن من ضرب أحد سهمي ذلك القطع في السهم الآخر منها.

فليكن قطعٌ ناقص عليه ا ب ج د، وليكن سهمه الأطول ا ج، وسهمه الأقصر ب د، وليكن دائرة عليها ه يساوي مربع قطرها السطح الكائن من ضرب ا ج في ب د.

فأقول : إن مساحة قطع ا ب ج د مساوية لمساحة دائرة ه.

6 كل واحدة منها: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها.



برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة قطع ا ب جـ د مساوية لمساحة دائرة هـ، فإنها إما أن تكون أكثر منها وإما أن تكون أقل منها.

فليكن أولاً مساحة قطع ا ب جـ د أكثر من مساحة دائرة هـ، إن أمكن ذلك، ولتكن زيادتها عليها مساوية لسطح و. فإذا أخرجنا خطوط ا ب ب جـ جـ د د ا المستقيمة، فإن قِطَعَ ا ب ب جـ جـ د د ا من القطع إما أن تكون أقلّ من سطح و وإما ألاّ تكون كذلك.

فإن كانت أقل منه فهو الذي أردنا، وإلاّ فإنا إذا قسمنا خطوط ا ب ب جـ جـ د د ا المستقيمة بنصفين نصفين على نقط ز ح ط ك وجعلنا مركز القطع نقطة ل، وأخرجنا خطوط ل ز ل ح ل ط ل ك وأنفذناها إلى نقط م ن س ع من الخط المحيط بالقطع، وأخرجنا خطوط ا م م ب ب ن ن جـ جـ س س د د ع ع ا، كانت مثلثات ا م ب ب ن جـ جـ س د د ع ا أكبر من أنصاف قطع ا ب ب جـ / جـ د د ا من القطع، لأنه لو أخرجت خطوط مماسّة للقطع على ١٠ - و نقط م ن س ع لكانت تكون موازية لخطوط ا ب ب جـ جـ د د ا المستقيمة للذي في شكل ١٧ من مقالة ١ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فإن كانت ‹قِطَعُ› ا م م ب ب ن ن جـ جـ س س د د ع ع ا من القطع أقلّ من سطح و ‹فهو الذي أردنا›، وإلاّ فإنا إذا فعلنا دائمًا كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بدٌّ من أن ننتهي إلى قطع تفصل من القطع أقلّ من سطح و. فنجعل القطع التي تفصل فيكون أقل من سطح و قطع ا م م ب ب ن ن جـ جـ س س د د ع ع ا، فيصير شكل ا م ب ن جـ س د ع أعظم من دائرة هـ. وإذا عملنا على خط ا جـ دائرة يكون ا جـ قطرًا

10 أنصاف: نصف – 12 ١٧: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها / ١: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها.

لها، وهي دائرة ا ف جـ ص، وأخرجنا خطي م ع ن س فقطعا سهم ا جـ على زوايا قائمة، وأنفذناهما إلى دائرة ا ف جـ ص إلى نقط ق ر ش ت، وأنفذ أيضًا خط ب د إلى نقطتي ف ص، وأخرجنا خطوط ا ق ق ف ف ر ر جـ جـ ش ش ص ص ت ت ا، كانت نسبة مثلث ا م ع إلى مثلث ا ق ت كنسبة قاعدة م ع إلى قاعدة ق ت، ونسبة سطح م ب د ع إلى سطح ق ف ص ت كنسبة خطي م ع ب د مجموعين إلى خطي ق ت ف ص مجموعين، لأن هذين السطحين متساويا الارتفاع. وكذلك أيضًا يكون نسبة سطح ب ن س د إلى سطح ف ر ش ص كنسبة خطي ب د ن س مجموعين إلى خطي ف ص ر ش مجموعين، ونسبة مثلث ن جـ س إلى مثلث ر جـ ش كنسبة ن س إلى ر ش ونِسَبُ م ع ب د ن س إلى ق ت ف ص ر ش، كلٌّ واحد إلى نظيره، نسبٌ متساوية لأن نسب أنصافها متساوية، فنسبة جميع شكل ا م ⟨ب⟩ ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع إلى جميع شكل ا ق ف ر جـ ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة ب د إلى ص ف. ولكن نسبة ب د إلى ص ف كنسبة السطح الكائن من ضرب ا جـ ⟨في ب د إلى السطح الكائن من ضرب ا جـ⟩ في ف ص الذي هو مثل مربع خط ف ص، فـنـسـبـة شـكـل ا م ب ن جـ س د ع المـسـتـقـيم الأضـلاع إلى شـكـل ا ق ف ر جـ ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة السطح الكائن من ضرب ا جـ في ب د إلى مربع خط ف ص. ولكن السطح الكائن من ضرب ا جـ في ب د مساوٍ لمربع قطر دائرة هـ، فنسبة شكل ا م ب ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع إلى شكل ا ق ف ر جـ ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة مربع قطر دائرة هـ إلى مربع خط ف ص الذي هو قطر دائرة ا ف جـ ص. ولكن نسبة مربع قطر دائرة هـ إلى مربع قطر دائرة ا ف جـ ص كنسبة دائرة هـ إلى دائرة ا ف جـ ص، فنسبةُ شكل ا م ب ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع إلى شكل ا ق ف ⟨ر⟩ جـ ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة دائرة هـ إلى دائرة ا ف جـ ص. وشكل ا م ب ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع أعظم من دائرة هـ، فشكل ا ق ف ر جـ ش ص ت المستقيم الأضلاع أعظم من دائرة ا ف جـ ص، وهي محيطة به، وهذا غير ممكن. فليس مساحةُ قِطع ا ب جـ د إذن بأكثرَ من مساحةِ دائرة هـ.

1 ا ف جـ ص: ا ق جـ ص – 8 ن جـ س: ب جـ س / ن س (الثانية): ن ش – 15 مساوٍ: أثبتها في الهامش – 20 ا ف جـ ص: ا ف جـ ض / ا م ب ن جـ س د ع: ا م ب ن جـ ش د ع – 21 الأضلاع: الخطوط، ثم أثبت الصواب في الهامش – 22 دائرة: أثبتها في الهامش / ا ف جـ ص: ا ف ح ص.

وأقول أيضًا: إنها ليست بأقل منها. فإن كان يمكن فليكن مساحة قطع ا ب جـ د أقل من مساحة دائرة هـ. فيكون نسبة دائرة هـ إلى دائرة ا ف جـ ص كنسبة قطع ا ب جـ د إلى سطح أصغر من دائرة ا ف جـ ص. فإذا جعلناها كنسبة قطع ا ب جـ د إلى سطح و، وجعلنا زيادة دائرة ا ف جـ ص على سطح و مثل سطح ث، وأخرجنا خطوط ا ف ف جـ جـ ص ص ا، فإن قِطَعَ ا ف ف جـ جـ ص ص ا من الدائرة إما أن تكون أقل من سطح ث وإما ألاّ تكون كذلك. وإن كانت أقل منه فهو الذي أردنا، وإلاّ فإنا إذا قسمنا قسي ا ف ف جـ جـ ص ص ا بنصفين نصفين على نقط ق ر ش ت، وأخرجنا خطوط ا ق ق ف ف ر رجـ جـ ش ش ص ص ت ت ا، كانت مثلثات ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا من الدائرة ‹أعظم من أنصاف قطع ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا.› فإن كانت قطع ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا من الدائرة أقلَّ من سطح ث، ‹فهو الذي أردنا›، وإلاّ فإذا فعلنا ذلك دائمًا كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بدّ من أن ننتهي إلى قِطع تفصل من دائرة ا ف جـ ص أقل من سطح ث. فإذا جعلنا القطع التي تفصل ويكون أقل من سطح ث قطع ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا، بقي شكل ا ق ف رجـ ش ص ت المستقيم الأضلاع أعظم من سطح و وسطح و أصغر منه. وإذا أخرجنا خطوط ق ت ف ص ر ش تقطع الخط المحيط بقطع ا ب جـ د على نقط م ب ن س د ع، وأخرجنا خطوط ا م م ب ب ن ن جـ جـ س س د د ع ع ا، تبين كما بيّنا آنفًا أن نسبة شكل / ا م ب ن جـ س ‹د› ع المستقيم الأضلاع إلى شكل ا ق ف رجـ ش ص ت المستقيم ١٠ – ظ الأضلاع كنسبة دائرة هـ إلى دائرة ا ف جـ ص. ولكن نسبة دائرة هـ إلى دائرة ا ف جـ ص قد كنا جعلناها كنسبة قطع ا ب جـ د إلى سطح و. فنسبة شكل ا م ب ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع إلى شكل ا ق ف رجـ ش ص ت المستقيم الأضلاع كنسبة قطع ا ب جـ د إلى سطح و. ولكن شكل ا ق ف رجـ ش ص ت المستقيم الأضلاع أعظم من ‹سطح و، فشكل ا م ب ن جـ س د ع المستقيم الأضلاع أعظم من› قطع ا ب جـ د، والقطع محيط به، وذلك غير ممكن. فليس مساحة قطع ا ب جـ د بأقلَّ من مساحة دائرة هـ. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

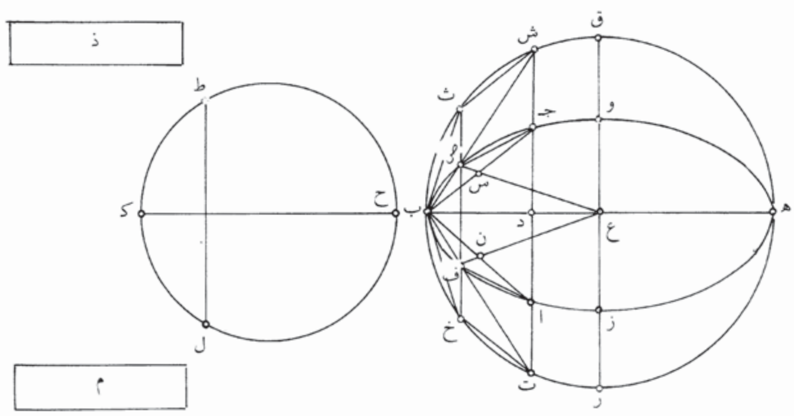
2 ا ف جـ ص: ا ف ح ص – 3 ا ف جـ ص: ا ف ح ص – 9 ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا: ا ق ق ف ف ر رجـ جـ ش ش ص ص ت ت ا، وأثبتها ف ر في الهامش – 10 فإذا فعلنا: فانا نفعل، ثم أثبت الصواب في الهامش – 12 ا ق ف ف رجـ جـ ش ص ص ت ا: ا ق ق ف ف ر رجـ جـ ش ش ص ص ت ت ا – 14 ا ب جـ د: ا جـ ب د، ثم أثبت الصواب في الهامش / س: ش.

ويتبين مما علمنا أن كل قِطعٍ ناقص فإنه مناسب للدائرتين اللتين تعملان على سهميه فيما بينهما.

– **يه** – كل قطعة من قطع ناقص يكون قطرها عمودًا على قاعدتها، ويكون ذلك القطر قطعة من السهم الأطول، فإن مساحتها مساوية لمساحة قطعة من الدائرة المساوية للقِطع كلّه، يكون نسبة وترها إلى قطر تلك الدائرة كنسبة قاعدة القطعة من القطع إلى السهم الأصغر من سهمي القطع، على أن تكون القطعة من القطع إن كانت أقل من نصف القطع كانت القطعة من الدائرة أقلّ من نصف الدائرة، وإن لم تكن القطعة من القطع أقلّ من نصف القطع لم تكن القطعة من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

فليكن قطعة من القطع الناقص، عليها ا ب جـ، وقاعدتها ا جـ وقطرها ب د، وليكن ب د عمودًا على ا جـ، وليكن أيضًا ب د قطعة من السهم الأطول من سهمي القطع، وليكن جميع القطع ا ب جـ هـ، وسهمه الأطول ب هـ، وسهمه الأقصر و ز، والدائرة المساوية للقطع ح ط ك ل وقطرها ح ك. وليكن نسبة وتر ط ل إلى قطر ح ك كنسبة ا جـ إلى و ز. فإن كانت قطعة ا ب جـ من القطع أقل من نصفه، فليكن قطعة دائرة ط ك ل أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن قطعة ا ب جـ من القطع أقل من نصف القطع، فلا تكونن قطعة ط ك ل من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

فأقول: إن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ط ك ل من الدائرة.



3 قطع: قد تقرأ ضلع – 11 القطع: للقطع.

برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ط ك ل من الدائرة، فإنها إما أن تكون أكثرَ منها، وإما أقلَّ منها.

فليكن أولاً مساحة قطعة ا ب جـ من القطع أكثر من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة، إن أمكن ذلك، وليكن زيادتها عليها مساوية لسطح م. فإذا أخرجنا خطي ا ب ب جـ المستقيمين فإن قطعتي ا ب ب جـ من القطع إما أن تكونا أقلّ من سطح م، وإما ألاّ تكونا كذلك. فإن كانتا أقلّ منه فهو الذي أردنا، وإلاّ فإنا إذا قسمنا خطي ا ب ب جـ المستقيمين بنصفين على نقطتي ن س، وجعلنا مركز القطع نقطة ع / ١١ – و وأخرجنا خطي ع ن ع س وأنفذناهما إلى نقطتي ف ص من الخط المحيط بالقطع، وأخرجنا خطوط ا ف ف ب ب ص ص جـ المستقيمة، كان مثلثا ا ف ب ب ص جـ أكثر من نصف قطعتي ا ب ب جـ من القطع، لأنه لو أخرج خطان مماسّان للقطع على نقطتي ف ص لكانا سيكونان موازيين لخطي ا ب ب جـ المستقيمين للذي تبين في شكل ١٧ من مقالة ا من المخروطات. فإن كانت قطع ا ف ف ب ب ص ص جـ من القطع أقلّ من سطح م ‹فهو الذي أردنا›، وإلا فإنا إذا فعلنا دائمًا كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بدّ من أن ننتهي إلى قِطع تفصل من قطعة ا ب جـ أقل من سطح م، ‹ولتكن› قِطَعُ ا ف ف ب ب ص ص جـ، فتصير قطعة دائرة ط ك ل أصغر من شكل ا ف ب ص جـ المستقيم الأضلاع.

وإذا عملنا على خط ب هـ دائرة يكون ب هـ قطرًا لها، وهي دائرة ب ق هـ ر، وأخرجنا خطي و ز جـ ا إلى نقط ق ر ش ت، ووصلنا خط ف ص فيما بين نقطتي ص ف، وأنفذناه إلى دائرة ب ق هـ ر إلى نقطتي ث خ، وأخرجنا خطوط ت خ خ ب ب ث ث ش، تبين من ذلك – كما بيّنا في الشكل الذي قبل هذا – أن نسبة سطح ا ف ب ص جـ المستقيم الأضلاع ‹إلى سطح ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع› كنسبة جـ ا إلى ت ش التي هي كنسبة و ز إلى ق ر، وأن نسبته أيضًا إليه كنسبة دائرة ح ط ك ل إلى دائرة ب ق هـ ر. وأيضًا فإن نسبة جـ ا إلى ت ش كنسبة و ز إلى ق ر. وإذا بدلنا كانت نسبة جـ ا إلى و ز ‹كنسبة ت ش إلى ق ر. ولكن نسبة ا جـ إلى و ز› كنسبة ط ل إلى ح ك، فنسبة ش ت إلى ق ر كنسبة ط ل إلى ح ك. فأما خط ح ك فهو قطر دائرة ح ط ك ل، وأما خط ق ر فهو قطر دائرة ب ق هـ ر. وقطعتا دائرتي ت ب ش ط ك ل إن كانت إحداهما أصغر من نصف دائرة، فالأخرى أصغر من نصف دائرة.

11 ١٧ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / آ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 15 ب ق هـ ر: ن ف ص – 17 ت خ: ث خ – 20 ق ر: ف ز / ح ط ك ل: خط ك ل.

وإن لم تكن أصغر من نصف دائرة، فليس الأخرى بأصغر من نصف دائرة، فهما إذن متشابهتان. فنسبة كل واحدة منها إلى الأخرى كنسبة الدائرة التي هي قطعة منها إلى الدائرة التي الأخرى قطعةٌ منها. فنسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة دائرة ح ط ك ل إلى دائرة ب ق ه ر. وقد كنا بيّنا أن نسبة دائرة ح ط ك ل إلى دائرة ب ق ه ر كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع، فنسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع. وقد كانت قطعة دائرة ط ك ل أصغر من شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع، فقطعة دائرة ت ب ش أصغر من شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع، وذلك غير ممكن لأنها محيطة به. فليست مساحة ⟨قطعة⟩ ا ب ج من القطع بأكثر من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة.

وأقول أيضـًا: إنها ليست بأقلَّ منها. فإن كان يمكن، فليكن مساحة قطعة ا ب ج من القطع أقل من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة، فتكون نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح أصغر من قطعة دائرة ت ب ش. فإذا جعلناها كنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح م، وجعلنا زيادة قطعة دائرة ت ب ش على سطح م مثل سطح ذ، وأخرجنا خطي ت ب ب ش، فإن قطعتي ت ب ب ش من الدائرة إما أن تكونا أقل من سطح ذ، وإما ألّا تكونا كذلك. فإن كانتا أقلّ منه فهو الذي أردنا، وإلّا فإنا إذا قسمنا قوسي ت ب ب ش بنصفين نصفين على نقطتي خ ث، وأخرجنا خطوط ت خ خ ب ب ث ث ش، كان مثلثا ت خ ب ث ب ش أكثر من نصف قطعتي ت خ ب ث ب ش من الدائرة. فإن كانت قطع ت خ خ ب ب ث ث ش من الدائرة أقلّ من سطح ذ ⟨فهو الذي أردنا⟩، وإلاّ فإنا إذا فعلنا دائمًا كما فعلنا فيما تقدم، لم يكن بدّ من أن ننتهي إلى قطع تفصل من قطعة دائرة ت ب ش أقلّ من سطح ذ. فإذا جعلنا القطع التي تفصل ويكون أقل من سطح ذ، قِطَعَ ت خ خ ب ب ث ث ش، بقي شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع أعظم من سطح م وسطح م / أصغر منه. وإذا أخرجنا خط ث خ فقطع الخط المحيط بقطعة ا ب ج ⟨من القطع⟩ على نقطتي ص ف، وأخرجنا خطوط ا ف ف ب ب ص ص ج، وسلكنا مثل السبيل ١١ – ظ

15 ذ: د – 16-17 فإنا إذا قسمنا: فإنا نقسم، ثم أثبت الصواب في الهامش – 21 التي تفصل: ممحوة في النص وأثبتها في الهامش – 22 قطع: قد تقرأ «بقطع» / ت خ ب ث ش: ا ث خ ت ب ش – 23 بقطعة: بقطع – 24 ب ص ص ج: ب ض ض ج.

التي سلكناها فيما تقدم، تبيّن – كما بيّنا آنفًا – أن نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع. وقد كانت نسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ت ب ش كنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح م. فنسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى سطح م كنسبة شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع إلى شكل ت خ ب ث ش المستقيم الأضلاع. فقطعة ا ب ج من القطع أصغر من شكل ا ف ب ص ج المستقيم الأضلاع، وهذا غير ممكن لأنها محيطة به. فليس مساحة قطعة ا ب ج من القطع بأقل من مساحة قطعة ط ك ل من الدائرة؛ وقد كما بيّنا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أن مساحة قطعة ا ب ج من القطع مثلُ مساحة قطعة من دائرة ح ط ك ل يكون نسبة سهمها إلى قطر ح ك كنسبة قطر قطعة ا ب ج – الذي هو ب د – إلى ب ه الذي هو السهم الأطول، وذلك أن ب د هو أيضًا سهم قوس ت ب ش التي هي شبيهة بقوس ط ك ل.

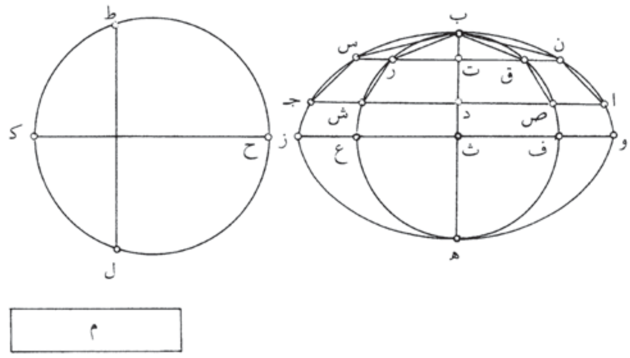
– يو – كل قطعة من قطع ناقص يكون قطرها عمودًا على قاعدتها، ويكون ذلك القطر قطعة من السهم الأقصر، فإن مساحتها مساوية لمساحة قطعة من الدائرة المساوية للقطع كلّه، تكون نسبةُ وترها إلى قطر الدائرة كنسبة قاعدة القطعة من القِطع إلى السهم الأطول من سهمي القطع، على أن تكون القطعة من القطع إن كانت أقل من نصف القطع كانت القطعة من الدائرة أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن القطعة من القطع أقل من نصف القطع لم تكن القطعة من الدائرة بأقل من نصف الدائرة.

فلتكن قطعة من القطع الناقص عليها ا ب ج، وقاعدتها ا ج وقطرها ب د؛ وليكن ب د عمودًا على ا ج وليكن ب د أيضًا قطعةً من السهم الأقصر من سهمي القطع، وليكن جميع القطع ا ب ج ه وسهمه الأقصر ب ه وسهمه الأطول و ز، والدائرة المساوية للقطع ح ط ك ل وقطرها ح ك. ولتكن نسبةُ وتر ط ل إلى قطر ح ك كنسبة ا ج إلى و ز. وإن كانت قطعة ا ب ج من القطع أقل من نصفه، فلتكن قطعة دائرة ط ك ل أقل من نصف الدائرة، وإن لم تكن قطعة ا ب ج من القطع أقل من نصفه، فلا تكونن قطعةُ دائرة ط ك ل بأقل من نصفها.

4 من القطع (الأولى): أثبتها في الهامش – 7 قطعة (الأولى): قطع، ثم أثبت الصواب في الهامش.

فأقول: إن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ط ك ل من الدائرة.

برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساوية / ‹لمساحة› قطعة ١٢ - و دائرة ط ك ل فإنها إما أن تكون أكثر منها وإما أقل.



فلتكن أولاً مساحة قطعة ا ب جـ من القطع أكثر من مساحة قطعة دائرة ط ك ل إن أمكن ذلك؛ ولتكن زيادتها عليها مثل سطح م. وإذا سلكنا مثل السبيل التي سلكناها في الشكل الذي قبل هذا حتى نعمل في قطعة ا ب جـ من القطع شكلاً مستقيم الأضلاع أعظم من قطعة دائرة ط ك ل، فكان ذلك الشكل شكل ا ن ب س جـ، وعملنا على خط ب هـ دائرة يكون ب هـ قطرًا لها، فكانت دائرة ب ع هـ ف، ووصلنا خط ن ق ر س فيما بين نقطتي ن س، فإن نسبة ق ت إلى ت ن تكون كنسبة ص د إلى د ا وكنسبة ف ث إلى ث و. ونبيّن كما بيّنا في الشكلين اللذين قبل هذا أن نسبة شكل ا ن ب س جـ المستقيم الأضلاع إلى شكل ص ق ب ر ش المستقيم الأضلاع كنسبة قطعة دائرة ط ك ل إلى قطعة دائرة ص ب ش التي هي شبيهة بها. ولكن شكل ا ن ب س جـ المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة دائرة ط ك ل، فشكل ص ق ب ر ش المستقيم الأضلاع أعظم من قطعة دائرة ص ب ش، وذلك غير ممكن، لأنها محيطة به. فليس مساحة قطعة ا ب جـ من القطع بأكثر من مساحة قطع ط ك ل من الدائرة.

وبمثل السبيل التي سلكناها في الشكل الذي قبل هذا، نبيّن أنها ليست بأقل منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

2 قطعة (الثانية): لقطعة – 11 الأضلاع: أثبتها في الهامش.

وهنالك استبان أن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مثل مساحة قطعة من دائرة ح ط ك ل يكون نسبة سهمها إلى قطر ح ك كنسبة قطر قطعة ا ب جـ، الذي هو ب د، إلى ب هـ الذي هو السهم الأقصر، وذلك أن ب د هو أيضًا سهم قوس ص ب ش التي هي شبيهة بقوس ط ك ل.

– يز – كلّ قطعة من قِطع ناقص، أيّ قطعة كانت، فإن مساحتها مساوية لمساحة القطعة من الدائرة المساوية لذلك القِطع، التي قد يخرج من طرفي قاعدتها عمودان إلى قطر من أقطار الدائرة، وإذا أُخرج من طرفي قاعدة قطعة القطع عمودان إلى أحد سهمي القطع، كانت نسبة كل واحدٍ من العمودين الواقعين على ذلك السهم إلى السهم الآخر كنسبة نظيره من العمودين الواقعين على قطر الدائرة إلى قطر الدائرة. وكان العمودان الواقعان على سهم القطع واقعين عليه جميعًا من جهة واحدة، ⟨وكان العمودان الواقعان على قطر الدائرة واقعين عليه أيضًا جميعًا من جهة واحدة⟩ أو كان العمودان الواقعان على سهم القطع واقعين عليه من جهتين مختلفتين، والعمودان الواقعان على قطر الدائرة واقعين عليه أيضًا من جهتين مختلفتين، وكان مركز القطع بين مسقطي العمودين الواقعين على سهمه، ومركزُ الدائرة بين مسقطيْ العمودين الواقعين على قطرها، أو لم يكن مركزُ القطع فيما بين ⟨مسقطي⟩ العمودين الواقعين على سهمه، ولا مركزُ الدائرة فيما بين ⟨مسقطي⟩ العمودين الواقعين على قطرها، وكانت قطعة القطع أقلّ من نصف القطع، وقطعة الدائرة أقل من نصف الدائرة، أو كانت قطعة القطع ليست بأقلّ من نصفه، ولا قطعة الدائرة بأقلّ من نصفها.

فليكن قطعة من قطع ناقص عليها ا ب جـ، وعلى قاعدتها ا جـ، ولتكن أولاً أقل من نصف القطع. وليكن القطع ا ب جـ د، وليكن / د هـ من الصورة الأولى والثالثة والخامسة والسابعة ١٢ – ظ
السهم الأطول، و وز السهم الأقصر. وأمّا من الصورة الثانية والرابعة والسادسة والثامنة: فليكن الأمر على خلاف ذلك، أعني أن يكون السهم الأطول و ز، والسهم الأقصر د هـ. وليكن مركز القطع نقطة ح، وليخرج من نقطتي ا جـ عمودان على سهم د هـ في جميع صور القطع، وهما ا ط جـ ك. ولتكن الدائرةُ المساويةُ لقِطع ا ب جـ د دائرةَ ل م ن ومركزُها س. ولتكن قطعة أقلّ من نصفها قاعدتُها ل م، وليُخرج من نقطتي ل م إلى قطر من أقطار الدائرة – وهو قطر ن ع –

7 سهمي: سهم – 19 القطع (الأولى): للقطع – 23 ومركزها: غير واضحة.

عمودان وهما ل ف م ص. وليكن نسبة كل واحد من عمودي ا ط جـ ك إلى سهم و ز من جميع صور القطع كنسبة نظيره من عمودي ل ف م ص إلى قطر ن ع من جميع صور الدائرة. وليكن عمودا ا ط جـ ك إمّا واقعين جميعًا على سهم د هـ من جهة واحدة من جهتي هذا السهم، وعمودا ل ف م ص أيضًا من جهة واحدة من جهتي قطر ن ع على ما في الصورة الأولى والثانية والثالثة والرابعة، وإما واقعين من جهتين مختلفتين من جهتي سهم د هـ، وعمودا ف ل م ص أيضًا من جهتين مختلفتين من جهتي قطر ن ع على ما في باقي الصور. وليكن مركز ح إما فيما بين عمودي ا ط جـ ك، ومركز س فيما بين عمودي ل ف م ص على ما في الصورة الأولى والثانية والخامسة والسادسة، وإما ألّا يكون فيما بين عمودي ا ط جـ ك، ولا يكون مركزُ س فيما بين عمودي ل ف م ص، كما في الصورة الثالثة والرابعة والسابعة والثامنة.

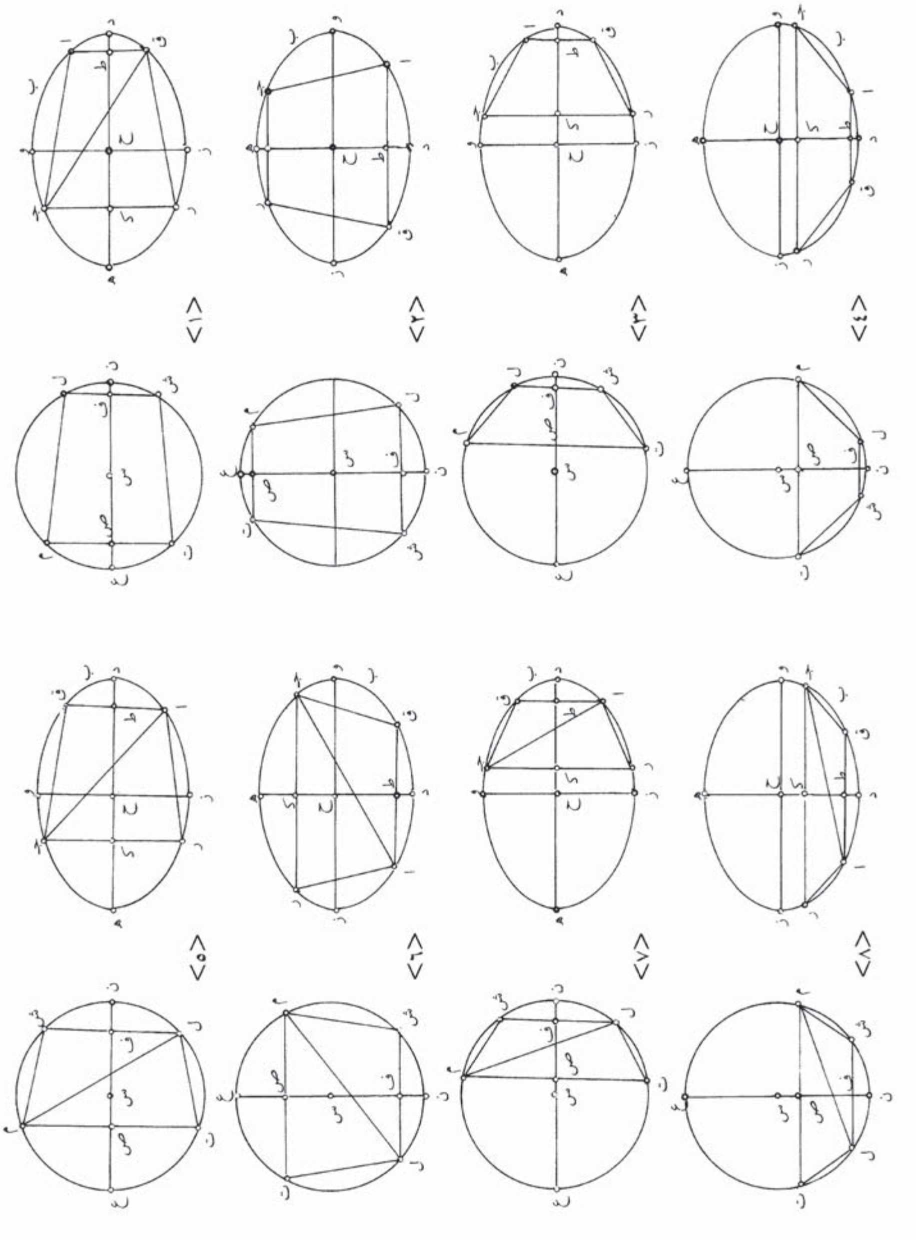
فأقول: إن مساحة قطعة ا ب جـ من القِطع مساوية لمساحة قطعة ل م من الدائرة.

برهان ذلك: أنا إذا أخرجنا أعمدة ا ط جـ ك ل ف م ص من جميع الصور على استقامة إلى نقط ق ر ش ت، وأخرجنا أولاً، في الصورة الأولى والثانية والثالثة والرابعة، خط ق ا، كانت نسبة ا ق، الذي هو قاعدةُ قطعة ا د ق من القطع، إلى سهم و ز كنسبة وتر ل ش إلى قطر ن ع. وخط د ط هو قطر قطعة ا د ق من القطع، وهو قطعة من سهم د هـ، وقطعة ا د ق من القطع أقلّ من نصفه، وقطعة دائرة ل ش أيضًا أقلّ من نصف الدائرة، فمساحة قطعة ا د ق من القطع مساوية لمساحة قطعة ل ن ش من الدائرة.

وبمثل ذلك أيضًا نبيّن أن مساحة قطعة جـ د ر من القطع – التي هي في الصورة الأولى والثانية أكثرُ من نصفه، وفي الصورة الثالثة والرابعة أقلُّ من نصفه – مساوية لمساحة قطعة م ن ت من الدائرة، إذ كانت أيضًا في الصورة الأولى والثانية أكثر من نصفها، وفي الثالثة والرابعة أقلّ من نصفها؛ فتبقى مساحة قطعة ا ط ق ر ك جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ل ف ش ت ص م من الدائرة.

وأيضًا، فإن نسبة د ط إلى د هـ كنسبة ن ف إلى ن ع، ونسبة د ك أيضًا إلى د هـ كنسبة ن ص إلى ن ع، فتبقى نسبة ط ك إلى د هـ كنسبة ف ص إلى ن ع. وإذا بدلنا كانت نسبة ط ك إلى ف ص كنسبة د هـ إلى ن ع. وأيضًا فإن نسبة ا ق، إذْ كان مثليْ ا ط، إلى و ز كنسبة ل ش، إذ كان مثلي ل ف، إلى ن ع؛ ونسبة جـ ر، إذ كان مثلي جـ ك، إلى و ز كنسبة م ت، إذْ

4 قطر: قطع – 11 م ص: م جـ – 12 ق ا: ق ن – 20 فتبقى: فتبقا – 23 فتبقى: فتبقا – 24 ا ط: ل ط.



كان مثلي م ص، إلى ن ع. وإذا جمعنا، كانت نسبة خطي ا ق جـ ر مجموعين إلى و ز كنسبة ل ش م ت مجموعين إلى ن ع. وإذا بدلنا كانت نسبة خطي ا ق جـ ر مجموعين إلى خطي ل ش م ت مجموعين كنسبة و ز إلى ن ع. وقد كنا بيّنا أن نسبة ط ک إلى ف ص كنسبة د هـ إلى ن ع. فالنسبة المؤلّفة من نسبة خطي ا ق جـ ر مجموعين إلى خطي ل ش م ت مجموعين، ومن نسبة ط ک إلى ف ص هي كالنسبة المؤلفة من نسبة و ز إلى ن ع ومن نسبة د هـ إلى ن ع. فأما النسبة المؤلفة من نسبة خطي ا ق جـ ر مجموعين إلى خطي ل ش م ت مجموعين ومن نسبة ط ک إلى ف ص / فهي كنسبة السطح الكائن من ضرب خطّي ا ق جـ ر مجموعين في خط ط ک إلى السطح الكائن من ضرب خطي ل ش م ت مجموعين في خط ف ص. وأما النسبة المؤلفة من نسبة و ز إلى ن ع، ومن نسبة د هـ إلى ن ع، فهي كنسبة السطح الكائن من ضرب و ز في د هـ إلى مربع خط ن ع. ولكن السطح الكائن من ضرب و ز في د هـ مساوٍ لمربع خط ن ع، فالسطح الكائن من ضرب خطّي ا ق جـ ر مجموعين في خط ط ک مساوٍ للسطح الكائن من ضرب خطي ل ش م ت مجموعين في خط ف ص. ونصف السطح الكائن من ضرب خطي ا ق جـ ر مجموعين في خط ط ک هو سطح ا ق ر جـ ذو الأربعة الأضلاع، ونصف السطح الكائن من ضرب خطي ل ش م ت ⟨مجموعين⟩ في خط ف ص هو سطح ل ش ت م ذو الأربعة الأضلاع. فسطح ا ق ر جـ ذو الأربعة الأضلاع مساوٍ لسطح ل ش ت م ذي الأربعة الأضلاع. وقد كنا بيّنا أن مساحة قطعة ق ط ا ب جـ ک ر من القطع مساوية لمساحة ⟨قطعة⟩ ش ف ل م ص ت من الدائرة، فتبقى مساحة قطعتي ا ب جـ ق ر من القطع – إذا جُمعتا – مساويةً لمساحة قطعتي ل م ش ت من الدائرة إذا جُمعتا. ولكنّ قطعتي ل م ش ت من الدائرة متساويتان، وقطعتا ا ب جـ ق ر من القطع أيضًا متساويتان، للذي تبيّن في شكل ٨ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط، فمساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ل م من الدائرة. و-١٣

وأيضًا، فإنّا نجعل كلامنا في الصورة الخامسة والسادسة والسابعة والثامنة. ونُخرج خطوط ق جـ ا ر ل ت ش م، ونبيّن كما بيّنا آنفًا أن مساحة قطعة ا د ق من القطع مساوية لمساحة قطعة ل ن ش من الدائرة، وأن مساحة شكل ق جـ ر ا ذي الأربعة الأضلاع مساوية لمساحة شكل

4 جـ ر: جـ ز – 7 جـ ر: جـ ز – 11 جـ ر: جـ ن – 16 ق ط ا ب جـ ک ر: ق ط ا ب جـ ک ز – 19 ٨: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة – 20 ٦: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 23 ا ر: ا ز / ل ت: ل ز.

ل ش م ت ذي الأربعة الأضلاع، وأن مساحة قطعة ق جـ من القطع مساوية لمساحة قطعة ش م من الدائرة. وأيضًا فإن نسبة ا ق، إذ كان مثلي ا ط، إلى و ز كنسبة ل ش، إذ كان مثلي ل ف، إلى ن ع؛ ونسبة و ز إلى جـ ر، إذ كان مثلي جـ ك، كنسبة ن ع إلى م ت، إذ كان مثلي م ص. ففي نسبة المساواة يكون نسبة ا ق إلى جـ ر كنسبة ل ش إلى م ت. فأما نسبة ا ق إلى جـ ر فهي كنسبة مثلث ا جـ ق إلى مثلث ا جـ ر لأن ارتفاعي هذين المثلثين متساويان، وذلك أن ارتفاع كل واحد منهما مثل ط ك. وأما نسبة ل ش إلى م ت، فهي كنسبة مثلث ل ش م إلى مثلث ل ت م، لأن ارتفاعي هذين المثلثين متساويان، إذ كان ارتفاع كل واحد منهما مثل ف ص. فنسبة مثلث ا ق جـ إلى مثلث ا ر جـ كنسبة مثلث ل ش م إلى مثلث ل ت م. وقد كنا بيّنا أن شكلي ا ق جـ ر ل ش م ت ذي الأربعة الأضلاع متساويان، فمثلث ا ق جـ مساوٍ لمثلث ل ش م. وقد كنا بيّنا أن مساحة قطعتي ا د ق ق جـ من القطع مساويةٌ ⟨لمساحة قطعتي ل ن ش ش م من الدائرة، فمساحة جميع قطعة ا ق جـ من القطع مساوية⟩ لمساحة جميع قطعة ل ش م من الدائرة.

وأيضًا، فإن قطعة القطع إن كانت أكثرَ من نصف القطع مثلَ قطعة ا هـ جـ، وكانت قطعة الدائرة أكثر من نصف الدائرة مثل ل ع م، فإن مساحة قطعة ا هـ جـ من القطع تكون مثل مساحة قطعة ل ع م من الدائرة لأن مساحة جميع القطع مساويةٌ لمساحة جميع الدائرة، ومساحة قطعة ا ب جـ، التي هي أقلّ من نصف القطع، مثلُ مساحة قطعة ل م من الدائرة، التي هي أقلّ من نصف الدائرة؛ فتبقى مساحةُ قطعة ا هـ جـ من القطع مساويةً لمساحة قطعة ل ع م من الدائرة. وأما إذا كانت قطعةُ القطع نصفَ القطع، وقطعةُ الدائرة نصفَ الدائرة، فإن الأمر في تساويها بيّنٌ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وهنالك استبان أنه إذا كانت نسبةُ د ط إلى سهم د هـ كنسبة ن ف إلى قطر ن ع، وكانت نسبة ط ك إلى سهم د هـ كنسبة ف ص إلى قطر ن ع، فإن مساحة قطعة ا ب جـ من القطع مساويةٌ لمساحة قطعة ل م من الدائرة، وقطعة ا هـ جـ من القطع لقطعة ل ع م من الدائرة./

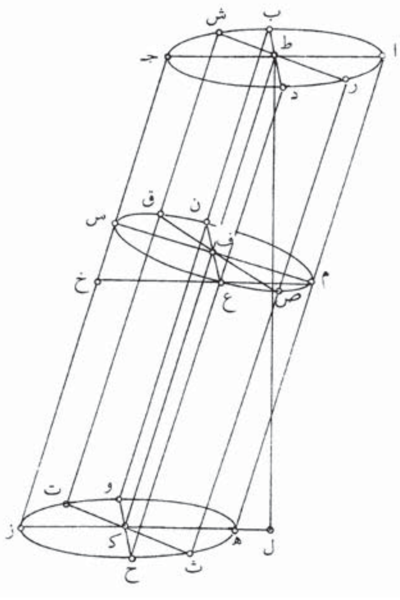
3 ل ف: ا ل ف / جـ ر: جـ ز – 4 جـ ر (الثانية): جـ ز – 5 فهي: أثبتها فوق السطر – 10 كنا: أثبتها في الهامش – 22 لقطعة: أثبتها تحت السطر.

〈 ٣ – في قطع الأسطوانة الأعظم وفي قطوعها الصغار 〉

– يح – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً مائلةً، ولقي سهمُ الأسطوانة ذلك السطحَ، إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها، فكان عمودًا عليه، فإن القطع الحادث منه في الأسطوانة قطعٌ ناقص، سهمُه الأطول مساوٍ لقطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، وسهمُه الأقصرُ خطٌّ يكون نسبته إلى قطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة كنسبة عمود الأسطوانة إلى سهمها، أو قطعة من قطع ناقص صفتُه هذه الصفةُ التي قلنا. ١٣ – ظ

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب ج د ه وزح، وعلى سهمها ط ك، ولنُخرج من نقطة ط عمودَ الأسطوانة وهو ط ل. وليقطع الأسطوانةَ سطحٌ يلقاه خط ط ك إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها، فيكون عمودًا على ذلك السطح، وليحدث في الأسطوانة قطع م ن س ع. فأما أن سطح م ن س ع إن لقي جميع أضلاع الأسطوانة فيها فهو قطع ناقص. فأمرٌ قد تبيّن لأنه ليس بموازٍ لقاعدتي الأسطوانة، ولا هو القطع المخالف الوضع.

فأقول: إن سهمه الأطول مساوٍ لقطر كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه وزح وإن سهمه الأقصر خطٌّ نسبته إلى قطر كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه وزح كنسبة ط ل إلى ط ك.



6 صفته: أثبتها في الهامش.

برهان ذلك: أنا إن قطعنا الأسطوانة بسطح يمرُّ بخطي ط ک ط ل، وهو سطحُ ا جـ ز هـ، وسطح آخر يقطع هذا السطحَ على زوايا قائمة ويمرّ بسهم ط ک، وهو سطحُ ب د ح و، فإن سطح ب د ح و يكون قائم الزوايا. وإذا جعلنا الفصل المشترك لهذا السطح ولسطح م ن س ع خط ن ع، كان خطّ ط ف ک قاطعًا لخط ن ع على زوايا قائمة، لأن خط ط ف عمود على سطح م ن س ع، وخط ن ع أيضًا عمود على خطي ب ن و د ع ح لأنهما موازيان لسهم ط ف ک، إذ كانا ضلعين من أضلاع الأسطوانة. وخطا ب ن د ع عمودان على خط ب د، لأن سطح ب د ح و قائم الزوايا؛ فخط ن ع مساوٍ لخط ب د الذي هو قطر دائرة ا ب جـ د ولخط و ح الذي هو قطر دائرة هـ و ز ح. وأيضًا فإن ن ع قطر من أقطار قطع م ن س ع، لأنه يمرّ بمركزه الذي هو / نقطة ف. وإن نحن أخرجنا قطرًا آخر من أقطاره، أيَّ قطرٍ كان، وهو ص ق، وأخرجنا ١٤ – و على خطي ص ق ط ف سطحًا يقطع الأسطوانة عليه ر ش ت ث، كان القِطع الحادث منه في الأسطوانة سطحًا متوازيَ الأضلاع وليس بقائم الزوايا. وخط ص ق عمود على خط ط ک لأن ط ف عمود على سطح م ن س ع؛ فخط ص ق إذن عمود على خطي ر ث ش ت المتوازيين، فخط ر ش أطول من خط ص ق. وخط ر ش هو قطر من أقطار دائرة ا ب جـ د، وكل واحد من أقطار دائرة ا ب جـ د مساوٍ لخط ن ع، فخط ن ع أطول من خط ص ق. وكذلك أيضًا يتبيّن أن خط ن ع أطول من سائر أقطار قطع م ن س ع، فهو إذن سهمه الأطول لأن السهم الأطول هو أطول أقطار القطع الناقص، للذي تبيّن في الشكل ١١ من المقالة ه من كتاب أبلونيوس في المخروط. وقد كنا بيّنا أن ن ع مساوٍ لقطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و ز ح.

وأقول أيضًا: إن نسبة سهم قطع م ن س الأقصر إلى قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و ز ح كنسبة ط ل إلى ط ک.

برهان ذلك: أن سطح ب د ح و يقطع سطح ا جـ ز هـ على زوايا قائمة، فإذا جعلنا الفصل المشترك لسطح ا جـ ز هـ مع سطح م ن س ع خط م س، ⟨فهو عمود على ط ف ک، و⟩كان قد أخرج في سطحي ا جـ ز هـ ب د ح و عمودان على ط ف ک الذي هو فصلهما المشترك، وهما ف ن ف م. فزاوية ن ف م قائمة، فخط م س يقطع خط ن ع الذي هو السهم الأطول على

7-8 ا ب جـ د ... دائرة: أثبتها في الهامش – 10 ط ف: ط ق – 16 ١١: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ه: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها.

زوايا قائمة، ويمرّ بنقطة ف التي هي مركز القطع، فخط م س هو السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع، للذي تبيّن في شكل ١٥ من مقالة ١ من كتاب أبلونيوس في المخروط.

وإذا أخرجنا من نقطة م خطًا موازيًا لخطي ا جـ هـ ز، وهو م خ، كانت زاوية م خ س الخارجة مساوية لزاوية هـ ز س الداخلة التي تقابلها. وكذلك أيضًا تكون زاوية هـ ز س مساوية لزاوية ط ك هـ، لأن خط ط ك موازٍ لخط ز س، فزاوية م خ س من زوايا مثلث م س خ مساوية لزاوية ط ك ل من زوايا مثلث ل ك ط، وزاويتا م س خ ط ل ك من زوايا هذين المثلثين أيضًا متساويتان لأنها قائمتان، وتبقى زاوية خ م س من مثلث م س خ مساوية لزاوية ك ط ل من مثلث ل ط ك. فمثلثا م س خ ط ك ل متشابهان. فنسبة م س إذن إلى م خ كنسبة ل ط إلى ط ك. ولكن خط م خ مساوٍ لخط ا جـ، الذي هو قطر من أقطار دائرة ا ب جـ د، إذ كان هو وخط ا جـ متوازيين، وكانا بين خطين متوازيين، فنسبة م س إلى قطر دائرة ا ب جـ د، الذي هو مثل قطر دائرة هـ وز ح، كنسبة ل ط إلى عمود ط ك. وقد كنا بيّنا أن م س هو السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع، فنسبة السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ع إلى قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وز ح كنسبة ل ط إلى ط ك.

وأما إن كان قطع م ن س ع لا يقطع جميع أضلاع الأسطوانة، فإن الأسطوانة إذا أخرجت على استقامة أضلاعها في الجهتين، وأخرج سطح م ن س ع حتى يقطع جميع أضلاعها، تبيّن مما قلنا آنفًا أن م ن س ع قطعة من قطع ناقص، صفتُه الصفةُ التي ذكرنا آنفًا؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

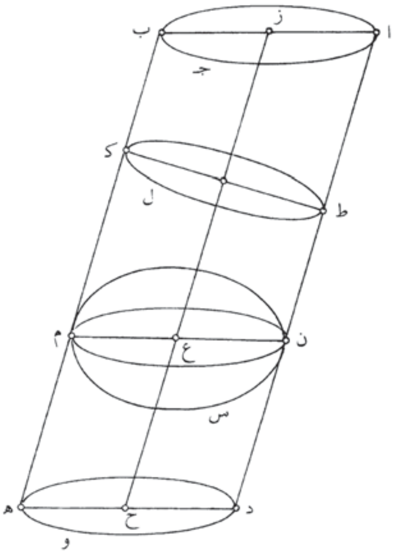
– **يط** – إذا قطع سطحٌ أسطوانةً مائلةً، ولقِي سهمُ الأسطوانة ذلك السطحَ، إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها، فكان عمودًا عليه، فإن القطع الناقص الحادث منه في الأسطوانة أو الذي في الأسطوانة قطعةٌ منه، لا يكون في السهام الطِّوال من سهام قطوع تلك الأسطوانة الناقصة سهمٌ أقصر من سهمه الأطول، ولا في سهامها القصار سهمٌ أطول من سهمه الأطول الذي هو مساوٍ لقطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، ولا أقصر من سهمه الأقصر، وليس / في ١٤ – ظ

2 شكل ١٥ من مقالة ١ : الأرقام ناقصة كالعادة، ولم نعثر على الشكل الذي ينطبق تمامًا في هذا الموضع، وما نقترحه هو أقرب الأشكال فحسب – 3 م خ س: م ح ش – 5 لزاوية: مكررة – 7 وتبقى: وتبقا، ولن نشير إليها فيما بعد – 7-8 م س خ ... مثلث: أثبتها في الهامش – 12 فنسبة ... م ن س ع: أثبتها في الهامش – 15 أضلاعها (الثانية): أضلاعه / يتبين: تبين – 16 م ن س ع: م ن س.

قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى أضلاعها فيها قطعٌ أصغر منه. فلنسمِّ هذا القطعَ قطعَ الأسطوانة الأصغر.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و وعلى سهمها ز ح، وليقطعها سطح يلقاه خط ز ح، إما في الأسطوانة وإما خارجًا عنها، ويكون عمودًا على ذلك السطح، وليحدث في الأسطوانة قطعُ ط ک ل الناقص أو قطعة منه.

فأقول: إنه لا يكون في السهام الطوال من سهام قطوع هذه الأسطوانة الناقصة سهمٌ أقصر من سهم قطع ط ک ل الأطول، ولا في سهامها القصار سهم أطول من سهمه الأطول الذي هو مساوٍ لقطر كل واحدة من قاعدتي ا ب جـ د هـ و ولا أقصر من سهمه الأقصر، وليس في قطوع هذه الأسطوانة التي تلقى أضلاعها فيها قطع أصغر من ط ک ل.



برهان ذلك: أن كل قطع ناقص من قطوع أسطوانة ا ب هـ د هو سوى قطع ط ک ل، إما أن يكون موازيًا لقطع ط ک ل، وإما أن يكون غيرَ موازٍ له. فإن كان موازيًا له فهو شبيه به ومساوٍ له، وسهماه مساويان لسهميه، فيكون الأمر فيه وفي سهميه على ما قلنا.

وإن لم يكن موازيًا له، فإنّا إذا جعلناه قطعًا م ن س، كان مركزه نقطة ع التي عليها يقطع قطع م ن س سهم ز ح. وإذا قطعنا الأسطوانة بسطح يمرّ بنقطة ع ويوازي قاعدتي الأسطوانة،

10 من قطوع: يقطع / ا ب هـ د: ا ب جـ د.

أحدث في الأسطوانة دائرة وصار الفصل المشترك لتلك الدائرة ولقطع م ن س قطرًا من أقطار تلك الدائرة، لأنه يمر بنقطة ع التي هي مركزها، وكان مساويًا لقطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط م ع ن، كان خط م ع ن قطرًا من أقطار قطع م ن س لأنه يمر بمركزه، وخط م ن مثل قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و، فخط م ن إما أن يكون هو سهمَ قطع م ن س الأطول، وإما أن يكون هو سهمَه الأقصر، وإما أن يكون غيرهما من أقطاره.

فإن كان قطر م ن هو سهمَ قطع م ن س الأطول فقد تبيّن أن سهمه الأطول ليس بأقصر من سهم قطع ط ك ل الأطول، لأن سهم قطع ط ك ل الأطول، قد بيّنا أنه مثل قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و. وتبيّن أيضًا أن سهم قطع م ن س الأقصر ليس بأطول من سهم قطع ط ك ل الأطول، بل هو أقصر منه، لأنه أقصر من خط م ن. وإن كان خط م ن هو السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س فليس سهمه الأطول بأقصر من سهم قطع ط ك ل الأطول، بل هو أطول منه، لأنه أطول من خط م ن. ومن البيّن أيضًا أن سهم قطع م ن س الأقصر – الذي هو م ن – ليس بأطول من سهم قطع ط ك ل الأطول لأنه مساوٍ له، إذ كانا جميعًا مساويين لقطر ا ب. وإن كان قطر م ن ليس هو واحدًا من سهمي قطع م ن س، فهو أقصر من سهمه الأطول وأطول من سهمه الأقصر، للذي تبيّن في شكل ١١ من مقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط. وإذا كان م ن أقصر من السهم الأطول من سهمي قطع م ن س، فكان مساويًا للسهم الأطول من سهمي قطع ط ك ل، فإن السهم الأطول من سهمي قطع ط ك ل أقصر من السهم الأطول من سهمي قطع م ن س. فالسهم الأطول من سهمي قطع م ن س ليس بأقصر من السهم الأطول من سهمي قطع ط ك ل. وإذا كان خط م ن أطول من السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س، فإن السهم الأطول من سهمي قطع ط ك ل أطول من السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س. فالسهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ليس بأطول من السهم الأطول من سهمي قطع ط ك ل.

وأقول أيضًا: إنّ السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س ليس بأقصر من السهم الأقصر من سهمي قطع ط ك ل.

برهان ذلك: أنا إن جعلنا السهم الأقصر من سهمي قطع م ن س خطَّ م ن، وقطعنا الأسطوانة بالسطح الذي يمرّ بخطي ز ح م ن، أحدث في الأسطوانة سطحًا متوازيَ الأضلاع.

9 السهم: مطموسة في النص، وكتبها الناسخ في الهامش – 13 واحدًا: واحد – 14 ١١: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٥: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 18 وإذا: واذ – 24 إن جعلنا: نجعل، ثم أثبت الصواب في الهامش.

وإذا جعلنا ذلك السطحَ سطحَ اب هـ د وجعلنا الفصلَ المشترَكَ لسطح اب هـ د ولسطح ط ك ل خط ك ط، كان خطا ا د ب هـ ضلعين من أضلاع الأسطوانة، فهما موازيان لسهمها، الذي هو ز ح. وسهم ز ح عمود على سطح ط ك ل، فيكون كلّ واحد من خطي ا د ب هـ عمودًا على سطح ط ك ل، فكل واحد منها عمود على كل خط يخرج من نقطة منه في سطح ط ك ل، فكل واحد من خطي ا د ب هـ عمود على ط ك وخط ط ك عمود عليها، / ١٥ - و فليس يخرج فيما بينها خط يلقاهما أقصر من خط ط ك، فليس خط م ن بأقصر من خط ط ك. فإن كان خط ط ك هو السهم الأقصر من سهمي قطع ط ك ل، فقد تبيّن أن سهم قطع م ن س الأقصر ليس بأقصر منه. وإن لم يكن خط ط ك هو السهم الأقصر من سهمي قطع ط ك ل، فإن سهمه الأقصر أقصر من خط ط ك لأن خط ط ك قطر من أقطاره والسهم الأقصر من كل قطع ناقص أقصر من سائر أقطاره، للذي تبيّن في الشكل ١١ من المقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فليس خط م ن، الذي هو السهمُ الأقصرُ من سهمي قطع م ن س، بأقصرَ من السهم الأقصر من سهمي قطع ط ك ل.

وقد تبيّن مما قلنا أنه ليس في قطوع هذه الأسطوانة قطع أصغر من ط ك ل، وذلك أنه ليس في سهامها الطّوال سهمٌ أقصر من سهمه الأطول، ولا في سهامها القصار سهمٌ أقصر من سهمه الأقصر؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فليسمّ قطعُ ط ك ل قطعَ الأسطوانةِ الأصغرَ.

وهنالك استبان أنه ليس في السهام القصار من سهام قطوع الأسطوانة الناقصة سهمٌ أطول من قطر دائرة إحدى قاعدتي الأسطوانة وأنه لا يخرج في الأسطوانة خطٌ مستقيم يقطع سهمها وينتهي طرفاه إلى بسيطها، أقصر من سهم قطع ط ك ل الأصغر.

– ک – إذا [كان] قطَع الأسطوانةَ المائلة سطحٌ يمرّ بسهمها وبعمودها، وسطحٌ آخر قائم على ذلك السطح على زوايا قائمة يمرّ بأطول قطريه، فإن القطع الناقص الذي يحدثه فيها السطح الأخير يكون سهمُه الأطولُ أطولَ من سهام غيره من القطوع الناقصة التي تحدث في تلك الأسطوانة، وسهمُه الأقصر خطٌّ ليس في سهامها القصارِ أطولُ منه، وسطحه أعظم من كل

10 ١١ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٥ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها.

سطح من سطوح سائر قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها. فلنسمّ هذا القطعَ : قطعَ الأسطوانة الأعظمَ.

فليكن أسطوانةٌ مائلة، على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح، وعلى عمودها ز ط. وليقطع هذه الأسطوانة سطح يمرّ بخطي ز ح ز ط، وليحدث فيها سطح ا ب هـ د المتوازي الأضلاع، ونخرج خط ا هـ. فأطول قطريْ سطح ا ب هـ د هو خط ا هـ. وليقطع الأسطوانة أيضـًا سطحٌ آخر يمرّ بخط ا هـ ويكون قائمًا على سطح ا ب هـ د على زوايا قائمة، وليحدث في الأسطوانة قطع ا ک هـ الناقص.

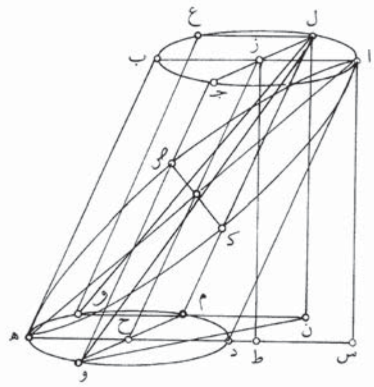
فأقول: إن سهم قطع ا ک هـ الأطول أطولُ من سهم كل قطعٍ ناقص يحدث في تلك الأسطوانة، وإنه ليس في سهامها القصار سهمٌ أطول من سهمه الأقصر، وسطحُه أعظمُ من كل سطح من سطوح سائر قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها.

برهان ذلك: أن خط ا هـ أطولُ الخطوط المستقيمة التي تخرج في سطح ا ب هـ د المتوازي الأضلاع، لأنه أطول قطريه.

فأقول: إنه أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سائر قطوع الأسطوانة التي تمرّ بسهمها. وذلك أنا إذا جعلنا قطعًا من هذه القطوع، أيّ قطع كان، سطحَ ل جـ و م، كان متوازيَ الأضلاع، وإذا جعلنا أطولَ قطريه خطّ ل و، كان ل و أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سطح ل جـ و م. وإذا أخرجنا من نقطة ل عمودًا على السطح الذي فيه دائرة د هـ و، فكان عمود ل ن، ووصلنا فيما بين نقطتي ن م بخط م ن، لم يكن خط م ن متصلاً بخط م و على استقامة، لأنه لو كان على استقامته لكان سطح ل جـ و م هو السطح الذي يمرّ بسهم الأسطوانة وبعمودها. وليس هو كذلك، فليس خط م ن على استقامة خط م و. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ن و بخط ن و، كان أقصر من خطي ن م م و مجموعين. وأيضـًا فإنّا إذا أخرجنا من نقطة ا عمودًا على خط د هـ / فكان عمود ا س، فإن ا س يكون عمودًا على السطح الذي فيه دائرة د هـ و، ١٥ – ظ
لأنه يكون موازيًا لعمود ز ط، ويصير لذلك خط ا س مساويًا لخط ل ن لأنهما متوازيان وهما بين سطحين متوازيين. وخطّ ا د مساوٍ لخط ل م لأنهما ضلعان من أضلاع الأسطوانة، ويبقى ضلع س د من مثلث ا س د القائم الزاوية مساويًا لضلع ن م من مثلث ل ن م القائم الزاوية. وخطّ د هـ مساوٍ لخط م و لأنهما قطران لدائرة د هـ و، فخطا ن م م و مجموعين مساويان لخط س هـ،

3 مائلة: ممحوة – 15 جعلنا: أثبتها في الهامش – 20 بخط: خط.

وخطا ن م م و مجموعين أطولُ من خط ن و، فخطّ س ه أطول من خط ن و. وعمود ا س مثل عمود ل ن، فخط ا ه الذي يوتر الزاوية القائمة أطول من خط ل و الذي يوتر الزاوية القائمة، فخط ا ه أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في قطع من قطوع الأسطوانة التي تمر بسهمها.



وأقول أيضـًا: إن خط ا ه أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في كل قطع من قطوعها التي توازي سهمها. وذلك أنّا إذا جعلنا قطعًا من هذه القطوع سطح ل ع ف م كان متوازي الأضلاع؛ وإذا جعلنا أطول قطريه خط ل ف، كان ل ف أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في سطح ل ع ف م. وإذا فعلنا كما فعلنا فيما تقدم، تبيّن لنا أن خطّ ن م مثلُ خط س د. وخط د ه أطول من خط م ف لأن د ه قطر الدائرة، والخط الذي يصل فيما بين نقطتي ن ف، إن كان هو خطّ ن م ف أوكان غيرَه من الخطوط، فهو أقصرُ من خط س ه. وعمود ا س مساوٍ لعمود ل ن، فخط ا ه أطول من خط ل ف، فهو إذن أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في قطع من قطوع الأسطوانة التي توازي سهمها. وقد كنّا بيّنا أنه أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في القطوع التي تمرّ بالسهم، فهو إذن أطول الخطوط المستقيمة التي تخرج في الأسطوانة، لأن كل واحد من هذه الخطوط إمّا أن يكون مع سهم ز ح في سطح واحد وإما أن يكون ممكنًا أن يمرّ به سطح موازٍ لخط ز ح. فإذ كان ذلك كذلك فهو بيّنٌ أن خط ا ه أطولُ أقطار قطع ا ك ه، وأنه أطول من كل قطر من أقطار سائر قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاعها فيها؛ فخط ا ه هو سهم

قطع اك هـ الأطول، للذي تبيّن في شكل ١١ من مقالة ه من كتاب أبلونيوس في المخروط ، وهو أطول من سهام سائر قطوع الأسطوانة الناقصة ومن أقطار الدوائر التي تقع فيها.

وأقول أيضًا: إن سهم قطع اك هـ الأقصر [من] أطول سهامها القصار.

وذلك أنه مثل قطر كل واحدة من قاعدتي الأسطوانة، لأنه إن قطع الأسطوانةَ سطحٌ يمرّ بسهم زح ويكون قائمًا على سطح اب هـ د على زوايا قائمة، كان الفصل المشترك لذلك السطح ولسطح قطع اك هـ عمودًا على خط زح ومساويًا لقطر دائرة اب جـ. وإذا جعلنا ذلك الفصل خط ك ص، كان ك ص قطرًا من أقطار قطع اك هـ لأنه يمرّ بمركزه. وخط ك ص يقطع سطح اب هـ د على زوايا قائمة، فهو إذن قطع خط اهـ على زوايا قائمة، وخط اهـ هو سهم قطع اك هـ الأطول، فخط ك ص هو سهمه الأقصر، وهو مساوٍ لقطر دائرة اب جـ. فليس في سهام القطوع الناقصة القصار التي تقع في الأسطوانة أطول من سهم قطع اك هـ الأقصر. وقد كنا بيّنا أن سهمه الأطول أطول من سهامها الطوال، فسطحه أعظم من سطوحها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

فلنسمّ قطع اك هـ القطع الأعظم.

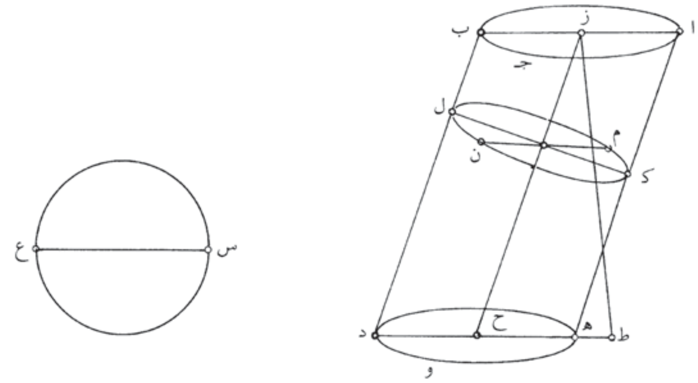
وهنالك استبان أن السهم الأطول من سهميْ قطع الأسطوانة الأعظم هو أطولُ الخطوط المستقيمة التي تخرج في تلك الأسطوانة، وأن السهمَ الأقصرَ من سهميه مساوٍ لقطر كل واحدةٍ من قاعدتي الأسطوانة، وأنه أيضًا مساوٍ للسهم الأطول من سهمي قطعها الأصغر./

– كا – كل أسطوانة مائلة، فإن نسبة كل واحد من قطوعها الصغار إلى كل واحدة من دائرتَيْ قاعدتيها كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة التي لا يخرج في تلك الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خطٌّ مستقيم يمرّ بسهمها أقصرُ منه إلى قطر كل واحدة من قاعدتيها، وهي أيضًا كنسبة عمود تلك الأسطوانة إلى سهمها. ١٦ – و

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها اب جـ د هـ و وعلى قطريها اب د هـ وعلى سهم الأسطوانة زح، ولنخرج من نقطة ز عمود الأسطوانة وهو زط، وليكن قطع من قطوع الأسطوانة الصغار ك ل.

1 ١١ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ه : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 3 [من]: ربما كانت في الأصل الذي نقلت عنه هذه المخطوطة «هو» – 8 فهو ... قائمة: أثبتها في الهامش – 19 قطر: أثبتها في الهامش.

فأقول: إن نسبة قطع ك ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة التي لا يخرج فيما بين ضلعين من أضلاع الأسطوانة خطٌّ مستقيم أقصرُ منه مارٌّ بسهمها إلى كل واحد من قطري ا ب د هـ، وإنها أيضًا كنسبة ز ط إلى ز ح.



برهان ذلك: أنا إن جعلنا سهم قطع ك ل الأقصر خطَّ ك ل وسهمَه الأطولَ خط م ن، وجعلنا المربع الكائن من خط س ع مساويًا للسطح الكائن من ضرب ك ل في م ن، وعملنا على خط س ع دائرة يكون س ع قطرًا لها، كانت دائرة س ع مساويةً لقطع ك م ل. ونسبة دائرة س ع إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة مربع قطر س ع إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د هـ، فنسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة مربع قطر س ع إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د هـ. ولكن مربع قطر س ع مساوٍ للسطح الكائن من ضرب ك ل في م ن، فنسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة السطح الكائن من ضرب ك ل في م ن إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د هـ. ولكن م ن هو السهم الأطول من سهمي قطع ك م ل الأصغر، فهو إذن مساوٍ لكل واحد من قطري ا ب د هـ، فنسبة قطع ك م ل ن إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة السطح الكائن من ضرب ك ل في أحد قطري ا ب د هـ إلى مربع أحد قطري ا ب د هـ. ونسبة السطح الكائن من ضرب ك ل في أحد قطري ا ب د هـ إلى مربع أحد قطري ا ب د هـ 〈كنسبة ك ل إلى أحد قطري ا ب د هـ〉، فنسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ وكنسبة ك ل إلى كل واحد

4 إن: أثبتها في الهامش مع الإشارة إلى موضعها – 15 كنسبة: وضع الناسخ علامة + فوق السطر لبيان النقص في هذا الموضع.

من قطري ا ب د ه. وخطُّ ك ل لا يخرج في الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خطٌّ مستقيم أقصر منه مارٌّ بسهمها، لأنه السهمُ الأقصرُ من سهمي قطع ك م ل الأصغر. فنسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د ه وكنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة – التي لا يخرج في الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خط أقصر منه، ويكون مارًّا بسهمها – إلى كل واحد من قطري ا ب د ه.

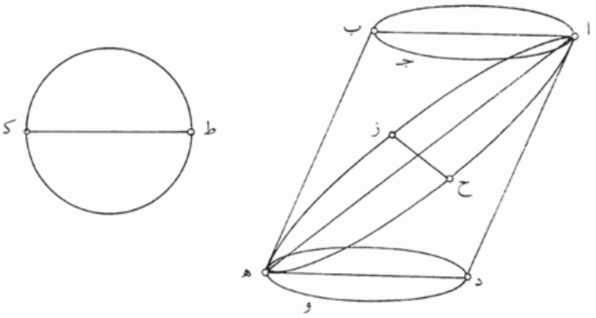
وأقول أيضًا: إن نسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د ه وكنسبة ز ط إلى ز ح.

برهان ذلك: أنّا قد بيّنا أن نسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د ه و كنسبة ك ل – الذي هو السهم الأقصر من سهميْ قطع ك م ل الأصغر – إلى كل واحد من قطري ا ب د ه. ونسبة السهم الأقصر من سهمي قطع الأسطوانة الأصغر إلى كل واحد من قطري ا ب د ه كنسبة ز ط إلى ز ح، فنسبة قطع ك م ل إلى كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د ه وكنسبة ز ط إلى ز ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– كب – كلُّ أسطوانة مائلة، فإن نسبة قطعها الأعظم إلى كل واحدة من دائرتي قاعدتيها كنسبة أطول خطٍّ مستقيم يخرج فيها إلى قطر كل واحدة من دائرتي قاعدتيها.

فليكن أسطوانة مائلة، على قاعدتيها ا ب جـ د ه و، وعلى قطري القاعدتين ا ب د ه، وليكن القطع الأعظم من قطوع الأسطوانة ا ز ه ح.

فأقول: إن نسبة قطع ا ز ه ح إلى كل واحدة من دائرتي / ا ب جـ د ه وكنسبة أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة ا ب جـ د ه و إلى كل واحد من خطي ا ب د ه. ظ – ١٦



10 واحد: واحدة – 14 يخرج فيها: أثبتها في الهامش.

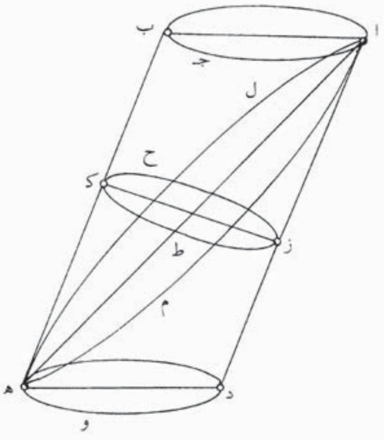
برهان ذلك: أنا إذا جعلنا السهم الأطول من سهمي قطع ا ز ه ح خط ا ه والسهم الأقصر منها ز ح، وجعلنا المربع الكائن من ط ك مساويًا للسطح الكائن من ا ه في ز ح، وعملنا على خط ط ك دائرة يكون ط ك قطرًا لها، كانت دائرة ط ك مساوية لقطع ا ه ز ح، ونسبة دائرة ط ك إلى كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه و كنسبة مربع قطر ط ك إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د ه. فنسبة قطع ا ز ه ح إلى كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه و كنسبة مربع قطر ط ك إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د ه. ولكن مربع قطر ط ك مساوٍ للسطح الذي يكون من ا ه في ز ح، فنسبة قطع ا ز ه ح إلى كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه و كنسبة السطح الكائن من ا ه في ز ح إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د ه. فأما خط ا ه فهو أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة ا ب ج د ه و، وأما خط ز ح فهو مساوٍ لكل واحد من قطري ا ب د ه، فنسبة قطع ا ز ه ح إلى كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه و كنسبة السطح الكائن من ضرب أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة ا ب ج د ه ⟨و⟩ في أحد قطري ا ب د ه إلى كل واحد من مربعي قطري ا ب د ه، التي هي كنسبة أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة ا ب ج د ه و إلى كل واحد من قطري ا ب د ه. فنسبة قطع ا ز ه ح إلى كل واحدة من دائرتي ا ب ج د ه و كنسبة أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة ا ب ج د ه و إلى كل واحد من قطري ا ب ه د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كج** – كل أسطوانة مائلة، فإن نسبة كل واحد من قطوعها الصغار إلى قطعها الأعظم كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة – التي لا يخرج في تلك الأسطوانة بين ضلعين من أضلاعها خطٌّ مستقيم يمرّ بسهمها أقصر منها – إلى أطول خط مستقيم يخرج في تلك الأسطوانة.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب ج د ه و وعلى قطع من قطوعها الصغار ز ح ط ك وعلى قطعها الأعظم ا ل ه م.

فأقول: إن نسبة قطع ز ح ط ك إلى قطع ا ل ه م كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة – التي لا يخرج في أسطوانة ا ب ج د ه و بين ضلعين من أضلاعها خطٌّ مستقيم يمرّ بسهمها أقصر منه إلى أطول خط مستقيم يخرج في هذه الأسطوانة.

6 قطر (الثانية): أثبتها في الهامش.



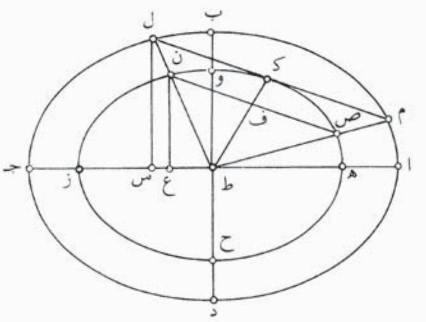
برهان ذلك: أن نسبة قطع زح طك إلى دائرة اب ج كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة – التي لا يخرج في أسطوانة اب ج د ه و بين ضلعين من أضلاعها خط مستقيم يمرّ بسهمها أقصر ⟨منه⟩ – إلى قطر اب. ونسبة دائرة اب ج إلى قطع ال ه م كنسبة قطر اب إلى أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة اب ج د ه و. ففي نسبة المساواة تكون ⟨نسبة⟩ قطع زح طك إلى قطع ال ه م كنسبة كل واحد من الخطوط المستقيمة التي لا يخرج في أسطوانة اب ج د وه بين ضلعين من أضلاعها خط مستقيم يمرّ بسهمها أقصر منه إلى أطول خط مستقيم يخرج في أسطوانة اب ج د ه و؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كد** – إذا كان قطعان ناقصان متشابهان في سطح واحد، وكان مركزهما واحدًا مشتركًا لهما، وكان السهم الأطول من سهمي أحدهما قطعةً من السهم الأطول من سهمي الآخر، وأخرج فيما بينهما خطٌّ مستقيم يماسّ أصغرهما / وينتهي طرفاه إلى الخط المحيط بأكبرهما، فإن نقطة التماسّ تقسم ذلك الخط بنصفين. ١٧ - و

فليكن قطعان ناقصان متشابهان، عليهما اب ج د ه وزح، وليكن مركزهما ط، وسهم اب ج د الأطول خط اج، وسهمه الأقصر خط ب د، وسهم ه وزح الأطول خط ه ز، وسهمه الأقصر خط وح. وليكن فيما بين القطعين خط مستقيم يماسّ ه وزح وينتهي طرفاه إلى الخط المحيط بقطع اب ج د.

فأقول: إن نقطة التماسّ تقسم ذلك الخط بنصفين.

6 مستقيم ... خط: أثبتها في الهامش – 9 سهمي (الأولى): سهم – 14 خط (الثانية): كررها ثم ضرب عليها بالقلم.



برهان ذلك: أن الخط المماسّ إما أن يماسّ قطع ه وزح على إحدى نقط ه و ز ح، وإما أن يماسه على غير هذه النقط. فإن ماسّه على إحدى نقط ه و ز ح فهو بيّنٌ أنه ينقسم بنصفين لأنه خط من خطوط الترتيب، إذ كان يقطع السهم على زوايا قائمة للذي تبيّن في شكل يجـ وشكل يه من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط. وإن لم يُماسّه على إحدى هذه النقط، فإنا إذا جعلنا مماسته له على نقطة ك، وجعلنا الخط المماس ل ك م، ووصلنا فيما بين نقطتي ك ط بخط ‹ك ف ط ووصلنا فيما بين نقطتي ل ط بخط› ل ن ط وأخرجنا من نقطتي ل ن عمودين على ا جـ عليهما ل س ن ع، كانت نسبة السطح الكائن من ضرب ا س في س جـ إلى مربع خط ل س كنسبة ا جـ إلى ضلعه القائم، للذي تبيّن في شكل كا من مقالة ا من كتاب أبلونيوس في المخروط. ولذلك أيضًا يكون نسبة السطح الكائن من ضرب ه ع في ع ز إلى مربع خط ن ع كنسبة ه ز إلى ضلعه القائم. ولكن نسبة ا جـ إلى ضلعه القائم كنسبة ه ز إلى ضلعه القائم، لأن قطعي ا ب جـ د ه وزح متشابهان، فنسبة السطح الكائن من ضرب ا س في س جـ إلى مربع خط ل س كنسبة السطح الكائن من ضرب ه ع في ع ز إلى مربع خط ن ع. وإذا بدلنا، كانت نسبة السطح الكائن من ضرب ا س في س جـ إلى السطح الكائن من ضرب ه ع في ع ز كنسبة مربع خط ل س إلى مربع خط ن ع. ولكن نسبة مربع خط ل س إلى مربع خط ن ع كنسبة مربع خط س ط إلى مربع خط ط ع. فنسبة السطح الكائن من ضرب ا س في س جـ مع مربع خط س ط إلى السطح الكائن من ضرب ه ع في ع ز مع مربع خط ع ط كنسبة مربع خط

6-5 ك ط ... نقطتي: أثبتها في الهامش.

ل س إلى مربع خط ن ع. فأما السطح الكائن من ضرب ا س في س ج مع مربع خط س ط فهو مساوٍ لمربع خط ا ط. وأما السطح الكائن من ضرب هـ ع في ع ز مع مربع خط ع ط فهو مساوٍ لمربع خط هـ ط. فنسبة مربع خط ل س إلى مربع خط ن ع كنسبة مربع خط ا ط إلى مربع خط هـ ط. فنسبة ل س إلى ن ع إذن كنسبة ا ط إلى ط هـ. ونسبة ل س إلى ن ع هي أيضًا كنسبة ل ط إلى ط ن، لأن خط ل س موازٍ لخط ن ع، فنسبة ا ط إلى هـ ط كنسبة ل ط إلى ط ن. وكذلك يكون حال جميع الخطوط التي تخرج من نقطة ط إلى قطع ا ب ج د. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ط م بخط ط ص م، كانت نسبة م ط إلى ط ص كنسبة ا ط أيضًا إلى ط هـ التي قد بيّنا أنه كنسبة ل ط إلى ط ن، فنسبة م ط إلى ط ص كنسبة ل ط إلى ط ن. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ص ن بخط ص ن، كان خط ص ن موازيًا لخط ل م. وخطُّ ل م مماسٌّ لقطع هـ و ز ح، فإذا أخرجنا قطرًا من نقطة ك، كان خط ص ن خطَّ ترتيب عليه، للذي تبيّن في شكل ن من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط. فإذا وصلنا فيما بين نقطتي ط ك بخط ط ف ك، كانت نسبة ن ف إلى ف ص كنسبة ل ك إلى ك م، لأن خطي ن ص ل م متوازيان، وخط ن ف مساوٍ لخط ف ص، لأن ن ص خطُّ ترتيب على قطر ط ك، فخطّ ل ك مساوٍ لخط ك م؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

ويتبيّن مع ذلك أيضًا أن نسب أقطار القطوع الناقصة المتشابهة، بعضها إلى بعض –كلُّ ١٧ – ظ واحد إلى نظيره الذي يحيط مع السهم بزاوية مساوية للزاوية التي يحيط بها معه صاحبه –كنسب سهامها، بعضها إلى بعض، كلُّ سهم إلى نظيره.

– **كه** – نريد أن نبيّن كيف نعمل في أعظم قطعين ناقصين متشابهين غير متساويين – يكونان في سطح واحد، ويكون مركزهما واحدًا مشتركًا لهما، ويكون سهم أحدهما الأطول قطعةً من سهم الآخر الأطول – شكلاً مستقيمَ الأضلاع يحيط به أعظم القطعين ويحيط هو بأصغرهما، ولا تماسُّ أضلاعُ ذلك الشكل القطع الأصغر، وإن وصلت خطوط مستقيمة فيما بين زوايا ذلك الشكل المتقابلة كانت أقطارًا للقطع الأعظم.

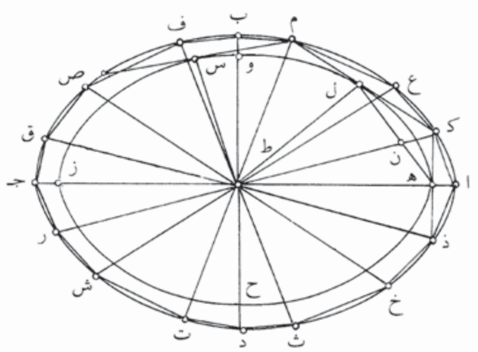
فليكن قطعان متشابهان غيرُ متساويين في سطح واحد، وهما ا ب ج د هـ و ز ح، وليكن نقطة ط مركزًا لهما جميعًا، وليكن سهمُ القطع الأعظم منها الأطول خطَّ ا ج، وسهمُه الأقصر

16 كنسب: كنسبة – 21 القطع: للقطع.

خطَّ ب د، وسهم القطع الآخر الأطول هـ ز والأقصر و ح. ونريد أن نبيّن كيف نعمل شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به قطع ا ب جـ د ويحيط هو بقطع هـ و ز ح ولا تماسه أضلاعه، وإن وصلت خطوط مستقيمة فيما بين زوايا ذلك الشكل المتقابلة كانت أقطارًا لقطع ا ب جـ د.

فنخرج من نقطة هـ خطًا يكون عمودًا على هـ ز وهو هـ ك، فيصير خطُّ هـ ك مماسًا لقطع هـ و ز ح، للذي تبيّن في الشكل يز من المقالة آ من كتاب أبلونيوس في المخروطات. ونخرج من نقطة ك خطًا آخر مماسًا لقطع هـ و ز ح وهو خط ك ل، ونخرجه على استقامة حتى يلقى الخط المحيط بقطع ا ب جـ د، فليلقه على نقطة م. فإن كان خط ك ل م قد لقي خط ب د ⟨فهو الذي أردنا⟩ وإلاّ أخرجنا من نقطة م أيضًا خطًا مماسًا لقطع هـ و ز ح، وفعلنا مثل الذي فعلنا آنفًا.

فأقول: إنا إذا فعلنا ذلك دائمًا فلا بدّ من أن يلقى أحدُ الخطوط – التي نخرجها مماسةً لقطع هـ و ز ح – خطَّ ب د على نقطة ليست خارجَ قطع ا ب جـ د.



برهان ذلك: أنا إن وصلنا خط هـ ل فيما بين نقطتي التماس وقسمناه بنصفين على نقطة ن وأخرجنا من نقطة ك خطًا إلى نقطة ن، وهو خط ك ن، كان خط ك ن قطعة من قطر من أقطار قطع ا ب جـ د، للذي تبيّن في شكل ٢٩ من مقالة ٢ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فإذا أخرج خط ك ن على استقامة انتهى إلى نقطة ط التي هي مركز القطعين مثل خط ك ن ط، وإن أخرجنا من نقطة ط خط ط ل كان خط ل ن مساويًا لخط ن هـ؛ وخط ط ل أقصر من خط ط هـ، للذي تبيّن من شكل ١١ من مقالة ٥ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فنسبة ل ن إلى

3 أقطارًا: أقطار – 13 ٢٩ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٢ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 16 ١١ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها / ٥ : ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها.

ن هـ أكبر من نسبة ل ط إلى ط هـ. فزاوية ل ط ن أعظم من زاوية ن ط هـ لأن الخط الذي يقسم زاوية ل ط هـ بنصفين هو يقسم ل هـ بمثل نسبة ل ط إلى ط هـ.

وأيضًا، فإن خط ك ل م مماسٌّ لقطع هـ و ز ح، وقد انتهى طرفاه إلى قطع ا ب جـ د، فخط م ل مثل خط ل ك. وإن أخرجنا خط م ط كان أقصر من خط ط ك، للذي تبين في شكل ١١ من مقالة ه من كتاب أبلونيوس في المخروط. فنسبة م ل إلى ل ك أعظم من نسبة م ط إلى ط ك، فزاوية م ط ل أعظم من زاوية ل ط ك. وقد كانت زاوية ل ط ك أعظم من زاوية ك ط هـ، فزاوية م ط ل أعظم كثيرًا من زاوية ك ط هـ. فزاوية ل ط هـ أكبر من مثلي زاوية ك ط هـ، وزاوية م ط هـ أكبر من ثلاثة أمثالها.

وكذلك أيضًا نبين أن جميع الزوايا التي تحدث فيما بين خط هـ ط وبين الخطوط التي نخرجها من نقطة ط – إذا نحن سلكنا في الخطوط المماسة لقطع هـ و ز ح مثلَ المسلك المتقدم – يزيد بعضها على بعض إذا أخذت على الولاء بأكثر من زاوية ك ط هـ. فلا بدّ لهذه الزوايا من أن تبلغ إلى زاوية تجتمع منها، فتكون أعظم من زاوية ب ط هـ. وإذا بلغت إلى هذا الحد فلا بدّ من أن يكون آخرُ خطٍّ مماسّ يخرج قد لقي خط ط ب، فليكن ذلك الخط المماسّ الذي يلقى ب ط من غير أن يخرج عن قطع ا ب جـ د خط م س. ونخرج خطي ا ك م ب ونتعلم على قطعة ك م من القطع نقطة ع كيفما/ وقعت، ونخرج منها خطي ع ك ع م. فيصير خطوط ا ك ك ع ع م م ب فيما ١٨ – و بين القطعين، وليس تلقى قطع هـ و ز ح، لأن خطوط هـ ك ك م م س مماسة له. وإن نحن أخرجنا في قطعة ب جـ من القطع أوتارًا مساوية لأوتار ب م م ع ع ك ك ا وعلى مراتبها وتواليها – أما وتر ب ف فمثل وتر ب م، وأما وتر ف ص فمثل وتر م ع، وكذلك سائر الأوتار – فإنه سيقع في قطعة ب جـ من القطع من عدد هذه الأوتار مثلُ ما وقع في قطعة ا ب من الأوتار المساوية لها، لأن نصف قطع د ا ب لو قُلب فوُضع على نصف قطع ب جـ د لوقع عليه وانطبق جميعه على جميعه، فوقعت نقطة ا على نقطة جـ، للذي تبيّن في شكل ٤ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط. وإذا أخرجنا خط ك ط على استقامة إلى نقطة ر، وأخرجنا خط جـ ر، كان خطّا ك ط ط ا مساويين لخطي ر ط ط جـ لأن مركز ط يقسم قطري ا جـ ك ر بنصفين نصفين للذي تبيّن في شكل ل من المقالة الأولى من كتاب أبلونيوس في المخروط؛ ويكون زاويتا ك ط ا ر ط جـ

5 م ل: م ك – 6 ط ك: ط هـ – 9 الزوايا: الزاويا – 10 لقطع: للقطع – 21 ٤: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٦: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها – 22 ر: ز – 23 ط ا: ك ا / ر ط: ز ط – 24 ل: قد تقرأ «ب».

المتقابلتان متساويتين، فقاعدة اك مساوية لقاعدة جر. ولكن نصف قطع ا ب جـ إن وضع على نصف قطع جـ د ا فوضعت نقطة ا منه على نقطة جـ من الآخر، انطبق جميعه على جميعه للذي تبيّن في شكل ٤ من مقالة ٦ من كتاب أبلونيوس في المخروط. فيقع خط اك على خط جـ ر، فخط جـ ر غيرُ مماسّ لقطع هـ وزح، لأن نصف قطع هـ وز أيضًا ينطبق جميعُه على جميع نصف قطع زح هـ، إن وضع عليه. وكذلك أيضًا إن أخرجنا من نقط ع م ف ص ق أقطارًا للقطع، ووصلنا فيما بين أطراف الأقطار المخرجة خطوط رش ش ت ت د د ث ث خ خ ذ ذ ا، كنا قد عملنا في قطع ا ب جـ د شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به قطع ا ب جـ د، ويحيط هو بقطع هـ وزح ولا يماسّه، وهو شكل اك ع م ب ف ص ق جـ ر ش ت د ث خ ذ، ويكون الخطوط المستقيمة – التي تصل فيما بين زواياه المتقابلة – أقطارًا لقطع ا ب جـ د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

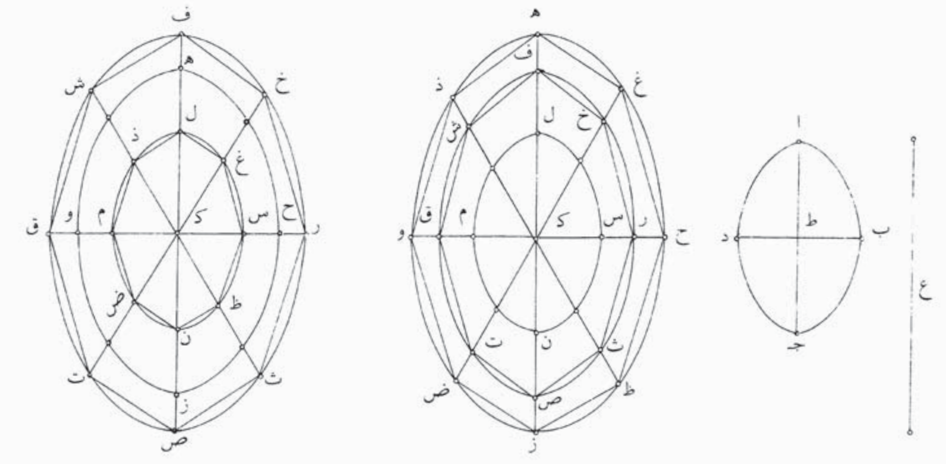
وتبيّن مما قلنا أيضًا أنه إذا كان شكل مستقيم الأضلاع معمول في قطع ناقص، وكانت الخطوط التي تصل فيما بين زواياه أقطارًا لذلك القطع، فإن الأضلاع المتقابلة متساوية.

– كو – نسب الخطوط المحيطة بالقطوع الناقصة المتشابهة، بعضها إلى بعض كنسب سهامها بعضها إلى بعض، كلٌّ سهم إلى نظيره.

فليكن قطعان ناقصان متشابهان، عليهما ا ب جـ د هـ وزح، وليكن سهماهما الأطولان ا جـ هـ ز وسهماهما الأقصران ب د وح.

فأقول: إن نسبة الخط المحيط بقطع ا ب جـ د إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح كنسبة سهم ا جـ إلى سهم هـ ز، وكنسبة سهم ب د إلى سهم وح.

1 جـ ر: جـ ز – 3 ٤: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها ونقلناها من شرح ابن أبي جرادة / ٦: ناقصة وترك الناسخ مكانًا لها / جـ ر: جـ ز – 4 جـ ر: جـ ز – 6 الأقطار: القطع – 7 شكلاً: شكا – 9 تصل: توصل – 13 بالقطوع الناقصة: بالقطع الناقص، ثم أثبت الصواب في الهامش.



برهان ذلك: أنا إذا جعلنا أصغر القطعين قطع ا ب جـ د، ومركزه نقطة ط، ومركز قطع هـ وزح نقطة ك، ووضعنا قطع ا ب جـ د في سطح قطع هـ وزح، مركز ط منه على مركز ك، والسهم الأطول الذي هو ا جـ على ما وقع عليه من السهم الأطول الذي هو هـ ز، وقع سهمه الأقصر على بعض سهمه الأقصر، / فليقع جميع القطع كموقع قطع ل م ن س، وليكن سهمه ١٨ - ظ الأطول ل ن وسهمه الأقصر م س.

فإن كان يمكن ألّا يكون نسبة الخط المحيط بقطع ا ب جـ د إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح كنسبة ا جـ إلى هـ ز، فليس نسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح كنسبة ل ن إلى هـ ز، فهي إذن إما أكثر منها وإما أقلّ.

وإذا جعلناها أولاً أكثر منها، إن أمكن ذلك، وجعلنا نسبة خط ع إلى خط هـ ز كنسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح، كان خط ع أطول من خط ل ن، وهو بيّنٌ أنه أقصر من خط هـ ز. فإذا جعلنا كل واحد من خطي ك ف ك ص من الصورة الأولى مساويًا لنصف خط ع، وعملنا على خط ف ص قطعًا ناقصًا شبيهًا بكل واحد من قطعي هـ وزح ل م ن س، يكون ف ص سهمه الأطول وق ر سهمه الأقصر، فكان قطع ف ق ص ر، وعملنا شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به قطع ف ق ص ر، ويحيط هو بقطع ل م ن س، فكان شكل ف ش ق ت ص ث ر خ، وأخرجنا خطوط ك ش ك ت ك ث ك خ

6 يكون: أثبتها في الهامش وهي غير واضحة.

المستقيمة وأنفذناها على الاستقامة إلى نقط ذ ض ظ غ ، وأخرجنا خطوط هـ ذ ذ و وض ض ز ز ظ ظ ح ح غ غ هـ المستقيمة، كانت نسبة ك ف إلى ك هـ كنسبة ك ش إلى ك ذ؛ فخطا ف ش هـ ذ متوازيان، ونسبة ف ش إلى هـ ذ كنسبة ك ف إلى ك هـ. وكذلك أيضًا نبيّن أن نسب الأضلاع الباقية من شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع إلى نظائرها من أضلاع شكل هـ ذ وض ⟨ز⟩ ظ ح غ المستقيم الأضلاع كنسبة ك ف إلى ك هـ. فنسبة جميع أضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع إلى جميع أضلاع شكل هـ ذ وض ⟨ز⟩ ظ ح غ المستقيم الأضلاع كنسبة خط ك ف إلى خط ك هـ، فهي إذن كنسبة خط ف ص إلى خط هـ ز؛ وقد كانت نسبة خط ف ص إلى خط هـ ز كنسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح لأن ف ص مثل ع. فنسبة أضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع مجموعة إلى أضلاع شكل هـ ذ وض ز ظ ح غ المستقيم الأضلاع مجموعةً كنسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح. ولكن الخط المحيط بقطع ل م ن س أقل من أضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع مجموعة. فالخط المحيط بقطع هـ وزح أقل من أضلاع شكل هـ ذ وض ز ظ ح غ مجموعةً، وهو محيط بها، وذلك غيرُ ممكن. فليس نسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح بأكثر من نسبة سهم ل ن إلى سهم هـ ز.

وأقول: إنها ليست بأقلّ منها.

فإن أمكن أن تكون أقلّ منها، فلتكن كنسبة سهم ل ن إلى خط ع. فيصير خط ع أطول من سهم هـ ز. وإذا جعلنا كل واحد من خطي ك ف ك ص من الصورة الثانية مساويًا لنصف خط ع، وعملنا على خط ف ص قطعًا ناقصًا يكون ف ص سهمه الأطول ويكون شبيهًا بكل واحد من قطعي هـ وزح ل م ن س، فكان قطع ف ق ص ⟨ر⟩، وعملنا شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط بقطع هـ وزح ويحيط به قطع ف ق ص ر، عليه ف ش ق ت ص ث رخ، وأخرجنا خطوط ك ذ ش ك ض ت ك ظ ث ك غ خ وخطوط ل ذ ذ م م ض ض ن ن ظ ظ س س غ غ ل المستقيمة، نبيّن كما بيّن آنفًا أن نسبة أضلاع شكل ل ذ م ض ن ظ س غ المستقيم الأضلاع مجموعةً، إلى أضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع مجموعةً،

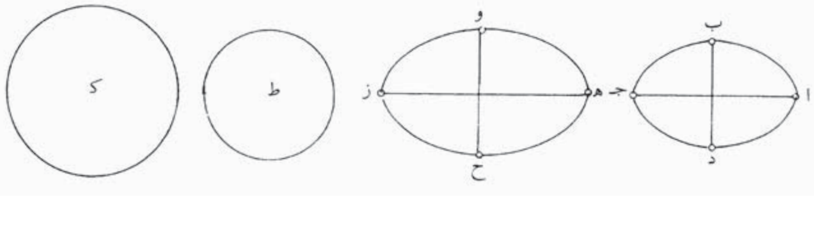
1 ظ غ: ط ع – 4 ف ش ق ت ص ث رخ: التاء فوق الصاد – 18 الثانية: أثبتها في الهامش – 20 شكلاً: شكا / الأضلاع: الخطوط، ثم أثبت الصواب فوقها.

كنسبة ك ل إلى ك ف، التي هي كنسبة ل ن إلى ف ص. وقد كانت نسبة ل ن إلى ف ص كنسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح. فنسبة أضلاع شكل ل ذ م ض ن ظ س غ المستقيم الأضلاع مجموعةً، ⟨إلى أضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ مجموعة⟩، كنسبة الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح. وأضلاع شكل ل ذ م ض ن ظ س غ المستقيم الأضلاع ⟨مجموعة⟩ أقل من الخط المحيط بقطع ل م ن س، فأضلاع شكل ف ش ق ت ص ث رخ المستقيم الأضلاع مجموعة، أقل من الخط المحيط بقطع / هـ وزح، وهي محيطة به، وهذا غيرُ ممكن. فليس نسبة ١٩ - و الخط المحيط بقطع ل م ن س إلى الخط المحيط بقطع هـ وزح بأقلّ من نسبة ل ن إلى هـ ز، التي هي كنسبة ا جـ إلى هـ ز. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأكثر منها، فهي إذن مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كز** – نسب القطوع الناقصة بعضها إلى بعض مؤلفةٌ من نسب سهامها بعضها إلى بعض. وإن كانت هذه القطوع متشابهة، فإن نسبها بعضها إلى بعض كنسب مربعات أقطارها بعضها إلى بعض: مربع كل قطر منها إلى مربع نظيره.

فليكن قطعان ناقصان، عليهما ا ب جـ د هـ وزح، وسهم قطع ا ب جـ د الأطول خط ا جـ وسهمه الأقصر خط ب د، وسهم قطع هـ وزح الأطول خط هـ ز وسهمه الأقصر خط وح.

فأقول: إن نسبة قطع ا ب جـ د إلى قطع هـ وزح مؤلفة من نسبة ا جـ إلى هـ ز ومن نسبة ب د إلى وح. وإن كان قطعا ا ب جـ د هـ وزح متشابهين، فإن نسبة قطع ا ب جـ د إلى قطع هـ وزح كنسبة مربع كل واحد من أقطار قطع ا ب جـ د إلى مربع نظيره من أقطار قطع هـ وزح.



6 ف ش ق ت ص ث رخ: ف ش ق ت ض ث رخ – 7 المحيط: أثبتها في الهامش.

برهان ذلك: أنا إن جعلنا مربع قطر دائرة ط مساويًا للذي يكون من ضرب ا ج في ب د، وجعلنا مربع قطر دائرة ك مساويًا للذي يكون من ضرب هـ ز في وح، كانت دائرة ط مساوية لقطع ا ب ج د، ودائرة ك مساوية لقطع هـ وزح. فنسبة قطع ا ب ج د إلى قطع هـ وزح كنسبة دائرة ط إلى دائرة ك. ونسبة دائرة ط إلى دائرة ك كنسبة مربع قطر دائرة ط إلى مربع قطر دائرة ك. وقد كان مربع قطر دائرة ط مساويًا للذي يكون من ضرب ا ج في ب د، وكان مربع قطر دائرة ك مساويًا للذي يكون من ضرب هـ ز في وح. فنسبة قطع ا ب ج د إلى قطع هـ وزح كنسبة ما يكون من ضرب ا ج في ب د إلى ما يكون من ضرب هـ ز في وح. وهذه النسبة مؤلفةٌ من نسبة ا ج إلى هـ ز ومن نسبة ب د إلى وح. فنسبة قطع ا ب ج د إلى قطع هـ وزح مؤلفة من نسبة ا ج إلى هـ ز، ومن نسبة ب د إلى وح.

وأيضًا، فإن قطعي ا ب ج د هـ وزح إن كانا متشابهين، فإن نسبة ا ج إلى ب د كنسبة هـ ز إلى وح. فإذا بدلنا، كانت نسبة ا ج إلى هـ ز كنسبة ب د إلى وح. فالنسبة المؤلفة من نسبة ا ج إلى هـ ز ومن نسبة ب د إلى وح هي كنسبة ا ج إلى هـ ز مثنّاةً بالتكرير، التي هي كنسبة مربع خط ا ج إلى مربع خط هـ ز، وكنسبة مربع خط ب د إلى مربع خط وح. فالنسبة المؤلفة من نسبة ا ج إلى هـ ز ومن نسبة ب د إلى وح هي كنسبة مربع خط ا ج إلى مربع خط هـ ز وكنسبة مربع خط ب د إلى مربع خط وح. وقد كنا بيّنا أن نسبة قطع ا ب ج د إلى قطع هـ وزح هي كالنسبة المؤلفة من نسبة / ا ج إلى هـ ز ومن نسبة ب د إلى وح. فنسبة قطع ١٩ - ظ
ا ب ج د إلى قطع هـ وزح كنسبة مربع خط ا ج إلى مربع خط هـ ز، وكنسبة مربع خط ب د إلى مربع خط وح، وهي أيضًا كنسبة مربع كل قطر من أقطار قطع ا ب ج د الباقية إلى مربع نظيره من أقطار قطع هـ وزح، لأن نسب أقطار قطع ا ب ج د إلى نظائرها من أقطار قطع هـ وزح نسبٌ متساوية؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

18 مربع (الثالثة): أثبتها في الهامش.

〈٤ – في مساحة بسيط الأسطوانة ومساحة ما يقع من بسيطها فيما بين قطوعها التي تلقى أضلاعها〉

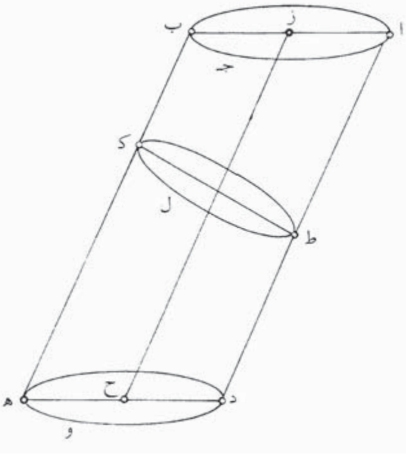
– **كح** – كلّ ضلعين متقابلين من أضلاع أسطوانة، فإنهما يمرّان بطرفي قطر من أقطار كل قطع يمران به من قطوع تلك الأسطوانة التي تلقى أضلاعها. وكل ضلعين من أضلاع أسطوانة يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع من قطوعها التي تلقى أضلاعها، فهما ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح، وليكن في الأسطوانة قطع من قطوعها التي تلقى أضلاعها، وهو ط ك ل؛ ويمرّ به ضلعان من أضلاع الأسطوانة وهما ا ط د ب ك هـ.

فأقول: إن ضلعي ا ط د ب ك هـ إن كانا ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة فهما يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع ط ك ل. وإن مرّا بطرفي قطر من أقطار قطع ط ك ل فهما ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة.

ونجعل أولاً خطي ا ط د ب ك هـ ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة.

فأقول: إنهما يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع ط ك ل.



5 متقابلان: أثبتها في الهامش – 8 في: أثبتها فوق السطر.

برهان ذلك: أنا إن وصلنا بين أطراف خطي ا ط د ب ك ه بخطي ا ب د ه كان خطا ا ب د ه قطرين من أقطار دائرتي ا ب ج د ه و، فهما يمرّان بنقطتي ز ح. وخطا ا ط د ب ك ه ضلعان من أضلاع الأسطوانة، فهما في سطح واحد لأنهما متوازيان؛ ولذلك يكون الخطان اللذان يصلان فيما بين أطرافهما في ذلك السطح، وهما خطا ا ز ب د ح ه، وإذ كان هذان الخطان في ذلك السطح فإن خط ز ح أيضًا – الذي يصل فيما بينهما – هو في ذلك السطح، أعني سطح ا د ه ب. وإذا وصلنا فيما بين نقطتي ط ك – اللتين يقطع عليهما سطح ط ك ل ضلعي ا ط د ب ك ه – بخط ط ك، كان هذا الخط في ذلك السطح، وقطع سهم ز ح على نقطة تقاطع هذا السهم وقطع ط ك ل، التي هي مركز قطع ط ك ل. فخط ط ك إذن يمرّ بمركز قطع ط ك ل، فهو قطر من أقطاره؛ فضلعا ا ط د ب ك ه يمرّان بطرفي قطر من أقطار قطع ط ك ل، وهو ط ك.

وأيضًا، فإنا نجعل ضلعي ا ط د ب ك ه مارّين بطرفي قطر من أقطار قطع ط ك ل وهو قطر ط ك.

فأقول: إن ا ط د ب ك ه ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة.

برهان ذلك: أن خط ط ك قطرٌ من أقطار قطع ط ك ل، فهو يمرّ بمركزه، وهو النقطة التي يقطع عليها سطح ط ك ل سهم ز ح. فخطّ ط ك يقطع سهم ز ح ويلقى خط ا ط د. وخطا ا ط د ز ح في سطح واحد، فخط ط ك معهما في ذلك السطح، وذلك السطح هو الذي فيه خطا ز ح ط ك. وكذلك أيضًا نبيّن أن خط ب ك ه في هذا السطح، فخطوط ا ط د ز ح ب ك ه الثلاثة في سطح واحد. والفصل المشترك لهذا السطح ولسطحي ا ب ج د ه و هو خطان مستقيمان يمر أحدهما بنقط ا ز ب الثلاث – وهو خط ا ز ب – ويمر الآخر بنقط د ح ه الثلاث، وهو خط د ح ه. ولكن خطي ا ز ب د ح ه قطران من أقطار دائرتي ا ب ج د ه و لأنهما يمران بمركزيهما، فخطا ا ط د ب ك ه ضلعان متقابلان من أضلاع الأسطوانة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

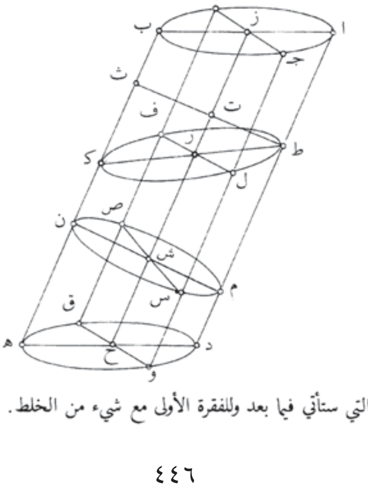
ويتبين مما قلنا أنه إذا كان في أسطوانة ما قطوعٌ، كم كانت، من قطوعها التي تلقى أضلاعها، وأخرج في تلك القطوع أقطارٌ من أقطارها، وكان مخرجُ تلك الأقطار كلها من ضلع واحدٍ من أضلاع الأسطوانة، فإن الأطرافَ الأُخَرَ من تلك الأقطار تنتهي كلها إلى الضلع المقابل للضلع الأول من أضلاع الأسطوانة الذي خرجت منه تلك الأقطار.

15 يقطع (الأولى): كتبها «يتقاطع» ثم أثبت الصواب في الهامش مع الإشارة – 18 والفصل: وللفصل – 26 الذي: التي.

– كط – كلّ أسطوانة، فإن الذي يقع فيما بين كل قطعين لا يتقاطعان من قطوعها التي تلقى أضلاعها، أو فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة إذا لم يقطعها، من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلعين كانا [إذا جمع مساوٍ للذي يقع / ٢٠ - و كل أسطوانة فإن الذي يقع فيما بين كل قطعين لا يتقاطعان من قطوعها التي تلقى أضلاعها التي فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة إذا لم يقطعها من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة، أيّ ضلعين كانا] إذا جمع، مساوٍ للذي يقع بينهما من كل ضلعين آخرين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيّ ضلعين كانا – إذا جمع، ومساوٍ أيضـًا لضعف ما يقع بينهما من سهم الأسطوانة.

فليكن أسطوانة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وعلى سهم الأسطوانة ز ح، وليكن في الأسطوانة قطعان لا يتقاطعان، وهما ط ك ل م ن ص، وليكن خطا ا ط م د ب ك ن هـ ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة، وليكن خطا جـ ل س و ع ف ص ق أيضـًا ضلعين آخرين متقابلين من أضلاعها، أيَّ ضلعين كانا.

فأقول: إن خطي ط م ك ن إذا جمعا، اللذين هما ما بين قطعي ط ك ل م ن س من ضلعي ا د ب هـ المتقابلين مساويان لخطي ل س ف ص، إذا جمعا، اللذين هما ما بين القطعين اللذين ذكرنا من ضلعي جـ و ع ق المتقابلين، ومساويان أيضـًا لضعف ر ش الذي هو ما بين هذين القطعين من سهم ز ح؛ وإن خطي ا ط ب ك – إذا جُمعا، اللذين هما ما بين قطع ط ك ل وقاعدة ا ب جـ من ضلعي ا د ب هـ المتقابلين – مساويان لخطي جـ ل ع ف إذا جمعا، اللذين هما ما بين قطع ط ك ل أيضـًا وبين قاعدة ا ب جـ من ضلعي جـ و ع ق المتقابلين، ومساويان أيضـًا لضعف ز ر الذي هو ما بين ا ب جـ ط ك ل من سهم ز ح.



6-3 [ ]: هذه العبارة تكرار للجملة التي ستأتي فيما بعد وللفقرة الأولى مع شيء من الخلط.

برهان ذلك : أن قطعي ط ك ل م ن س إما أن يكونا متوازيين، وإما غير متوازيين. فإن كانا متوازيين، فإنّ جميع ما يقع بينهما من الخطوط – التي هي أجزاء من أضلاع الأسطوانة، ومن سهم الأسطوانة – خطوط متساوية، لأنها متوازية وفيما بين سطحين متوازيين. فيصير خطا ط م ك ن – إذا جُمعا – مثلَ خطي ل س ف ص إذا جُمعا، ومثلَ ضعف خط ر ش أيضًا. وإن كان قطعا ط ك ل م ن س غير متوازيين، فإنا إذا أخرجنا من نقطتي ط م – اللتين هما جميعًا على ضلع ا ط م د من أضلاع الأسطوانة – قطرين من أقطار قطعي ط ك ل م ن س انتهيا إلى الضلع المقابل لضلع ا ط م د الذي هو ب ك ن ه، واللذين توهمناهما قطري ط ر ك م ش ن، وجب أن يمرّا بمركزي القطعين اللذين هما النقطتان اللتان قطعا عليهما السهم، وهما ر ش. فخطا ط م ك ن في سطح واحد لأنها متوازيان، وقطرا ط ك م ن اللذان يصلان فيما بينهما هما في ذلك السطح. وإذا أخرجنا في ذلك السطح من نقطة ط خطًا موازيًا لخط م ن كخط ط ت ث، كان خط ر ت موازيًا لخط ك ث من أضلاع مثلث ك ط ث. فنسبة ضلع ك ط من مثلث ك ط ث إلى خط ط ر، كنسبة ك ث إلى ر ت؛ ولكن ك ط ضعف ط ر لأن نقطة ر مركز قطع ط ك ل، فخط ك ث ضعف خط ر ت. ولكنّ خطوطَ ط م ث ن ت ش متساويةٌ لأنها متوازية وفيما بين خطين متوازيين، فضعف خط ت ش مساوٍ لخطي ط م ث ن مجموعين. وقد كنا بيّنا أن خط ك ث أيضًا ضعفُ خط ر ت، فجميع خطي ط م ك ن – اللذين هما ما بين قطعي ط ك ل م ن س من ضلعي الأسطوانة المتقابلين اللذين عليهما ا د ب ه – مساويان لضعف خط ر ش الذي هو ما بين هذين القطعين من سهم الأسطوانة. وبمثل ذلك نبيّن أن خطي ل س ف ص – إذا جمعا، اللذين هما ما بين هذين القطعين من ضلعي الأسطوانة المتقابلين اللذين عليهما ج و ع ق – مساويان لضعف ر ش. فخطا ط م ك ن – إذا جُمعا – مساويان لخطي ل س ف ص إذا جُمعا، ومساويان أيضًا لضعف خط ر ش. وكذلك أيضًا نبيّن أن خطي ا ط ب ك – إذا جُمعا – مساويان لخطي ج ل ع ف إذا جُمعا، ومساويان أيضًا لضعف خط ر ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ويتبيّن مما قلنا أنه إن كان ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من أحد ضلعي ا د/ ب ه ٢٠ – ظ
المتقابلين أقصر خطّ يقع بين هذين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة، أو كان القطعان متماسين على ذلك الضلع ، فإن الذي يقع بينهما من الضلع الآخر المقابل له – الذي يمرّ بالطرفين

3 فيصير: غير واضحة – 7 واللذين: والذي – 8 قطعا: قطعان – 22 ر ز: ر ش.

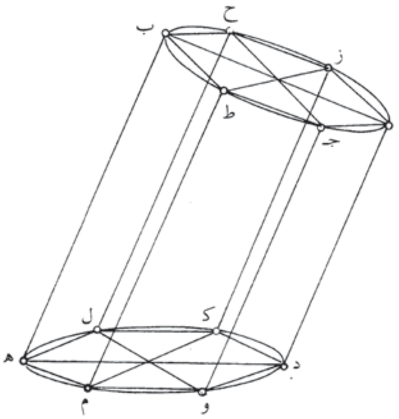
الآخرين من طرفي قُطري القطعين الخارجين من ذلك الضلع الأول – أطولُ خط يقع بين هذين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة. وإن كان ما يقع بين القطعين من الضلع الأول، الذي ذكرنا، أطولَ ما يقع بين القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة، فإن الذي يقع بينهما من الضلع المقابل له أقصرُ ما يقع بينهما من ضلع من أضلاع الأسطوانة، أو يكون القطعان متماسين على ذلك الضلع المقابل. وكذلك أيضـًا يكون الأمر إذا كان بدلَ أحد القطعين قاعدةٌ من قاعدتي الأسطوانة.

– ل – إذا كان في أسطوانة مائلة قِطعان من قطوعها التي تلقى أضلاعها فيها ولم يتقاطعا، وكان أحدهما من القطوع الصغار، وعُمِل في ذلك القطع الأصغر شكل مستقيم الأضلاع يحيط به ذلك القطع، ويكون كل ضلعين متقابلين من أضلاع الشكل فيما بين أطراف قطرين من أقطار القطع، وأخرجت القطع التي تقع فيما بين القطعين من أضلاع الأسطوانة التي تمرّ بزوايا ذلك الشكل، ثم وصلت فيما بين أطرافها التي في القطع الآخر خطوط مستقيمة، فإن مساحة ما يحدث بين القطعين من السطوح ذوات الأضلاع – التي قواعدُها أضلاعُ الشكل المعمول في القطع الأصغر، إذا جُمعت – مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين القطعين من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلعين كانا – إذا جمع، في أضلاع الشكل المعمول في القطع الأصغر، مجموعةً. وكذلك أيضـًا يكون الحال إن كان غيرُ أحد القطعين إحدى قاعدتي الأسطوانة، وكان القطع الآخر أحدَ القطوع الصغار.

فليكن قطعان من قطوع الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها، أو قطع منها وإحدى قاعدتي الأسطوانة ا ب جـ د هـ ولا يتقاطعا، وليكن قطع ا ب جـ منهما من القطوع الصغار، وليُعمل فيه شكلٌ مستقيم الأضلاع يحيط به قطع ا ب جـ عليه ا ز ح ب ط جـ، وليكن كل ضلعين متقابلين من أضلاعه فيما بين أطراف قطرين من أقطار قطع ا ب جـ، ولتكن القطعُ التي تقع فيما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من أضلاع الأسطوانة – التي تمرّ بنقط ا ز ح ب ط جـ – خطوط ا د ز ك ح ل ب هـ ط م جـ و، ولتوصل فيما بين أطرافها التي في قطع د هـ و خطوط د ك ك ل ل هـ هـ م م و و د.

4 ضلع من: أثبتها في الهامش – 23 و د: و جـ.

فأقول: إن مساحة سطوح ا د ك ز زك ل ح ح ل هـ ب ب هـ م ط ط م وجـ جـ و د ا ذوات الأضلاع ⟨مجموعة⟩ مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين قطعي ا ب جـ د هـ و من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلعين كانا – في خطوط ا ز ز ح ح ب ب ط ط جـ جـ ا مجموعةً.



برهان ذلك: أن خطوط ا د زك ح ل ب هـ ط م جـ و وهي قطع من أضلاع الأسطوانة، وهي متوازية وموازية لسهم الأسطوانة، وسهم الأسطوانة يقطع سطح ا ب جـ على زوايا قائمة، لأن ا ب جـ من القطوع الصغار. فخطوط ا د زك ح ل ب هـ ط م جـ و أيضًا أعمدةٌ على سطح قطع ا ب جـ، فهي إذن أعمدة على جميع الخطوط التي تخرج من أطرافها في ذلك السطح؛ ولذلك تكون الخطوط التي ذكرنا أعمدةً على أضلاع شكل ا ز ح ب ط جـ محيطة معها بزوايا قائمة. فمساحةُ سطح ا د ك ز هي مثلُ نصف ما يكون من ضرب خطي ا د زك مجموعين في خط ا ز. وكذلك أيضًا نبيّن أن مساحة سطح ب هـ ط م – المقابل للسطح الذي ذكرنا – مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ب هـ ط م مجموعين في خط ب ط. ولكن ضلع ب ط من شكل ا ز ح ب ط جـ مساوٍ لضلع ا ز منه، لأنه مقابل له على القطر، فمساحة سطحي ا زك د ب هـ م ط، مجموعين، مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطوط ا د زك ب هـ ط م الأربعة في خط ا ز. ولكن خطي ا د زك مقابلان لخطي ب هـ ط م على قطرين من أقطار ا ب جـ، لأن ضلعي ا ز ب ط من أضلاع شكل ا ز ح ب ط جـ يصلان فيما بين أطراف قطرين من أقطار قطع ا ب جـ. فخطا ب هـ ط م هما ⟨قطعتان⟩ من الضلعين من أضلاع الأسطوانة المقابلين لضلعي ا د زك، فخطا ا د ب هـ – إذا جُمعا – مساويان لخطي زك ط م

إذا جُمعا. وقد كنا بيّنا أن مساحة سطحي ا د ك ز ب هـ م ط – إذا جُمعا – مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطوط ا د ز ك ب هـ ط م الأربعة في خط ا ز، فالذي يكون من ضرب خطي ا د ب هـ في خط ا ز مساوٍ لمساحة سطحي ا د ك ز/ ب هـ م ط. وقد بيّنا أن خط ا ز مساوٍ ٢١ - و لخط ب ط، فالذي يكون من ضرب خطي ا د ب هـ، مجموعين – اللذين هما قطعتان من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – في خطي ا ز ب ط مجموعين مساوٍ لضعف مساحة سطحي ا د ك ز ب هـ م ط، ومساحة هذين السطحين مساويةٌ لنصف ما قلنا. وكذلك أيضًا نبيّن في كل سطحين متقابلين من السطوح التي بين قطعي ا ب جـ د هـ و وأن مساحتها – إذا جمعا – مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة في الضلعين اللذين يقعان في قطع ا ب جـ من أضلاع ذينك السطحين. ولكن الذي يقع بين قطعي ا ب جـ د هـ و – من كل ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، إذا جمع – هو شيء واحد. فمساحة سطوح ا د ك ز ز ك ل ح ح ل هـ ب ب هـ م ط ط م و جـ جـ و د ا إذا جمعت مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين قطعي ا ب جـ د هـ و من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلعين كانا – في أضلاع شكل ا ز ح ب ط جـ مجموعة.

وقد تكون أحيانًا بعض السطوح التي تقع بين قطعي ا ب جـ د هـ و مثلثًا، وإنما يكون ذلك إذا كان هذان القطعان متماسين؛ وسبيل البرهان في ذلك مثل السبيل الذي ذكرنا آنفًا. وكذلك أيضًا يكون الحال إن كان د هـ و إحدى قاعدتي الأسطوانة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

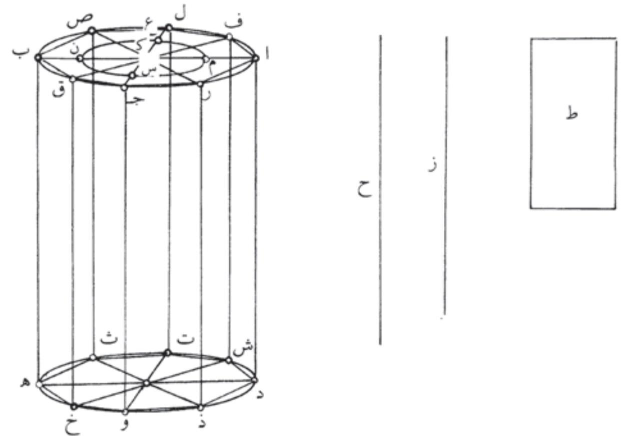
– **لا** – كل قطعة من بسيط أسطوانة مائلة – تكون واقعةً فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة الصغار، التي تلقى فيها أضلاعها – فإن مساحتها مساويةٌ للذي يكون من ضرب ما يقع فيما بين ذينك القطعين من ضلع من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلع كان – في الخط المحيط بأحد القطعين الأصغر، أيَّهما كان.

فليكن قطعة من بسيط أسطوانة مائلة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاعها

20 بأحد: باحدى.

فيها، وهما ا ب جـ د هـ و، وليكن هذان القطعان من قطوع الأسطوانة الصغار، وليقع فيما بينهما من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط ا د.

فأقول: إن مساحة القطعة التي بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مساوية لما يكون من ضرب ا د في الخط المحيط بقطع ا ب جـ.



برهان ذلك: أنه إن لم يكن مساحة ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مساويةً للذي يكون من ضرب ا د في الخط المحيط بقطع ا ب جـ، فإنها إما أن تكون أقل من ذلك وإما أكثر منه.

فليكن أولاً مساحة ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة أقلّ من الذي يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع ا ب جـ إن أمكن ذلك. فيكون مساحةُ ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مثلَ الذي يكون من ضرب خط ا د في خط أقصر من الخط المحيط بقطع ا ب جـ. وإذا جعلنا ذلك الخط خط ز، وجعلنا خط ح أطول منه وأقصر من الخط المحيط بقطع ا ب جـ، كان الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح أكثرَ من مساحة ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة، فليكن زيادتُه عليها مثلَ سطح ط. وليكن مركز قطع ا ب جـ نقطة ك وسهمه الأطول ا ب وسهمه الأقصر جـ ل. فنصف سطح ط إما ألاّ يكون أقلّ من قطع ا ب جـ، وإما أن يكون أقلّ منه.

12 ا ب جـ: ا ب جـ د – 14 ا ب جـ: ا ب جـ د.

فإن لم يكن نصف سطح ط أقل من قطع ا ب ج، فصلنا من خط ك ا خطًا يكون نسبته إلى خط ك ا أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع ا ب ج، وهو خط ك م من الصورة الأولى. وإن كان نصف سطح ط أقل من قطع ا ب ج، جعلنا نسبة ك م – من هذه الصورة – إلى ك ا أكثر من النسبة التي ذكرنا؛ وجعلنا أيضًا نسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك ا أكثر من نسبة زيادة قطع ا ب ج على نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. وإذا جعلنا على الوجهين جميعًا كل واحدة من نسبة ك ن إلى ك ب وك س إلى ك ج وك ع إلى ك ل كنسبة ك م إلى ك ا، وتوهّمنا قِطعًا ناقصًا يكون سهمه الأطول م ن وسهمه الأقصر س ع، وهو قطع م س ن ع، فإن قطع م س ن ع يكون شبيهًا / بقطع ا ب ج، لأن نسبة سهم م ن إلى سهم ا ب كنسبة ٢١ – ظ
سهم س ع إلى سهم ج ل. ويكون نسبة الخط المحيط بقطع م س ن ع إلى الخط المحيط بقطع ا ب ج كنسبة م ن إلى ا ب التي هي أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع ا ب ج. فنسبة الخط المحيط بقطع م س ن ع إلى الخط المحيط بقطع ا ب ج أكثر من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع ا ب ج، ويكون لذلك الخط المحيط بقطع م س ن ع أطول من خط ح. وإذا عملنا في قطع ا ب ج شكلاً مستقيم الأضلاع يحيط به هذا القطع ويحيط هو بقطع م س ن ع ولا تماسه أضلاعه، وكان شكل ا ف ل ص ب ق ج ر، وأخرجنا من نقط ف ل ص ب ق ج ر ما يقع بين القطعين من أضلاع الأسطوانة التي تمرّ بهذه النقط – وهي خطوط ف ش ل ت ص ث ب ه ق خ ج و ر ذ – كانت هذه الخطوط موازيةً لسهم الأسطوانة، وكانت أعمدةً على كل واحد من سطحي قطعي ا ب ج د ه و، لأن هذين القطعين هما من القطوع الصغار التي قد بيّنا أن سهم الأسطوانة عمودٌ عليها. فإذا أخرجنا خطوط د ش ش ت ت ث ث ه ه خ خ و و ذ ذ د، كانت الخطوط التي ذكرنا آنفًا، التي هي قطع من أضلاع الأسطوانة، أعمدةً على هذه الخطوط وعلى أضلاع شكل ا ف ل ص ب ق ج ر، وكانت السطوح التي تحدث فيما بين قطعي ا ب ج د ه و ومن جميع الخطوط التي ذكرنا سطوحًا قائمة الزوايا، وكانت مساحتها – إذا جُمعت – مساويةً للذي يكون من ضرب خط ا د في أضلاع شكل ا ف ل ص ب ق ج ر مجموعة، لأن جميع القطع التي تقع فيما بين قطعي ا ب ج د ه و من أضلاع الأسطوانة مساويةٌ لخط ا د. ولكن أضلاع شكل ا ف ل ص ب ق ج ر – إذا

11 م س ن ع: م ن س ع، ثم أثبت الصواب في الهامش – 14 م س ن ع: م ن س ع، ثم أثبت الصواب في الهامش/ ا ف ل ص ب ق ج ر: ا ف ل ص ب ق ج ز – 15 رَ: زَ – 24 ا ف ل ص ب ق ج ر: ا ف ل ض ب ق ج ز.

جُمعت – أكثرُ من الخط المحيط بقطع م س ن ع، الذي قد بيّنا أنه أطول من خط ح. فالسطوح التي ذكرنا – الواقعة فيما بين قطعي ا ب ج د ه و مجموعةً – أكثرُ كثيرًا من الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح. وقد كنا بيّنا أن الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح أكثر من مساحة ما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة، وجعلنا زيادته عليه مثل سطح ط. فالسطوح التي ذكرنا – الواقعة فيما بين قطعي ا ب ج د ه و مجموعة – أكثر كثيرًا مما بين هذين القطعين من بسيط الأسطوانة، وزيادتها عليه أكثر من سطح ط. فسطح ط مع الذي يقع بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة أقل من السطوح التي ذكرنا الواقعة بين هذين القطعين مجموعة. ونصف سطح ط إما ألاّ يكون أقل من قطع ا ب ج وإما أن يكون أقلّ منه.

فإن لم يكن أقل منه، فليس هو بأقل من قطع د ه و، لأن هذين القطعين متساويان، إذ كانا من القطوع الصغار. فجميع سطح ط ليس بأقلَّ من قطعي ا ب ج د ه و مجموعين. وقد كنا بيّنا أن سطح ط مع الذي يقع بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة أقلُّ من السطوح المتوازية الأضلاع الواقعة بين هذين القطعين. فهذان القطعان، إذا جُمعا، مع الذي يقع بينهما من بسيط الأسطوانة، كان جميع ذلك أقلّ من السطوح المتوازية الأضلاع التي ذكرنا، الواقعة بين هذين القطعين؛ وهذا غير ممكن لأن المحيط لا يكون أقل من المحاط به. فليس ما بين قطعي ا ب ج د ه و ⟨من⟩ بسيط الأسطوانة بأقلَّ مما يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع ا ب ج.

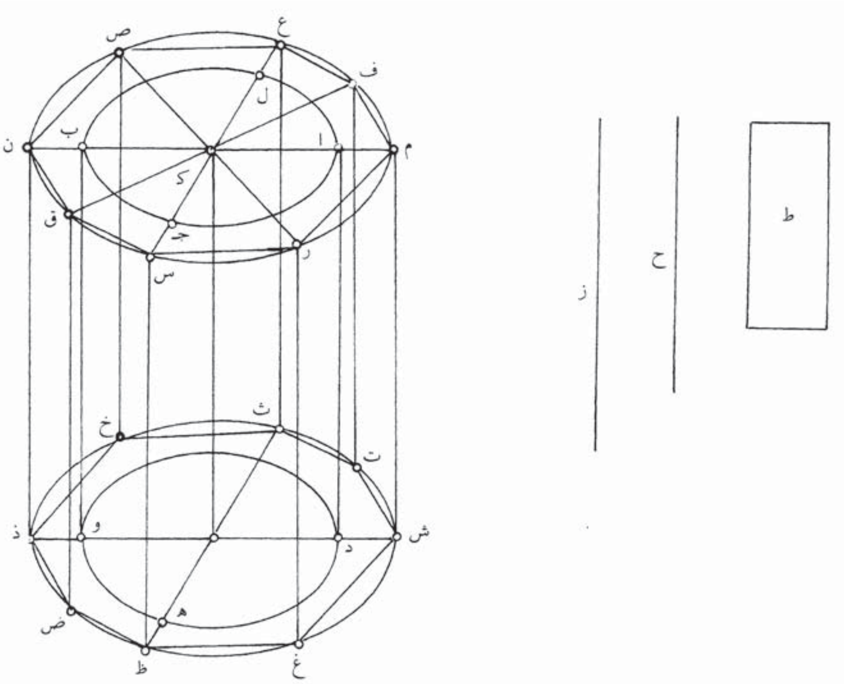
وإن كان نصف سطح ط أقلَّ من قطع ا ب ج، فإن نسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك ا تكون أكثر من نسبة زيادة قطع ا ب ج على نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج، لأنا كذلك كنا جعلناها في هذه الحال. ونسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك ا كنسبة مربع خط م ن إلى مربع خط ا ب، فنسبة مربع خط م ن إلى مربع خط ا ب أكثر من نسبة زيادة قطع ا ب ج ر على نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. ولكن نسبة مربع سهم م ن إلى مربع سهم ا ب كنسبة قطع م س ن ع إلى قطع ا ب ج، لأن هذين القطعين متشابهان. فنسبة قطع م س ن ع إلى قطع ا ب ج أكثر من نسبة زيادة قطع ا ب ج على نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. وإذا قلبنا كانت نسبة قطع ا ب ج إلى الفضل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج

4 عليه: الضمير يعود على «ما» – 21 ا ب ج ر: ا ب ج د.

م س ن ع فيما بينها – الذي هو فضل ما بين هذين القطعين – أكثر من نسبة قطع ا ب ج أيضًا إلى نصف سطح ط. فسطح الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينها أقل من نصف سطح ط. ولكن سطح هذا الشكل/ الذي ذكرنا – الذي يحيط به ٢٢ – و الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينها – أعظم من قطعه التي تحيط بها خطوط ا ف ف ل ل ص ص ب ب ق ق ج ج ر ر ا المستقيمة مع الخطوط المنحنية التي هذه الخطوطُ – التي ذكرنا – أوتارٌ لها. فهذه القِطَعُ التي ذكرنا – التي تحيط بها الخطوط المنحنية وأوتارها – إذا جُمعت، أقلُّ كثيرًا من نصف سطح ط. ولكن هذه القطع التي ذكرنا مساوية لنظائرها من القطع التي في قطع د ه و، لأن قطع د ه و لو وضع على قطع ا ب ج لانطبق عليه ووقعت كل نقطة منه على نظيرتها من قطع ا ب ج، وهي التي ينتهي إليها ضلع الأسطوانة الذي يمرّ بالنقطة الأولى. فالقِطَع التي تحيط بها الخطوط المنحنية وأوتارها من قطع ا ب ج مع نظائرها من قطع د ه و، إذا جُمعت، أقلُّ من سطح ط. ولكن جميع هذه القطع التي ذكرنا مع قِطَع بسيط الأسطوانة التي فيما بينها – التي جُملتُها هي ما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة – أكثر من السطوح المتوازية الأضلاع التي فيما بين هذين القطعين، إذا جُمعت، لأنها محيطة بها. فسطح ط، مع الذي بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة، أكثر كثيرًا من السطوح المتوازية الأضلاع التي بين هذين القطعين، إذا جُمعت. وقد كنا بيّنا أنه أقلّ منها، وهذا خُلف. فليس ما يقع بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة بأقلّ مما يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع ا ب ج، إذ كان نصف سطح ط أقل من قطع ا ب ج. وقد كنا بيّنا أنه ليس بأقلّ منه إذا لم يكن نصف سطح ط أقل من قطع ا ب ج، فليس الذي بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة بأقلَّ مما يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع ا ب ج.

وأقول أيضًا: إنه ليس بأكثر منه.

4 م س ن ع: م ن س ع، ثم أثبت الصواب في الهامش – 8 التي: أثبتها في الهامش.



فإن كان يمكن، فليكن أكثر منه، فيكون مساحةُ ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مثل الذي يكون من ضرب خط ا د في خط أطول من الخط المحيط بقطع ا ب جـ. وإذا جعلنا ذلك الخطَّ خطَّ ز، وجعلنا خط ح أقصر منه وأطولَ من الخط المحيط بقطع ا ب جـ، كان الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح أقلَّ من مساحة ما بين قطعي ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة. وإذا جعلنا نقصانَهُ عنه مثل سطح ط وجعلنا نسبةَ خطّ ك م من الصورة الثانية إلى خط ك ا – الذي هو أقصرُ منه – أقلّ من نسبة خط ح إلى الخط المحيط بقطع ا ب جـ، وجعلنا نسبة مربعه إلى مربعه أقلّ أيضًا من نسبة قطع ا ب جـ مع نصف سطح ط إلى قطع ا ب جـ، وجعلنا كل واحدة من نسب ك ن إلى ك ب وك س إلى ك جـ وك ع إلى ك ل كنسبة ك م إلى ك ا، وعملنا خارج قطع ا ب جـ قطعًا ناقصًا يكون سهمه الأطول م ن وسهمه الأقصر س ع، وهو قطع م س ن ع، فإن قطع م س ن ع أيضًا يكون شبيهًا بقطع ا ب جـ، ويكون نسبة الخط المحيط به إلى الخط المحيط بقطع ا ب جـ كنسبة م ن إلى ا ب، التي هي أقل من نسبة ح إلى الخط المحيط بقطع ا ب جـ. فنسبة الخط المحيط بقطع م س ن ع إلى الخط المحيط بقطع ا ب جـ أقل من نسبة خط ح إلى الخط – أيضًا – المحيط بقطع ا ب جـ، ويكون

ليس هذا الشكل في المخطوطة.

لذلك، الخط المحيط بقطع م س ن ع أقصر من خط ح. وإذا عملنا في ⟨سطح⟩ قطع ا ب ج شكلاً مستقيم الأضلاع، محيطٌ به قطعُ م س ن ع ومحيطٌ هو بقطع ا ب ج ولا تلقه أضلاعه، فكان شكل م ف ع ص ن ق س ر، وأخرجنا من نقط زوايا هذا الشكل أعمدةً على سطحه تنتهي إلى السطح الذي فيه قطع د ه و، وهي خطوط م ش ف ت ع ث ص خ ن ذ ق ض س ظ ر غ، كانت هذه الخطوط موازيةً لسهم الأسطوانة ولأضلاعها ومساويةً لخط ا د، لأن قطعي ا ب ج د ه و من القطوع الصغار. وإذا أخرجنا خطوط ش ت ت ث ث خ خ ذ ذ ض ض ظ ظ غ غ ش حدثت من ذلك سطوح متوازية الأضلاع خارجةٌ عن بسيط الأسطوانة. ويتبيّن مما قلنا، كما بيّنا أيضًا، أن مساحة هذه السطوح، إذا جُمعت، مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط ا د في أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س ر مجموعة. ولكن أضلاع هذا الشكل الذي ذكرنا مجموعةً، أقلُّ من الخط المحيط بقطع م س ن ع، الذي قد بيّنا أنه أقصر من خط ح. فالسطوح المتوازية الأضلاع – التي ذكرنا – مجموعةً، أقلُّ / كثيرًا من الذي يكون من ضرب ٢٢ – ظ
خط ا د في خط ح. وقد كنا بيّنا أن الذي يكون من ضرب خط ا د في خط ح أقلُّ من مساحة ما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة، وجعلنا نقصانه عنه مثل سطح ط؛ فالسطوح المتوازية الأضلاع – التي ذكرنا – مجموعةً، أقلُّ كثيرًا مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة، ونقصانها عنه أكثر من سطح ط. فسطح ط مع السطوح المتوازية الأضلاع – التي ذكرنا – مجموعةً أقلّ مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة. وأيضًا فإن قطع م س ن ع شبيه بقطع ا ب ج، فنسبته إليه كنسبة مربع سهم م ن إلى مربع سهم ا ب التي هي كنسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك ا. وقد كنا جعلنا نسبة مربع خط ك م إلى مربع خط ك ا أقل من نسبة قطع ا ب ج مع نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج، فنسبة قطع م س ن ع إلى قطع ا ب ج أقل من نسبة قطع ا ب ج مع نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. وإذا فصلنا، كانت نسبة زيادة قطع م س ن ع على قطع ا ب ج – التي هي الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما – إلى قطع ا ب ج أقلّ من نسبة نصف سطح ط إلى قطع ا ب ج. فسطح الشكل الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما أقل من نصف سطح ط. ولكن سطح هذا الشكل الذي ذكرنا – الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ا ب ج م س ن ع فيما بينهما – أعظمُ من سطح الشكل الذي تحيط به أضلاع

2 الأضلاع: الخطوط، ثم أثبت الصواب في الهامش – 4 ن ذ: ت د – 8 ويتبين: تبين – 18 ك م (الأولى): ك ن، وهو أيضًا صحيح.

شكل م ف ع ص ن ق س ر المستقيم الأضلاع فيما بينها وبين قطع ا ب ج. فسطح هذا الشكل الذي ذكرنا – الذي فيما بين أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س ر المستقيم الأضلاع وبين قطع ا ب ج – أقلُّ كثيرًا من نصف سطح ط. ولكن هذا السطح، الذي ذكرنا، مساوٍ لنظيره الواقع حول قطع د ه و، وهو الذي بين قطع د ه و وبين أضلاع شكل ش ت ث خ ذ ض ظ غ، لأن هذا الشكل مع قطع د ه و، لو وضعا كهيئتها على شكل م ف ع ص ن ق س ر وقطع ا ب ج لانطبقا عليها، ووقعت كل نقطة منها على نظيرتها من الآخرين. فسطحا الشكلين – اللذين ذكرنا – اللذين أحدهما حول قطع ا ب ج والآخر حول قطع د ه و – إذا جُمعا، أقلُّ من سطح ط. ولكن هذين السطحين مع السطوح المتوازية الأضلاع التي قواعدها أضلاع شكل م ف ع ص ن ق س ر، إذا جُمعت، أكثر مما بين قطعي ا ب ج د ه و ومن بسيط الأسطوانة، لأنها محيطة به. فسطح ط مع السطوح المتوازية الأضلاع التي قواعدها الأضلاع المحيطة بشكل م ف ع ص ن ق س ر، إذا جمعت، أكثر كثيرًا مما بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة. وقد كنا بيّنا أنها أقلّ منه، هذا خُلف. فليس مساحةُ ما يقع بين قطعي ا ب ج د ه و من بسيط الأسطوانة بأكثرَ مما يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع ا ب ج.

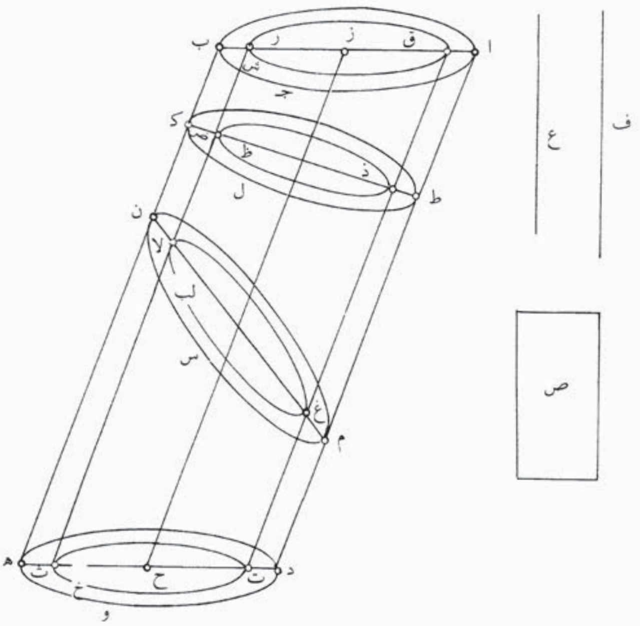
وقد كنا بيّنا أنها ليست بأقلَّ منه، فهي إذن مثلُه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./

– لب – كلُّ قطعة من بسيط أسطوانة مائلة – تكون واقعة فيما بين قطعين لا يتقاطعان من ٢٣ - و قطوعها التي تلقى فيها أضلاعها، ويكون أحدهما من قطوع الأسطوانة الصغار، والآخر من غيرها من قطوع الأسطوانة، أو فيما بين إحدى قاعدتي الأسطوانة وبين قطع من القطوع الصغار التي لا تقطعه – فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين القطعين، أو القطع والقاعدة، من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، أيَّ ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أيَّ قطع كان.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب ج د ه و، وعلى مركزي القاعدتين ز ح، وليكن قطعان من قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاعها فيها، إما متماسين على نقطة واحدة وإما غيرَ متماسين ولا متقاطعين، وهما قِطْعا ط ك ل م ن س، وليكن قطع ط ك ل منها وحده من القطوع الصغار، وليكن خطا ا ط م د ب ك ن ه ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة.

1 بينها: بينهما – 6 منها: منهما – 13 ا د: ط – 24 الصغار: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم.

فأقول: إن مساحة ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ط ك ل؛ وإن مساحة ما بين قطع ط ك ل وبين قاعدة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة – إذا لم يقطع القاعدة – مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ا ط ب ك، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ط ك ل.



برهان ذلك: أنه إن لم تكن مساحة ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة مساويةً لنصف ما قلنا، فإنها إما أن تكون أقل من النصف، وإما أكثر من النصف.

فلتكن أولاً أقل من النصف، إن أمكن ذلك، فتكون مساحةُ ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة مثلَ نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن مجموعين في خط أقصر من الخط المحيط بقطع ط ك ل. وإذا جعلنا ذلك الخطَّ خطَّ ع، وجعلنا خط ف أطول منه وأقصر من الخط المحيط بقطع ط ك ل، كان نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في خط ف أكثر من مساحة ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة؛ وإذا جعلنا

زيادتَه عليها مثلَ سطح صَ ، فإن نصف سطح صَ إما ألّا يكون أقلّ من قطع م ن س، وإما أن يكون أقلّ منه.

فإن لم يكن أقلّ منه، عملنا على مركزي ز ح دائرتين متساويتين أصغر من دائرتي ا ب جـ د هـ و، ⟨و⟩يكون نسبةُ قطر كل واحدة منها إلى قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و أكثر من نسبة خط ف إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل. وإن كان نصف سطح صَ أقلّ من قطع م ن س، جعلنا نسبةَ قطر كل واحدة من الدائرتين – اللتين ذكرنا – إلى قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و أكثر من النسبة التي ذكرنا، وجعلنا أيضًا نسبة مربع قطر كل واحدة منها إلى مربع قطر كل واحدة من دائرتي ا ب جـ د هـ و أكثر من نسبة زيادة قطع م ن س على نصف سطح صَ إلى قطع م ن س، وليكن الدائرتان اللتان وصفنا دائرتي ق ر ش ت ث خ. وإذا توهمنا على هذين الوجهين جميعًا أسطوانةً في داخل الأسطوانة الأولى، يكون دائرتا ق ر ش ت ث خ قاعدتين لها، ⟨و⟩كان القطعان اللذان يُحدثها في هذه الأسطوانة الصغرى سطحا قطعي ط ك ل م ن س – وهما قطعا ذ ض ظ غ لا لب – شبيهين بقطعي ط ك ل م ن س، كل واحد منها شبيهٌ بنظيره، وصارت نسبة الخط المحيط بقطع ذ ض ظ إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل كنسبة كل قطر من أقطار قطع ذ ض ظ إلى نظيره من أقطار قطع ط ك ل؛ وهذه النسبة هي كنسبة قطر دائرة ق ر ش إلى قطر دائرة ا ب جـ، التي قد كنا جعلناها أكثر من نسبة خط ف إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل. فنسبة الخط المحيط بقطع ذ ض ظ إلى الخط المحيط بقطع ط ك ل أكثر من نسبة خط ف إلى الخط، أيضًا، المحيط بقطع ط ك ل. ويكون – لذلك – الخط المحيط بقطع ذ ض ظ أطول من خط ف. وإن نحن توهمنا في ⟨سطح⟩ قطع ط ك ل شكلاً مستقيم الأضلاع، يحيط به قطع ط ك ل ويحيط هو بقطع ذ ض ظ ولا تماسّه / أضلاعه، وتكون ٢٣ - ظ الخطوط المستقيمة التي تصل فيما بين زواياه المتقابلة أقطارًا لقطع ط ك ل، وتوهمنا أن قطعًا من أضلاع الأسطوانة العظمى قد أخرجت من زوايا ذلك الشكل، وانتهت أطرافها إلى قطع م ن س، وأنه قد وصلت فيما بين أطرافها – التي في قطع م ن س – خطوط مستقيمة، فإنه سيَحدُث من ذلك – فيما بين بسيط الأسطوانة العظمى وبين بسيط الأسطوانة الصغرى – سطوحٌ مستقيمة الأضلاع، ويَحدُث في قِطع م ن س شكلٌ مستقيم الأضلاع، يحيط به قطع م ن س، ويحيط هو بقطع غ لا لب. ويكون مساحة السطوح، التي بين قطعي ط ك ل

6 جعلنا: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم.

م ن س، إذا جمعت – مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في أضلاع الشكل المستقيم الأضلاع الذي توهمناه في قطع ط ك ل مجموعةً. ولكن أضلاع هذا الشكل – إذا جمعت – أكثرُ من الخط المحيط بقطع ذ ض ظ، الذي قد بيّنا أنه أطول من خط ف. فالسطوح ذوات الأضلاع التي ذكرنا – الواقعةُ فيما بين قطعي ط ك ل م ن س، إذا جمعت – أكثرُ كثيرًا من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن مجموعين في خط ف. وقد كنا بيّنا أن نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في خط ف أكثرُ من مساحة ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى. وإذا جعلنا زيادتَه عليها مثلَ سطح ص، فالسطوح التي ذكرنا، الواقعةُ فيما بين قطعي ط ك ل م ن س – إذا جمعت – أكثرُ كثيرًا مما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى، وزيادتُها عليه أكثرُ من سطح ص. فسطح ص مع الذي يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى أقل من السطوح التي ذكرنا، الواقعة فيما بين هذين القطعين. ونصفُ سطح ص إما أن يكون أقلَّ من قطع م ن س وإما ألّا يكون أقل منه. فإن لم يكن أقلّ منه، فليس هو بأقلَّ من قطع ط ك ل، لأن قطع ط ك ل من القطوع الصغار، وليس قطع م ن س قطعًا صغيرًا، فجميع سطح ص ليس بأقل من قطعي م ن س ط ك ل مجموعين. وقد كنا بيّنا أن سطح ص مع الذي يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى أقلّ من السطوح التي بين هذين القطعين، الواقعة بين بسيطي الأسطوانتين إذا جمعت. فقطعا ط ك ل م ن س، إذا جمعا مع ما يقع بينهما من بسيط الأسطوانة العظمى، كان جميعُ ذلك أقلَّ من السطوح التي بين هذين القطعين إذا جمعت؛ وهذا غير ممكن، لأن المحيط لا يكون أقلّ من المحاط به. فليس ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى بأقلّ من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ط ك ل.

وإن كان نصف سطح ص أقلّ من قطع م ن س، فإن نسبة مربع قطر دائرة ق ر ش إلى مربع قطر دائرة ا ب جـ أكثر من نسبة زيادة قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س، لأنا كذلك كنا جعلنا ما في هذه الحال. ولكن سطحي م ن س ط ك ل قد قطعا الأسطوانتين اللتين قاعدتا إحداهما دائرتا ا ب جـ د هـ و وقاعدتا الأسطوانة الأخرى منها دائرتا ق ر ش ت ث خ، فأحدثا في الأسطوانة العظمى منها قطعي م ن س ط ك ل وفي الأسطوانة

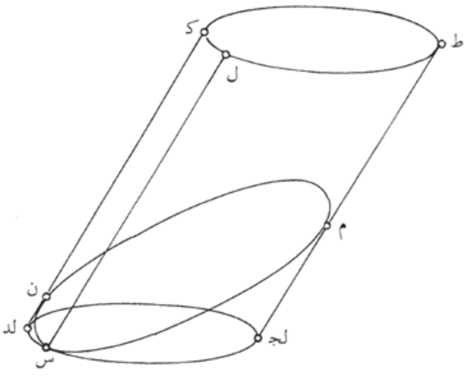
7 م ن س: ط م ن – 23 ط ك ل: أثبتها في الهامش.

الصغرى قطعي غ لا لب ذ ض ظ، فقطعا غ لا لب ذ ض ظ شبيهان بقطعي م ن س ط ك ل، كلُّ قطع منها لنظيره، ونسبةُ مربع كل قطر من أقطار كل واحد منها إلى مربع نظيره من أقطار صاحبه الشبيه به كنسبة مربع قطر دائرة ق ر ش إلى مربع قطر دائرة ا ب ج. فنسبة مربع كل قطر من أقطار قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى مربع نظيره من أقطار القطع الشبيه به من قطعي م ن س ط ك ل أكثرُ من نسبة زيادة قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س. ولكن نسبة مربع كل قطر من أقطار قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى مربع نظيره من أقطار القطع الشبيه به من قطعي م ن س ط ك ل كنسبة ذلك القطع من القطعين الأولين إلى نظيره من القطعين الآخرين، لأن القطعين الأولين يشبهان القطعين الآخرين، كل واحد منها نظيره. فنسبة كل واحد من/ قطعي غ لا لب ذ ض ظ إلى نظيره الشبيه به من قطعي م ن س ط ك ل أكثرُ من نسبة زيادة ٢٤ - و
قطع م ن س على نصف سطح ص إلى قطع م ن س. وإذا قلبنا كانت كلُّ واحدة من نسبة قطع م ن س إلى زيادته على قطع غ لا لب – التي هي السطحُ الذي يحيط به الخطان المحيطان بهذين القطعين فيما بينها – ومن نسبة قطع ط ك ل إلى زيادته على قطع ذ ض ظ – التي هي السطح الذي يحيط به الخطان المحيطان بهذين القطعين فيما بينها – أكثرَ من نسبة قطع م ن س إلى نصف سطح ص. فأما السطح – الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي م ن س غ لا لب فيما بينها – فقد تبين، من هذا الذي قلنا، أنه أقل من نصف سطح ص. وأما السطح الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ فيما بينها، فقد تبيّن مما قلنا، أن نسبة قطع ط ك ل إليه أكثرُ من نسبة قطع م ن س إلى نصف سطح ص. ولكن قطع ط ك ل أصغر من قطع م ن س، إذ كان قطع ط ك ل من القطوع الصغار. فيصير السطح أيضًا – الذي يحيط به الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ فيما بينها – أقلَّ كثيرًا من نصف سطح ص. وإذ كان ذلك كذلك فإن السطحين – اللذين يحيط بأحدهما الخطان المحيطان بقطعي ط ك ل ذ ض ظ فيما بينها، ويحيط بالآخر منها الخطان المحيطان بقطعي م ن س غ لا لب فيما بينها، إذا جمعا – أقلُّ من سطح ص. ولكنّ هذين السطحين اللذين ذكرنا – إذا جمعا – أعظمُ من قطعها التي تحدها وتحوزها منها أضلاعُ شكلين: أحدهما الذي توهمنا أضلاعَه فيما بين الخطين المحيطين بقطعي ط ك ل ذ ض ظ، والشكلُ الآخر الشكلُ الذي كانت حدثت لنا أضلاعه فيما بين الخطين المحيطين بقطعي م ن س غ لا لب، حيث كنا أخرجنا الخطوطَ المستقيمة فيما بين أطراف

2 منها (الأولى): أثبتها في الهامش – 16 بقطعي: بقطع – 17 أكثر: أكبر.

قطع أضلاع الأسطوانة العظمى التي في قطع م ن س. ويحيط بكل قطعة من القطع التي ذكرنا ضلعٌ من أضلاع الشكلين المستقيمين الأضلاع اللذين وصفنا، والخط المنحني الذي يُوتره ذلك الضلع. فهذه القطع التي ذكرنا التي تحيط بها الخطوط المنحنية وأوتارها – إذا جمعت – أقلُّ كثيرًا من سطح ص. ولكن هذه القطع – التي ذكرنا – إذا جمعت مع قطع بسيط الأسطوانة العظمى التي فيما بينها، التي جملتُها هي ما بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى، أكثرُ من السطوح التي بين هذين القطعين الواقعة بين بسيط الأسطوانة العظمى وبين بسيط الأسطوانة الصغرى، لأنها محيطة بها. فسطح ص مع الذي بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى أكثرُ كثيرًا من السطوح التي بين هذين القطعين، الواقعةِ بين الأسطوانة العظمى و〈الأسطوانة〉 الصغرى إذا جمعت. وقد كنا بيّنا أنه أقلّ منها، فهو أكثرُ منها وأقلّ منها، هذا خلف. فليس ما يقع بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى بأقلّ من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ط ك ل، إذا كان نصف سطح ص أقل من قطع م ن س. وقد كنا بيّنا أنه ليس بأقل من نصفه، إذا لم يكن الأمرُ كذلك. فليس الذي بين قطعي ط ك ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى بأقلّ من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ك ن مجموعين في الخط المحيط بقطع ط ك ل.

وأقول أيضًا إنه ليس بأكثر من نصفه.



14 ط م: ك م – ليس هذا الشكل في المخطوطة.

وذلك أنا إن جعلنا أطولَ ما يقع بين قطعي ط ک ل م ن س من ضلع من أضلاع الأسطوانة العظمى خط ل س وأجزنا على نقطة س سطحًا موازيًا لسطح قطع ط ک ل، فقَطَعَ الأسطوانةَ العظمى، إما وهي كهيئتها، وإما من بعد أن تخرج على استقامة أضلاعها، وأحدث فيها قِطْعَ س جـ لد، كانت القطع التي تقع فيما بين قطعي ط ک ل س جـ لد من أضلاع الأسطوانة العظمى التي أحدُها خطُّ ل س متساويةً، لأنها متوازية، وبين سطحين متوازيين؛ فصار قطعا م ن س س جـ لد متماسين على نقطة س وحدها، لأن خط ل س أطولُ ما يقع بين قطعي م ن س ط ک ل من ضلع من أضلاع الأسطوانة العظمى، وقِطْع س جـ لد من القطوع الصغار. فنبيّن من ذلك –كما بيّنا آنفًا– أن مساحةَ ما بين قطعي م ن س س جـ لد من بسيط الأسطوانة العظمى / ليست بأقلّ من نصف ما يكون من ضرب ما يقع بين قطعي م ن س س جـ لد من ٢٤ – ظ ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة العظمى، أيَّ ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع س جـ لد الذي هو مثلُ الخط المحيط بقطع ط ک ل. ولكن مساحة جميع ما يقع من بسيط الأسطوانة العظمى – فيما بين قطعي س جـ لد ط ک ل – مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين هذين القطعين من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى في الخط المحيط بقطع ط ک ل، لأن قطعي س جـ لد ط ک ل هما من القطوع الصغار، وإن الذي يقع بينهما من كل ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة العظمى – إذا جمع – هو ضعف خط ل س. فالباقي – وهو مساحة ما يقع من بسيط الأسطوانة العظمى فيما بين قطعي ط ک ل م ن س – ليس بأكثرَ من نصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى، في الخط المحيط بقطع ط ک ل. ولكن الذي يقع بين قطعي ط ک ل م ن س من ذينك الضلعين المتقابلين، اللذين ذكرنا، من أضلاع الأسطوانة العظمى، إما أن يكونا هما خطا ط م ک ن وإما أن يكونا – إذا جمعا – مساويين لهما مجموعين. فمساحة ما يقع بين قطعي ط ک ل م ن س من بسيط الأسطوانة العظمى ليست بأكثرَ من نصف ما يكون من ضرب خطي ط م ک ن مجموعين في الخط المحيط بقطع ط ک ل. وقد كنا بيّنا أنها ليست بأقل من ذلك، فهي إذن مساوية لنصفه.

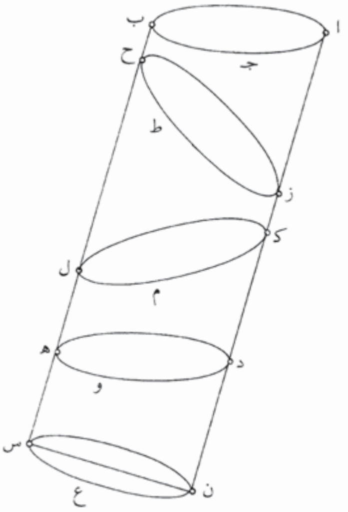
وكذلك أيضـًا نبيّن أن مساحة ما بين قطع ط ک ل وقاعدة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة ⟨العظمى⟩ مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ا ط ب ک مجموعين في الخط المحيط بقطع ط ک ل؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

4 كانت ... س جـ لد: أثبتها في الهامش – 11 س جـ لد ... بقطع: كررها، ثم ضرب عليها بالقلم.

– لج – بسيطُ كلّ أسطوانةٍ مائلةٍ، وكلّ قطعة منه واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة، يلقيان فيها أضلاعها ولا يتقاطعان، وإن لم يكن أحد القطعين من القطوع الصغار، أو فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة إذا لم يقطعها، فإن مساحة كل واحد من البسيط والقطعة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين سطح أعلى كلّ واحد منها وبين سطح قاعدته من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – أيَّ ضلعين كانا – في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أيَّ قطع كان.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وليقطعها قطعان يلقيان أضلاعها فيها، وهما قطعا ز ح ط ك ل م. وليكن خطا ا ز ك د ب ح ل هـ ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة.

فأقول: إن مساحة بسيط أسطوانة ا ب جـ د هـ و مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ا د ب هـ مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان، وإن مساحة ما بين قطعي ز ح ط ك ل م من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ز ك ح ل، مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيَّ قطع كان، وإن مساحة ما بين قطع ز ح ط وبين قاعدة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ا ز ب ح مجموعين في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيَّ قطع كان.



2 أضلاعها: أضلاعها – 7 يلقيان: يلتقيان / فيها: أثبتها في الهامش.

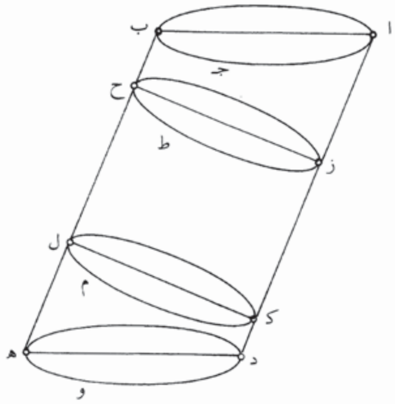
برهان / ذلك: أنا إذا أخرجنا بسيطَ الأسطوانة على استقامة أضلاعها، وتوهّمنا فيه خارجَ ٢٥ – و الأسطوانة قِطْعًا من القطوع الصغار، وهو قطع ن س ع، وأخرجنا ضلعي ا د ب هـ إلى نقطتي ن س، كانت مساحة ما بين قطع ن س ع وبين دائرة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي ا ن ب س، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ن س ع، لأن خطي ا د ب هـ هما ضلعان ما متقابلان من أضلاع الأسطوانة. ولذلك أيضًا تكون مساحة ما بين قطع ن س ع ودائرة د هـ و من بسيط الأسطوانة مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي د ن هـ س، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ن س ع. وتبقى مساحة بسيط الأسطوانة الذي بين دائرتي ا ب جـ د هـ و، اللتين هما قاعدتا الأسطوانة، مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي ا د ب هـ، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ن س ع الذي هو من القطوع الصغار. وأيضًا فإن مساحة ما بين قطعي ن س ع ز ح ط من بسيط الأسطوانة مساوية ⟨لنصف⟩ الذي يكون من ضرب خطي ز ن ح س، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ن س ع. ومساحة ما بين قطعي ن س ع ك ل م أيضًا من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ك ن ل س، مجموعين، في الخط المحيط بقطع ن س ع. فتبقى مساحةُ ما بين قطعي ز ح ط ك ل م من بسيط الأسطوانة مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي ز ك ح ل مجموعين في الخط المحيط بقطع ن س ع الذي هو من القطوع الصغار. وكذلك أيضًا نبيّن أن مساحة ما بين قطع ز ح ط وبين قاعدة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ ⟨لنصف⟩ الذي يكون من ضرب خطي ا ز ب ح مجموعين في الخط المحيط بقطع ن س ع، الذي هو من القطوع الصغار، وجميعُ القطوع الصغار متساويةٌ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **لد** – بسيطُ كلّ أسطوانةٍ مائلةٍ، وكلّ قطعة منه واقعة فيما بين سطحين متوازيين من السطوح التي تلقى في الأسطوانة أضلاعها، فإن مساحة كل واحد منها مساويةٌ للذي يكون من ضرب ما بين سطح أعلاه وسطح قاعدته من ضلع من أضلاع الأسطوانة، أيّ ضلع كان، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أيّ قطع كان.

فليكن أسطوانة مائلة على قاعدتيها ا ب جـ د هـ و، وليكن قطعة منها فيما بين سطحين متوازيين يلقيان أضلاع الأسطوانة فيها، عليها ز ح ط ك ل م. وليكن ضلع من أضلاع الأسطوانة خط ا ز ك د.

4 ب س: ن س – 10 الذي: للذي – 16 قطع: قطعي / الذي: للذي.

فأقول: إن مساحة بسيط أسطوانة ا ب جـ د هـ و مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان، وإن مساحة ما بين سطحي ز ح ط ک ل م من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب خط ز ک في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.



برهان ذلك: أنا إذا أخرجنا في بسيط الأسطوانة الضلع المقابل لضلع ا د من أضلاع الأسطوانة، وهو خط ب ح ل هـ، كانت مساحةُ بسيطِ أسطوانةِ ا ب جـ د هـ و مساويةً لنصف ما يكون من ضرب خطي ا د ب هـ مجموعين – إذ كانا ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة – في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان. ولكن خطي ا د ب هـ متساويان لأنهما متوازيان، وفيما بين سطحين متوازين؛ فمساحة بسيط أسطوانة ا ب جـ د هـ و مساوية للذي يكون من ضرب خط ا د في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان. وأيضًا فإن مساحة ما بين سطحي ز ح ط ک ل م مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خطي ز ک ح ل مجموعين، إذ كانا من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع / كان. ولكن خطي ز ک ح ل متساويان، لأنهما متوازيان فيما بين سطحين متوازيين، فمساحة ما بين سطحي ز ح ط ک ل م من بسيط الأسطوانة مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط ز ک في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان. ٢٥ – ظ

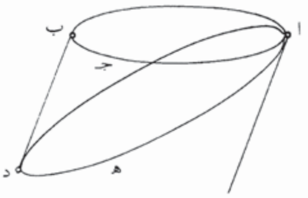
1 ا ب جـ د هـ و: ا ب جـ د هو.

وكذلك نبيّن أيضـًا أن سطح ز ح ط إن كان موازيًا لدائرة ا ب جـ ، فإن مساحة ما بينه وبين دائرة ا ب جـ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط ا ز في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– له – كل قطعة من بسيط أسطوانة مائلة تكون واقعةً فيما بين قطعين متماسّين على نقطة واحدة من قطوع الأسطوانة التي تلقى أضلاع الأسطوانة فيها، أو تكون واقعةً فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة، إذا كان القطع مماسًا لها على نقطة واحدة، فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب أطول ما يقع بين القطعين – أو القطع والقاعدة – من ضلعٍ من أضلاع الأسطوانة في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.

فليكن قطعةٌ من بسيط أسطوانة مائلة، واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة، أو قطع وقاعدة، عليها ا ب جـ ا د هـ. وليلقيا ا ب جـ ا د هـ أضلاع أسطوانة فيها، وليكونا متماسين على نقطة واحدة، وهي نقطة ا. وليكن أطول ما يقع فيما بين ا ب جـ ا د هـ من ضلع من أضلاع الأسطوانة خط ب د.

فأقول: إن مساحة ما بين ا ب جـ ا د هـ من بسيط الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب خط ب د في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.



برهان ذلك: أن مساحة ما بين ا ب جـ ا د هـ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب ما يقع بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، أيّ ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أيَّ قطع كان. ولكن الضلع المقابل لضلع ب د من أضلاع الأسطوانة هو الذي يمرّ بنقطة ا التي هي نقطة التماس؛ وليس يقع من هذا الضلع شيء فيما بين ا ب جـ ا د هـ. فمساحة ما بين ا ب جـ ا د هـ من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف

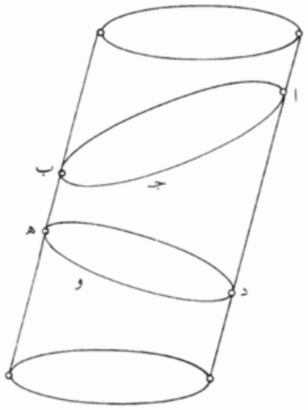
2 ا ز: ز ك – 5 التي: للتي – 10 وليلقيا: وليلق.

ما يكون من ضرب ب د في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– لو – كل قطعة من بسيط الأسطوانة المائلة تكون واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة يلقيان أضلاع الأسطوانة فيها، ولا يلتقيان فيها، ولا هما بمتوازيين، أو تكون واقعة فيما بين قطع من هذه القطوع وبين إحدى قاعدتي الأسطوانة، إذا لم يلتقيا في الأسطوانة، فإن مساحتها مساوية لنصف ما يكون من ضرب أطول خط يقع بين سطح أعلى القطعة وسطح أسفلها من ضلع من أضلاع الأسطوانة، وأقصر خط يقع بينها، أيضًا، من ضلع من أضلاع الأسطوانة مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع 〈كان〉.

فليكن قطعةٌ من بسيط أسطوانة مائلة فيما بين ا ب جـ د هـ و، وليكن ا ب جـ د هـ و قطعين من قطوع الأسطوانة التي تلقى فيها أضلاعها، أو قطعًا من هذه القطوع وإحدى قاعدتي الأسطوانة، ولا يكوننَّ القطعان متوازيين، ولا يلتقيا في الأسطوانة. وليكن أطول ما يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع من أضلاع الأسطوانة خطُّ ا د، وأقصرَ ما يقع بينها من ضلع من أضلاع الأسطوانة خطُّ ب هـ.

فأقول: إن مساحة ما بين ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ا د ب هـ 〈مجموعين〉 في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيَّ قطع كان.



11 يلتقيا: يلقيا.

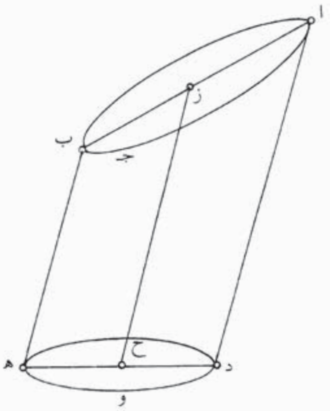
برهان ذلك: أن خط ا د هو أطول ما يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع من أضلاع الأسطوانة؛ فالذي يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع الأسطوانة المقابل لخط ا د هو أقصر ما يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع من أضلاع الأسطوانة. ولكن أقصر ما يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع من أضلاع الأسطوانة هو خط ب هـ. فخط ب هـ هو ما يقع بين ا ب جـ د هـ و من ضلع الأسطوانة المقابل للضلع الذي ا د قطعة منه. ومساحة ما بين ا ب جـ د هـ و من / بسيط ٢٦ - و الأسطوانة مساويةٌ لنصف ما يكون من ضرب ما يقع فيما بين هذين القطعين من ضلعين متقابلين من أضلاع الأسطوانة، أيّ ضلعين كانا، في الخط المحيط بقطع من قطوعها الصغار، أيّ قطع كان. فمساحة ما بين ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي ا د ب هـ مجموعين في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **لز** – مساحة بسيط كل أسطوانة مائلة ومساحة كل قطعة منه واقعة فيما بين قطعين من قطوع الأسطوانة، يلقيان فيها جميع أضلاعها من غير أن يتقاطعا ⟨فيها⟩ أو فيما بين قطع منها وإحدى قاعدتي الأسطوانة، مساويةٌ للذي يكون من ضرب ما يقع فيما بين سطح أعلى كل واحد منها، وبين سطح قاعدته من سهم الأسطوانة في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.

فليكن فيما بين ا ب جـ د هـ و بسيط الأسطوانة، أو قطعة منه. وليلقَ ا ب جـ د هـ و جميع أضلاع الأسطوانة فيها، ولا يقطعنّ واحدٌ منها الآخر ⟨فيها⟩، وليكن الذي بينها من سهم الأسطوانة ز ح.

فأقول: إن مساحة ما بين ا ب جـ د هـ و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب ز ح في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.

1 يقع: كتب «يكون»، ثم أثبت الصواب فوقها.



برهان ذلك: أن اب ج د ه و إما أن يكونا متوازيين وإما ألّا يكونا كذلك. فإن كانا متوازيين وجعلنا ما بين اب ج د ه و من ضلعين ما متقابلين من أضلاع الأسطوانة خطي اد ب ه، كانت مساحة ما بين اب ج د ه و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب اد في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان. ولكن خط اد مثل خط زح لأنهما متوازيان وفيما بين سطحين متوازيين. فمساحة ما بين اب ج د ه و من بسيط الأسطوانة مساوية للذي يكون من ضرب خط زح في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان.

وإن لم يكن اب ج د ه و متوازيين، وكانا متماسّين على نقطة واحدة، أو لم يلتقيا، فإن مساحة ما بينهما من بسيط الأسطوانة مساوية لنصف ما يكون من ضرب خطي اد ب ه، مجموعين، في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان. ولكن خط زح مساوٍ لنصف خطي اد ب ه مجموعين، فمساحة ما بين اب ج د ه و من بسيط الأسطوانة مساويةٌ للذي يكون من ضرب خط زح في الخط المحيط بقطع من قطوع الأسطوانة الصغار، أيّ قطع كان؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وينبغي أن تعلم أن مقام الدوائر الموازية لقاعدتي الأسطوانة القائمة فيها كمقام القطع الأصغر في الأسطوانة المائلة، وأن جميع ما ذكرناه في الأسطوانة المائلة من مساحة بسيطها وقطع بسيطها

14 الدوائر: الداوير.

فإنه يجب مثله بعينه في الأسطوانة القائمة، متى جُعل بدلَ القطوع الصغار من قطوعها الدوائرُ الموازيةُ لقاعدتي الأسطوانة القائمة، وطريقُ البرهان على الأمرين جميعًا طريقٌ واحد.

تمّ كتاب ثابت بن قرّة الحرّاني في قطوع الأسطوانة وبسيطها.
والحمدُ لله ربّ العالمين كثيرًا، والصلاةُ على رسوله محمد
وآله أجمعين.

2 القائمة: كرر بعدها «وقاعدتي الأسطوانة القائمة».

الفصل الثالث

ابن سنان، نقد الماهاني في مساحة القطع المكافئ

٣-١ مقدّمة

٣-١-١ إبراهيم بن سنان: "الوريث" و"الناقد"

ولد إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة سنة ٢٩٦هـ / ٩٠٩م في بغداد، وتـُوفـِّيَ فيها بسبب المرض بعد سبع وثلاثين سنة، في سنة ٣٣٥هـ / ٩٤٦م[١]. وهو "وريث" بالمعنى الدقيق للكلمة، ولكنه كان بالفعل وريثاً بكل ما تحمله هذه الكلمة من معانٍ، كما سنرى. كان أيضاً رياضيّاً عبقريّاً، وكانت كلّ الدلائل تتنبـأ له بالقيام بإنجازات كبيرة. ولم يَخِبْ الظنّ بإبراهيم بن سنان، على كلّ حال، بالرغم من حياته القصيرة.

يكفي أن نقرأ اسمه بالكامل، وأن نَذكُر المكانة التي تمتع بها آباؤه وحلفاؤهم الصابئون، للاقتناع بأنه كان فعلاً وريث سلالة مهمّة. ولقد فرغنا للتوّ، في الفصل السابق من هذا المجلَّد، من تناول بعض أعمال جَدِّه، ثابت بن قرّة، الذي شجّع ابنه سنان، والد إبراهيم، على متابعة التعمّق في مهنة الطبّ؛ وقد تفوّق سنان في هذا المجال حتّى أنه أصبح طبيباً لثلاثة خلفاء توالوا على السلطة (المقتدر، والقاهر، والراضي)، وكان وفقاً لما ذكره القِفطي "رئيساً على الأطباء". وبالإضافة إلى شهرته كطبيب عظيم الشأن، كان سنان أيضاً من علماء الهندسة، إذ اقترن اسمه بعدة رسائل في الرياضيّات، منها واحدة مهداة إلى الملك البوَيهيّ عضد الدولة، تناولت المضلّعات المحاطة والمحيطة. ولقد سار ابنه، ثابت بن سنان، أخو إبراهيم، على خطى والده وحلّ مكانه لدى الخليفة الراضي واحتلّ منصب مدير مستشفى

---

[١] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدد (طهران، ١٩٧١) ص ٣٣٢ ؛ القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق *J. Lippert* (*Leipzig,1903*)، ص. ٥٧-٥٩ ؛ ابن أبي أُصَيبِعة " مولده في سنة ست وتسعين ومئتين، وكانت وفاته في يوم الأحد النصف من المحرم سنة خمس وثلاثين وثلاثمئة ببغداد، وكانت العلة التي مات فيها ورم في كبده" ["عيون الأنباء في طبقة الأطباء"، تحقيق A. Müller ، ثلاثة مجلدات (القاهرة/ *Königsberg* ، ١٨٨٢-٨٤) المجلد الأوّل، ص. ٢٢٦، ٢٩-٣٢ ؛ نشرة ن. رضا(بيروت، ١٩٦٥) ص. ٣٠٧، ١٤- ١٧].

ومن جهة أخرى، وكما سنرى لاحقاً، توجد السيرة الذاتيّة لإبراهيم بن سنان، في مخطوطة ضمن المجموعة رقم 2519 من مكتبة خودا بَخش - انظر لاحقاً. ولكنَّ أوراق النصّ فيها مبعثرة. وقد لاحظ أ. سعيدان هذا الأمر وقام بترتيب الأوراق. انظر مقالة ج. صليبا ذات العنوان "رسائل البيروني وابن سنان" في مجلة "الثقافة الإسلاميّة" *Islamic Culture*، العدد ٣٤، (١٩٦٠)، ص. ١٧٣-١٧٥. وقام ج. صليبا، عام ١٩٨١، بتحقيق نقديّ لهذا النصّ، تحت العنوان: "رسالة إبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرّة في المعاني التي استخرجها في الهندسة والنجوم" في:
Studia Arabica & Islamica, Festschrift for Ihsān ʿAbbās, ed. Wadād al-Qāḍī, American University of Beirut (1981), pp. 195-203. وقام أ. سعيدان بتحقيق للنصّ نفسه في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان" (الكويت، ١٩٨٣)، ص. ٢٣-٣٠.
انظر أيضاً ص. ٦-٨، في: *R. Rashed et H. Bellosta, Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*

بغداد. وكان ثابت بن سنان أيضاً مؤرِّخاً، وضع كتاباً تمتع بشهرة واسِعة[٢]. وابن أخت ثابت وإبراهيم، هو الأديب المشهور هلال بن المحسن الصابئ.

هذه الأسماء وهذه الألقاب تُسهِم في تكوين فكرة وافية عن تلك الأرستقراطيّة الثقافيّة والاجتماعيّة التي كانت ناشطة في بلاطات السلطة، كما كانت ناشطة في الأوساط الراقية للعلوم والطب. في هذه الأجواء أبصر إبراهيم النور وكبُر قبل أن يتعرّض لاضطهاد عابر أشار هو نفسه إليه[٣].

كان إبراهيم بن سنان، أيضاً، وريثاً لحقبة تاريخية. فهو ينتمي إلى جيل توفّرت لديه إمكانيّات لم تنعم بمثلها الأجيال السابقة. إنه الجيل الرابع بعد بني موسى. ففي أيّامه كانت قد انتهت ترجمة النصوص الرياضية بمعظمها، وكان بنيان تقاليد البحث الرياضي قد تركز: فقد وُلد تقليد الجبريّين مع الخوارزمي وتواصل مع أبي كامل؛ وتكوَّن تقليد علماء الهندسة، كالجوهري والنيريزي وغيرهما...، الذين تابعوا أعمال أقليدس؛ وأخيرا كانت قد تراكمت كميّة هائلة من النتائج ضمن تقليد بني موسى، بفضل رياضيّين مثل ثابت بن قرة، كما تمّ فيه تصوُّر طرائق مبتكرة وأُعدّت فيه نظريات جديدة. كل هذه المكتسبات أتاحت لخلفاء هؤلاء الرياضيّين أن يذهبوا إلى أبعد ممّا وصلوا هم إليه، مسافة وعمقاً. يقع عمل إبراهيم بن سنان، ضمن هذا التقليد الذي يجمع بين هندسة أرشميدس وهندسة المساحة والهندسة التي تهتم بخواصّ المواضع، أي هندسة أبلونيوس. وقد استفاد إبراهيم بن سنان من أعمال علماء هذا التقليد، وعلى الأخص من أعمال جدّه ثابت بن قرّة، فطوّر دراسة التحويلات الهندسية وتطبيقاتها في القطوع المخروطية، وأيضاً في مساحة قِطَع من القِطْع المكافئ. ولقد عمّق نتائج أسلافه المتعلّقة بالرخامات الشمسية وتصوّر نظرية لفصيلة كاملة من هذه الآلات. وأخيرا دفعته تساؤلات أسلافه حول التحليل والتركيب، إلى كتابة أوّل مؤلَّف، يستحق هذا الاسم، في هذا الموضوع.

---

[٢] انظر: القفطي، "تاريخ الحكماء"، ص. ١١٠: "وعمل ثابت هذا كتاب التأريخ المشهور في الآفاق الذي ما كتب كتاب في التأريخ أكثر مما كتب، وهو من سنة نيِّف وتسعين ومئتين إلى حين وفاته في شهور سنة ثلاث وستّين وثلاثمئة وعليه ذيّل ابن أخته هلال بن المحسن بن إبراهيم".

[٣] انظر: سيرة ابن سنان في "رسالة إبراهيم بن سنان..." تحقيق ج. صليبا، صفحة ١٩٧. انظر أيضاً مقدمة كتابه "في حركة الشمس"، تحقيق سعيدان في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان" ، صفحة ٢٧٥ .

يتراءى لنا، في آن واحد، الوضعُ المفصليَّ لابن سنان وتأثيرُه المُحتمَل. فقد كشف هذا الوريث، بنظرة ثاقبة، مجالات تنتمي إلى رياضيات متقدّمة عن رياضيّات عصره. وهكذا قدَّم في هذه المجالات مواضيع اجتذبت نشاطات متميزة لخلفائه الأكثر شهرة كابن الهيثم، الذي أتى بعده بنصف قرن، ولا يمكن فهم العديد من أعماله دون أبحاث ابن سنان. وذلك أنَّ ابن الهيثم، لمتابعة عمل هذا الأخير ولنقده أيضاً، ألّف كتابه المهمّ "في خطوط الساعات"[٤]، كما ألف كتابه "في التحليل والتركيب"[٥]، الذي لا يقل أهميّة عن الكتاب الأوَّل.

ولقد كنّا نأمل بالحصول على معلومات وافرة عن حياة وأعمال هذا الرياضي الرفيع المستوى الذي كان أحد هؤلاء الذين أبكروا في إبداعهم كما أبكرت يد القدر في اختطافهم. ولكننا اعتدنا على عدم استغراب مثل هذه الضآلة في المعلومات التي اعتدنا عليها، على سبيل المثال لا الحصر، في حالتي ابن سهل وشرف الدين الطوسي. ونستطيع القول بأنّ حالة إبراهيم بن سنان أفضل من غيرها، إذ خصّص له النديم نبذة كان من المفترض أن تكون أكثر إسهاباً، كما خصّص له ابن أبي أُصَيبِعة مثل النديم ثلاثة سطور. ولم يقدِّم القِفطي معلومات كثيرة، ولكنه استند إلى سيرة ذاتيّة مختصرة لابن سنان، لخّصها القِفطي بطريقة غير مُرضية. ولقد وصلت إلينا هذه السيرة الذاتية، لحسن الحظ.

يُفهَم من ابن سنان أنه كتب سيرته الذاتيّة تلك بعد أن تجاوز السنة الخامسة والعشرين من عمره، بعد سنة ٩٣٤ للميلاد. وقد بقي شديد التكتم على حياته الشخصية. ولمّح بغير وضوح إلى حقبة تعرّض خلالها للاضطهاد[٦]، بدون أن يحدِّد الفترة الزمنية أو الأسباب التي دعت إلى ذلك، رغم إمكانية الافتراض بأنّ هذا الاضطهاد كان ذا صِلة بمحيطه السياسي. وقد صرّح أنه يقصد من كتابة هذه السيرة أن يحصي مؤلَّفاته حتى هذا التاريخ، وشرح الأسباب التي دعته إلى كتابتها، وأهدافه من وراء ذلك، بحيث لا تُنسب إليه مؤلَّفات لم يكتبها، ولا أن يدّعي أحدٌ بأنه كاتب أحد مؤلَّفاته. ولقد وصلت إلينا جميع هذه المؤلَّفات، باستثناء مؤلَّف واحد، مهمّ حسب تعبير المؤلَّف نفسه، يعالج موضوع الدوائر المتماسّة. لكنّ النديم، في

[٤] انظر: المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٤٥٤- ٤٥٩.

[٥] انظر: R. Rached, « La philosophie mathématique d’Ibn al-Haytham. I : l’analyse et la synthèse », *M.I.D.E.O.*, 20 (1991)، ص. ٣١-٢٣١.

[٦] راجع الحاشية ٣.

السيرة التي أوردها عن ابن سنان، يذكر عنوانين لكتابين لم يشر إليهما ابن سنان في سيرته الذاتيّة: كتاب "ما وجد من تفسيره للمقالة الأولى من المخروطات" وكتاب "أغراض كتاب المجسطي"[٧]. وقد وُجدت أخيراً "رسالة في الإسطرلاب" تحمل اسم المؤلِّف ابن سنان لا تُوجَد على أيّة لائحة معروفة لمؤلَّفاته ولم تثبت نسبتها إليه حتى الآن. ولم يصل إلينا كتاباه اللذان ذكرهما النديم؛ فقد يكون ابن سنان قد ألّفهما بعد كتابة سيرته الذاتيّة أو قد تكون نسبتهما إليه غير صحيحة. ولا نظنّ أنّ باستطاعة أحد حسمَ هذا الأمر.

يظهر من السيرة الذاتية لابن سنان ما قيل دائماً عنه، أو على الأقل ما قاله النديم: "كان فاضلاً في علم الهندسة مقدماً فيها لم يُرَ في زمانه أذكى منه". بدأ أبحاثه، حسب قوله، وهو في الخامسة عشرة؛ وفي السادسة أو السابعة عشرة، ألّف الصِيغة الأولى من كتابه "في آلات الأظلال" الذي راجعه في الخامسة والعشرين من عُمره. يقول في هذا الكتاب:

"والذي بيّنته فيه أمر الرخامات كلّها. وذلك أني جمعت جميع أعمال الرخامات، التي بسائطها مسطحة، إلى عمل واحد يعمّها؛ وأقمت عليه البرهان مع أشياء بيّنتها... "[٨].

وبعد عام، أي في الثامنة عشرة من عُمره، ناقش وانتقد أقوال بطلميوس في الرسالة "في استخراج اختلافات زحل والمريخ والمشتري"؛ ثمّ عاد وأكملَها بعد ستة أعوام، وهو في الرابعة والعشرين من عمره. وألّف ابن سنان في الهندسة، كتابه "في الدوائر المتماسّة" وكتابه "في التحليل والتركيب" وكتابه في "المسائل المختارة" وكتابه "في مساحة القطع المكافئ" وكتابه "في رسم القطوع الثلاثة". لقد كتب كل هذه المؤلَّفات قبل بلوغه الخامسة والعشرين، وراجعها كلّها قبل ذلك التاريخ.

وتسمح لنا هذه السيرة الذاتية، أيضاً، بترتيب مؤلَّفات ابن سنان، بعضها بالنسبة إلى البعض الآخَر، وبإظهار المعايير التي تتبَعها. ولقد وضَّح ابن سنان، لكلّ واحد من هذه المؤلَّفات الأهدافَ المقصودة منه وامتداداته، والمكان الذي يحتلّه ضمن مجموعة مؤلَّفاته. أمّا بالنسبة إلى

---

[٧] انظر: النديم، الفهرست، ص.٣٣٢

[٨] انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*، ص. ٩، ١٤-١٦.

المعايير التي تتبعها هذه المؤلَّفات، فلا يمكننا إلّا أن نلاحظ التمسّك بـِ "النقد" الذي بُنيَ على شكل قيمة إيجابية مُعترَف بها، وكان يُمارَس منهجيّاً وفي كلّ الاتجاهات. فقد خضعت لهذا النقد أعمال القدماء، مثل بطليموس، ولم تُستبعَد منه أعمال المُحدَثين، مثل الماهاني. ومن ناحية أخرى، لم تعد الدقة المعيارَ الوحيد للبرهان، في ذلك العصر وخاصّةً مع ابن سنان، بل بات ينبغي، أيضاً، البحث عن الأناقة التي أصبحت ضمن الحوافز لتجديد البحث. وقد اهتمَّ ابن سنان، منذ بداية مسيرته الرياضيّة، بالمسائل النظرية للبرهان، كما أنَّ قسماً كبيراً من مؤلَّفاته يتَّصل بما يمكن تسميته بنظرية البرهان. وهذا ما يفسِّر، جزئياً على الأقل، الاهتمام الذي أبداه بشكل دائم بموضوع التحليل والتركيب. أمّا رغبته في البساطة والأناقة فهي كافية، بوضوح، لإعادة برهان قضيّةٍ من القضايا، وإن كان برهانها قد سبق أن تمّ بشكل صحيح.

إنّ هذا السياق هو الذي يلقي الضوء على المؤلَّف الوحيد الذي كتبه ابن سنان في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، ويُبرِز سمات هذا المؤلَّف، ويُعطي المعنى لدوافع ابن سنان. فلنقرأ ما كتبه بخصوص هذا الكتاب "في مساحة القطع المكافئ":

"وعملت كتابًا في مساحة القطع المكافئ، في مقالة مفردة. كان جدّي استخرجَ مساحة هذا القطع . فعرّفني بعضُ أهل هذا العصر من المهندسين أن للماهاني في ذلك عملاً أوقفني عليه أسهل من عمل جدّي .فلم أحبّ أن يكون للماهاني عمل تقدّم على عمل جدّي ولا يوجد فينا من يزيد عليه فيما عمله .وكان جدّي استخرج ذلك في عشرين شكلاً، وقدّم له مقدّمات عددية كثيرة من جملة العشرين شكلاً، وتبين له أمر مساحة القطع بطريق الخُلف. وقدّم أيضًا الماهاني مقدّمات عددية لما بيّنه، ثم برهن بطريق الخُلْف ما أراده في خمسة أشكال أو ستة فيها طول. فاستخرجت ذلك في ثلاثة أشكال هندسية لم أقدّم لها مقدّمة عددية، وبيّنت مساحة القطع نفسه بطريق البرهان المستقيم ولم أحتج إلى طريق الخلف"[٩].

هذه الأقوال التي تُعبِّر عن فخره كوريث وعن قناعات عالم خارج عن المألوف، تعكس المعايير التي يعتمدها ابن سنان الرياضيّ: إيجاز، وسهولة وأناقة. وقد اعتمد ابن سنان هذه المعايير الخصبة والخلاّقة في مؤلَّفاته بالذات، حيث أعاد كتابة عدد منها من أجل تهذيب براهينها.

[٩] انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*، ص. ١٩، ١-١٠.

٣-١-٢ كتابتـان من نص كتاب "في مساحة القطع المكافئ": النصوص والترجمات

يكتب ابن سنان في مقدمة كتابه "في مساحة القطع المكافئ":

"قد كنت عملت كتاباً في مساحة هذا القطع قديماً، وغيّرت في شكلٍ منه شيئاً؛ ثمّ ضاعت النسخة المصلحة والنسخة القديمة؛ فاحتجت إلى إعادة ما استخرجته من ذلك في هذا الكتاب"[١٠].

اعتماداً على هذا القول لابن سنان نفسه، استخلص المؤرّخون وكتاب السِيَر المحدثين بأن كلّ المخطوطات التي وصلت إلينا من هذا الكتاب صادرة عن نفس الكتابة الوحيدة، أي الكتابة الأخيرة. ولكن الحقيقة هي غير ذلك.

فنحن نعلم من سيرته الذاتية، أنَّ ابن سنان أخضع مؤلَّفاته الشخصية ذاتها للتفحُّص النقدي، وقام بمراجعتها كلها قبل بلوغه الخامسة والعشرين، أي قبل سنة ٣١٢هـ-٩٣٤م. فلنقرأ ما كتب بهذا الخصوص:

"وكان تصحيحي ما بقي من كتبي هذه (ومنها يوجد كتاب مساحة القطع المكافئ) ممّا لم أتقدَّم فأصحِّحه في وقت تأليفه، في السنة الخامسة والعشرين من عمري"[١١].

وهذا يعني أنه كانت توجد عام٣٢١هـ -٩٣٤م كتابتان من نصّ "كتاب في مساحة القطع المكافئ": الأولى هي كتابته الأصليّة أو المُعدّلة التي كانت ضائعة؛ والكتابة النهائيّة التي كان ينبغي أن تحلّ محلها. ولكنَّ هذه الكتابة الضائعة بالتحديد هي التي وصلت إلينا، مما جعل من الممكن متابعة تطور الأفكار والتقنيّات الرياضيّة لدى ابن سنان، وهذا ما لم يكن بالإمكان تصوّره قبل ذلك.

إنّ دراسة التقاليد المخطوطيّة لا تسمح بالعثور على كتابة ابن سنان الضائعة فحسب، بل إنها تـُبيِّن أيضاً أنّ هذه الكتابة لم تكن مجهولة لدى قدماء النسّاخ. نُذكِّر بهذا الصدد بنتيجة توصَّلنا إليها لدى تفحّص المخطوطة رقم ٤٨٣٢ من مجموعة آيا صوفيا في إسطنبول[١٢]: هذه المخطوطة لها نفس الأصل للمخطوطة التي نسَخَها مصطفى صدقي عام

---

[١٠] راجع ص. ٥١٠.
[١١] انظر: R. Rashed et H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*، ص. ١٩، ٢٠-٢٣.
[١٢] انظر الفصل الثاني، المقطع ٢- ١- ٣.

١١٥٩هـ/١٧٤٦-١٧٤٧م، أي مخطوطة رياضة ٤٠ من دار الكتب في القاهرة. ولكننا نقرأ في هامش رسالة ابن سنان في الورقة الأولى (الورقة ٧٨ظ):

"كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثمَّ ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتاباً آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها."

يمكننا قراءة هذا التعليق حَرفيّاً في هامش الورقة ١٨٢ظ، بخط مصطفى صدقي، مقابل كتابة لابن سنان حول مساحة القطع المكافئ. وهذا يدلّ على أنّ هذا التعليق الموجود في المخطوطتين كان مكتوباً في أصل مشتَرَك لهما، يعود على الأرجح إلى ما قبل القرن الخامس الهجري، وعلى التأكيد قبل القرن السادس، كما بيّنّا. إذاً، من الواضح أنَّ ناسخ هذا النصّ المشترك كان يدرك أنَّ النصَّ الذي نسخه هو النصُّ الذي أضاعه ابن سنان. وقد برهن التحقيقُ النقدي لهذه المخطوطة وتحليلُها أنّ هذا النصّ هو نصّ الكتابة الضائعة، وليس نصّاً مُحوّراً من الكتابة الثانية.

وهكذا، تتوزَّع المخطوطات الموجودة لدينا، وهي المخطوطات المعروفة حتى اليوم، في مجموعتين: اثنتان منها تنقل إلينا نصّ الكتابة المفقودة، وثلاث منها تنقل نصّ الكتابة النهائية. ولقد سبق أن ذكرنا الكتابتين الأوليَيْن ووصفناهما: آيا صوفيا ٤٨٣٢ الأوراق ٧٦ظ – ٧٩و ونرمز إليها بالحرف [أ]؛ ودار الكتب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٢ظ – ١٨٦ظ ونرمز إليها بالحرف [ق]. ونُلاحظ أيضاً أن نصَّ ابن سنان وصل إلينا في مخطوطة دمشق ٥٦٤٨، على الأوراق ١٥٩-١٦٥، وهذه المخطوطة هي نسخة حديثة عن مخطوطة القاهرة، رياضة ٤٠، وعنها فقط؛ فلن نأخذ هذه النسخة بعين الاعتبار في تحقيق نصّ ابن سنان. لنلاحظ ببساطة أن المخطوطة [أ] التي نُسِخت قبل الصِيغة [ق] بخمسة قرون، تحتوي، مقارنة بالأخيرة، على نواقص هي: جملة [٦٩٩، ٢] وخمس كلمات [٦٩٧، ١٤؛ ٦٩٩، ١٧؛ ٧٠٣، ٢٠؛ ٧٠٥، ٢٠ و٧٠٩، ١٨]. وتؤكّد النواقص المشتركة، كما تؤكّد نصوصٌ أخرى، النتائجَ التي سبق أن أثبتناها فيما يتعلق بالنّسب بين هاتين المخطوطتين.

أمّا الكتابة الثانية والأخيرة من رسالة ابن سنان فقد وصلت إلينا عبر المخطوطات التالية:

١- المخطوطة ٢٤٥٧ من المكتبة الوطنية في باريس، نَسَخَها السجزي عام ٣٥٨هـ/ ٩٦٧-٩٦٨م في شيراز، على الأوراق ١٣٤ظ – ١٣٦و. وقد سبق أن ذكرنا هذه المجموعة المشهورة[١٣]؛ إلاّ أنّنا نضيف هنا، فيما يتعلق بهذا النصّ إشارة إلى أمرٍ خاصٍّ مهمٍّ هو أنّ السجزي، بعد نسخه لرسالة ابن سنان، قام بمقارنتها بمخطوطة أخرى مختلفة عن النسخة التي نسخ عنها، واعتنى بالإشارة إلى الاختلافات بينهما بلون مختلف؛ فكتب المخطوطة بالحبر الأسود، بينما كتب هذه الاختلافات بالحبر الأحمر. فباستثناء كلمة واحدة –هي "أنّه"- ورقة ١٣٥ظ، التي أوردها بالحبر الأسود، مضافة في الهامش بلا شك أثناء النسخ، كانت كل التعليقات الأخرى بالحبر الأحمر. وبالحبر الأحمر نفسه أنهى السجزي نسخته ووضع الجملة الختاميّة، التي يقول فيها بكل وضوح بأنه قابل نسخته مع نسخة مختلفة عن النسخة التي نقل عنها. وهكذا يوجد ما يقارب الأربعين تعليقاً بالحبر الأحمر في الهامش، والأربعين أيضاً بالحبر نفسه فوق الكلمات أو تحتها. وكان السجزي يُضيف أحياناً، بعض الحركات على الأحرف بالحبر الأحمر. وتتكوّن هذه الإضافات استناداً إلى النسخة المختلفة عن النسخة التي نقل عنها من إحدى عشرة جملة وعشر كلمات. ونرمز إلى هذه المخطوطة بالرمز [ب] وإلى النسخة التي نقل السجزي عنها بالرمز [س١] وإلى النسخة الأخرى بالرمز[س٢].

٢) المخطوطة رقم ٤٦١ من المكتب الهندي (*India Office, Loth 767*) ، الأوراق ١٩١- ١٩٧، التي وصفناها في مكان آخر[١٤]. هذه المخطوطة، التي نُسِخت بخط النستعليق سنة ١١٩٨هـ/١٧٨٤م عن نسخة كانت موجودة في الهند، لا تحتوي على إضافات أو ملاحظات هامشية. نرمز إلى هذه المخطوطة بالحرف [ل].

٣) المخطوطة الثالثة ونرمز إليها بـالحرف [خ] توجد ضِمن المجموعة ٢٥١٩ من مكتبة خودا بَخش (باتنا الهند) [١٥]. وتشمل هذه المجموعة المهمّة ٤٢ كتاباً لأرشميدس، والقوهي

---

[١٣] انظر الفصل الثاني، المقطع ٢-١-٣.

[١٤] انظر:

R . Rasched, *sharaf al-Dīn al-Tūsī, Œuvres mathématiques. Algèbre et géométrie au XII^{e} siècle* (Paris 1986), المجلد الأوَّل ص. XLVI-XLIII.

[١٥] وهي تقابل المخطوطة ذات الرقم ٢٤٦٨ من الفهرس التالي:

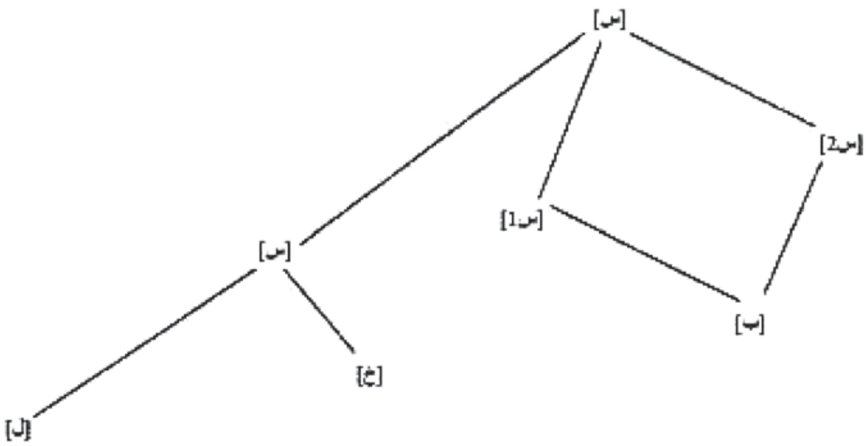
Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Librairy at Bankipore, volume XXII (Arabic MMS.) Science, prepared by Maulavi Abdul Hamid (Patna, 1937)

راجع الصفحات ٦٠-٩٢.

وابن عراق والنيريزي وآخرين. هذه المخطوطة، هي مجموعة من ٣٢٧ ورقة (٣٢ سطراً في الصفحة بقياس ٢٤×١٥ والنصّ بقياس ٢٠×١٢،٥)، نـُسِخت عام ٦٣١-٦٣٢ للهجرة أي ١٢٣٤-١٢٣٥ للميلاد، في الموصل، بالخط النسخي. نص ابن سنان موجود على الأوراق ١٣٢ظ – ١٣٤و، ولا تشتمل على زيادات أو ملاحظات هامشية.

لنقارن الآن بين المخطوطات. نلاحظ أن [ب] ينقصها جملة [٧١٩، ١١-١٢] –وهي في الواقع قفزة من سطر إلى آخر بسبب تشابه الكلمات– كما أنَّ فيها ثلاثة عشر نقصاً لكلمة واحدة [٧١٩، ١٠؛ ٧٢٣، ٥ و١١(مرتين)؛ ٧٢٥، ١١؛ ٧٢٧، ١٧، ١٩، ٢٠؛ ٧٢٩، ٢، ٨؛ ٧٣١، ٥، ٨؛ ٧٣٣، ٥]. وبالمقابل لا يوجد أي نقص مشترك بينها وبين [خ] أو بينها وبين [ل]، باستثناء كلمة واحدة هي كلمة "نسبة"، وهو نقص غير ذي أهمّيّة. وتؤكّد دراسة الأخطاء هذه النتيجة. لذا فإنّ [ب] تنتمي إلى تقليد مخطوطيّ مستقلّ عن كل من تقليدَيْ [خ] و[ل]. ونُذَكِّر بأنّ المخطوطة [ب] نفسها مُتحَدِّرة من تركيب بين تقليدين. تتضمَّن المخطوطة [خ] خمسة نواقص فقط، لكلمة واحدة [٧١٩، ٦: "أو"]، [٧٢١، ١: "ضرب"]، [٧٢٧، ٢٠: "ما"]، [٧٣١، ٣: "المتبادلتين"]، [٧٣٥،١: "أن"]. وتوجد فيها جملتان مكرَّرتان [٧٢٣، ٥] و [٧٢٧، ١٩-٢٠] . وباستثناء كلمة "المتبادلتين"، نرى أنّ النواقص الأخرى غير ذات أهميّة، إذ إن أيّ نسّاخ ملمٍّ بالعربية يمكنه إصلاحها بسهولة.

نُشير أخيراً إلى أنَّ المخطوطة [ل] تحتوي بذاتها على ستة نواقص، هي جمل قصيرة من كلمتين أو ثلاث كلمات: [٧٢١، ٨، ٩، ١٠-١١؛ ٧٢٥، ١٠؛ ٧٣١، ١١، ١٩] وأربعة نواقص لكلمة واحدة: [٧٢١، ٣؛ ٧٢٧، ٣ و١٦؛ ٧٣١، ١٧]. يبقى أننا نجد في [ل] كلمة "المتبادلتين" التي تنقص في [خ]، وبالتالي لا يمكن أن تكون [ل] مُتحَدِّرة منها مباشرة. ولكن، على كل حال، يبدو الارتباط بين [ل] و [خ] قويّاً جدّاً. إنّ دراسة الأخطاء والحوادث الأخرى تسمح لنا باقتراح الشجرة التالية للتسلسل المخطوطيّ:



لنتوقف ختاماً عند تحقيقات كتابتَـيْ رسالة ابن سنان وترجماتهما.

كما سبق وقلنا، لم يُمَيِّز بين هاتين الكتابتين، قطُّ، أيٌّ من المؤرِّخين أو كُتّاب السِيَر. ومن ناحية أخرى، لا يوجد أيّ تحقيق للكتابة الأولى. أمّا الكتابة الثانية، فلم يتم أي تحقيق نقدي لها حتى الآن، بل صدر تحقيقان غير نقديين للمخطوطة [خ]؛ الأوَّل سنة ١٩٤٧: بعنوان "**رسائل ابن سنان**"، قام به ونشره مكتب المنشورات الشرقية العثمانية (حيدر آباد، الدَّكَن، ١٩٤٨)؛ والتحقيق الثاني نشره أ. س. سعيدان في كتاب "أعمال إبراهيم بن سنان" (الكويت ١٩٨٩)، ص. ٥٧-٦٥.

أما فيما يخصّ الترجمات، فنذكر أنّ هناك ترجمة قام بها هـ. سوتر:

H.Suter « Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit »,

في

Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Herausgegeben von Hans Schinz, 63 (Zürich, 1918),

ص. ٢١٤- ٢١٨، استناداً إلى المخطوطة [ب] فقط.

٣-٢ الشرح الرياضي

لمتابعة تطوّر فكر ابن سنان بخصوص مساحة القطع المكافئ، سنتفحّص، في آن معاً، الكتابَتيْن في سبيل مقارنتهما. الكتابة الأولى، وهي الأقدم، مؤلَّفة من ثلاث قضايا. وهذه القضايا الثلاث موجودة في الكتابة الجديدة التي تتضمَّن أيضاً لازمة للقضيّة الأخيرة.

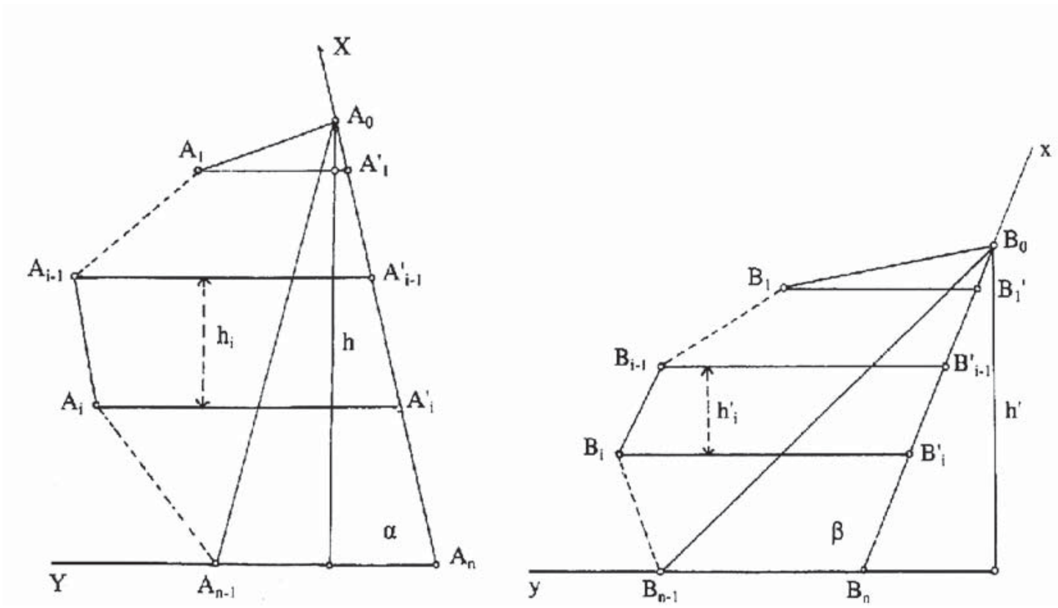
القضيّة ١ – لنأخذ مضلّعين محدّبين $A=(A_0,A_1,...,A_n)$ و $B=(B_0,B_1,...,B_n)$. لنسقط النقاط A_1، A_2، ...، A_{n-1} على A_0A_n، على موازاة $A_{n-1}A_n$، في النقاط A'_1، A'_2، ...، $A_n=A'_{n-1}$ و النقاط B_1، B_2، ...، B_{n-1} على B_0B_n، على موازاة $B_{n-1}B_n$، في النقاط B'_1، B'_2، ...، $B_n=B'_{n-1}$. إذا كان لدينا: $\frac{A_0A'_1}{B_0B'_1}=...=\frac{A'_{n-2}A_n}{B'_{n-2}B_n}=\lambda$،

و $\frac{A_1A'_1}{B_1B'_1}=...=\frac{A_{n-1}A_n}{B_{n-1}B_n}=\mu$، يكون $\frac{\text{tr.}(A_0,A_{n-1},A_n)}{\text{p.}(A_0,A_1,...,A_n)}=\frac{\text{tr.}(B_0,B_{n-1},B_n)}{\text{p.}(B_0,B_1,...,B_n)}$.

(حيث نرمز، الآن ولاحقاً، بِـ *tr.(M)* إلى مساحة المثلّث *M* وبِـ *p(U)* إلى مساحة المُضَلَّع *U* وبِـ *tp(U)* إلى مساحة المربَّع المنحرِف *U*).

ليكن h و h' الارتفاعين على التوالي في المثلثين (A_0,A_{n-1},A_n) و (B_0,B_{n-1},B_n)؛ وليكن h_1 و h'_1 الارتفاعين في المثلثين (A_0,A_1,A'_1) و (B_0,B_1,B'_1)، و h_i و h'_i الارتفاعين في المربَّعَيْن المُنحَرِفيْن $(A_{i-1},A'_{i-1},A'_i,A_i)$ و $(B_{i-1},B'_{i-1},B'_i,B_i)$ لكلّ i مع $2\le i\le n-1$. يكون لدينا:

$$s=\text{tr.}(A_0,A_{n-1},A_n)=\frac{1}{2}h\cdot A_{n-1}A_n\text{،}\quad s_1=\text{tr.}(A_0,A_1,A'_1)=\frac{1}{2}h_1\cdot A_1A'_1\text{،}$$



$s_i = \text{tp.}\left(A_{i-1}, A'_{i-1}, A'_i, A_i\right) = \frac{1}{2} h_i \cdot \left(A_{i-1}A'_{i-1} + A_i A'_i\right)$ ، $S = \text{p.}\left(A_0, A_1, ..., A_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} s_i$ ،

$s' = \text{tr.}\left(B_0, B_{n-1}, B_n\right) = \frac{1}{2} h' \cdot B_{n-1}B_n$ ، $s'_1 = \text{tr.}\left(B_0, B_1, B'_1\right) = \frac{1}{2} h'_1 \cdot B_1 B'_1$ ،

$s'_i = \text{tp.}\left(B_{i-1}, B'_{i-1}, B'_i, B_i\right) = \frac{1}{2} h'_i \cdot \left(B_{i-1}B'_{i-1} + B_i B'_i\right)$ ، $S' = \text{p.}\left(B_0, B_1, ..., B_n\right) = \sum_{i=1}^{n-1} s'_i$.

لكن، وبناءً على الفرضيّات، يكون لدينا من جهة:

$$\frac{A_1 A'_1}{B_1 B'_1} = \frac{A_{i-1}A'_{i-1} + A_i A'_i}{B_{i-1}B'_{i-1} + B_i B'_i} = \mu \text{ ، } \quad \left(2 \le i \le n-1\right)$$

ومن جهةٍ أخرى: $h_i = A'_{i-1}A'_i \sin\alpha$ ، $h'_i = B'_{i-1}B'_i \sin\beta$ ، فيكون إذاً:

$$\frac{h_1}{h'} = \frac{h_i}{h'_i} = \lambda \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} \text{ ، } \quad \left(1 \le i \le n-1\right)$$

ونستنتج من ذلك أنَّ: $\frac{s}{s'} = \frac{s_1}{s'_1} = ... = \frac{s_i}{s'_i} = ... = \frac{s_{n-1}}{s'_{n-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} s_i}{\sum_{i=1}^{n-1} s'_i} = \frac{S}{S'} = \lambda\mu \frac{\sin\alpha}{\sin\beta}$ ،

ومن هنا نحصل على النتيجة التي أعلنها ابن سنان: $\frac{s}{S} = \frac{s'}{S'}$.

<ins>مقارنة الكتابتين:</ins>

يشرح ابن سنان، بشكلٍ مفصّل، في الكتابة الأولى التي تحتوي على أربعة أشكال، بناءَ المضلّعين المذكورين انطلاقاً من تقسيمَين متشابهَين كالتقسيمَين $(A_0, A'_1, ..., A'_i, ..., A_n)$ و $(B_0, B'_1, ..., B'_i, ..., B_n)$. وهذا البناء المفصّل لا يَظهر في الكتابة الثانية التي تحتوي على شكلٍ واحد فقط. يرتكز الاستدلال في الكتابتين على افتراض أنَّ $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$ و $\beta \neq \frac{\pi}{2}$. لكنه يبقى صحيحاً أيضاً، إذا كانت الزاويتان α و β قائمتين.

يأخذ ابن سنان، في الكتابة الأولى، لينهي القضيّة، الحالتين الخاصّتين حيث يكون $\alpha = \frac{\pi}{2}$ و $\beta = \frac{\pi}{2}$ ويشرح أن المستقيمين A_0A_n و B_0B_n وأجزاءهما $A'_{i-1}A'_i$ و $B'_{i-1}B'_i$ تحلُّ في هذه الحالة، على التوالي، محلَّ الارتفاعات h و h'، و h_i و h'_i في المثلّثات والمربّعات المنحرفة المذكورة.

الحسابات في الكتابة الأخيرة، أسرع بكثير ممّا هي عليه في الكتابة الأولى. وذلك أنّ المتساويات، على سبيل المثال، كالمتساوية التالية: $\frac{h}{h_i} = \frac{A_0A_n}{A'_{i-1}A'_i}$، تُستنتَج مباشرةً من توازي الخطوط المستقيمة، بينما نحصل على هذه المتساويات في الكتابة الأولى بواسطة المثلّثات المتشابهة.

في الكتابتين، يستخدم ابن سنان الفرضيّات على الشكل التالي:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2}, \ ..., \ \frac{a_{i-1}}{a_i} = \frac{b_{i-1}}{b_i}, \ ..., \ \frac{a_{n-1}}{a_n} = \frac{b_{n-1}}{b_n}$$

حيث $a_i = A'_{i-1}A'_i$، $b_i = B'_{i-1}B'_i$ لكلّ مؤشِّر i مع $1 \leq i \leq n-1$؛ ومع $(A'_0 = A_0)$ $(B'_0 = B_0)$.

في الكتابة الأخيرة، يستنتج ابن سنان بدون تعليل: $\frac{a_1}{a_{n-1}} = \frac{b_1}{b_{n-1}}$، بينما يحصل على هذه المساواة في الكتابة الأولى، بتركيب النسَب المعلومة تدريجيّاً. والاختلاف هنا شكليٌّ فقط.

لنلاحظ أنَّ ابن سنان يحصل، في الكتابتين، على النتائج الخاصَّة بالمساحات، على الشكل التالي: $\frac{s}{s_1}=\frac{s'}{s'_1}$، $\frac{s}{s_2}=\frac{s'}{s'_2}$، ...، $\frac{s}{s_i}=\frac{s'}{s'_i}$، ...، $\frac{s}{s_{n-1}}=\frac{s'}{s'_{n-1}}$.

وهو يستنتج مباشرةً، في الكتابة الأخيرة : $\frac{s}{s'}=\frac{s_1}{s'_1}=...=\frac{s_i}{s'_i}=...=\frac{s_{n-1}}{s'_{n-1}}=\frac{\sum_{i=1}^{n-1}s_i}{\sum_{i=1}^{n-1}s'_i}$.

يبدأ ابن سنان في الكتابة الأولى، بتحويل النسب في العبارة الأولى بواسطة التبديل.

يعمل ابن سنان، أخيراً، في الكتابتين، بواسطة التحويل النقطي T المحدّد في صيغة هذه القضيّة وتكون بموجبه صورةُ المضلّع $(B_0,B_1,...,B_n)$ مطابقة للمضلّع $(A_0,A_1,...,A_n)$. هذا التحويل، كما سنبرهن، هو تطبيق تآلفي.

لنأخذ، كمعلمَي إحداثيّات، كلّاً من xB_ny و XA_nY بحيث يكون $A_0\in A_nX$ و $B_0\in B_nx$، $A_{n-1}\in A_nY$ و $B_{n-1}\in B_ny$، ولتكن A_0، B_0، A_{n-1}، و B_{n-1} نقاط الوحدة على المحاور (أي التي تكون مسافاتها إلى أصل المَعلم مساوية لوحدة الطول)، فيكون لدينا:

$B_0(x_0=1;y_0=0)$، $B_{n-1}(x_{n-1}=0;y_{n-1}=1)$

$A_0(X_0=1;Y_0=0)$، $A_{n-1}(X_{n-1}=0;Y_{n-1}=1)$.

لكلِّ نقطة $B'_i(x_i;0)$ على B_nx ولنظيرتها $A'_i(X_i;0)$ على A_nX، لدينا، انطلاقاً من الفرضيّات: $\frac{A_nA'_i}{A_nA_0}=...=\frac{B_nB'_i}{B_nB_0}$، فيكون: $\frac{X_i}{X_0}=\frac{x_i}{x_0}$؛ وبالتالي يكون لدينا $X_i=x_i$.

وكذلك لكلِّ نقطة $B_i(x_i,y_i)$ ولنظيرتها $A_i(X_i,Y_i)$، يكون لدينا، أيضاً، الفرضيّة التالية: $\frac{A'_iA_i}{A_nA_{n-1}}=\frac{B'_iB_i}{B_nB_{n-1}}$، فيكون: $\frac{Y_i}{Y_{n-1}}=\frac{y_i}{y_{n-1}}$؛ وبالتالي يكون لدينا $Y_i=y_i$.

تكون إذاً إحداثيّات النقاط B_i حيث $(0\le i\le n)$ بالنسبة إلى معلم الإحداثيّات xB_ny هي نفسها إحداثيّات صُوَرِها المتتالية، أي النقاط A_i، بالنسبة إلى المعلم XA_nY. النقاط B_i والنقاط A_i هي إذاً متماثلة في التحويل T المحدّد انطلاقاً من معلمَي الإحداثيّات xB_ny و XA_nY، ويمكن لهذين المعلمَين أن يكونا في نفس السطح المستوي كما هي الحال هنا، أو في مستوِيَين مختلفين. التطبيق T هو، إذاً، تطبيق تآلفي تقابليّ، والنسبة k لمساحةٍ ما إلى

المساحة المماثلة لها لا تتعلق بالمساحة المختارة. وتحدَّد النسبة k، في المثال المدروس في كتاب ابن سنان، وفقاً للمعطيات:

$$k = \frac{s}{s'} = \frac{s_i}{s_i'} = \frac{S}{S'} = \lambda\mu\frac{\sin\alpha}{\sin\beta}.$$

في الحالة الخاصّة حيث يكون $\alpha = \beta$، يكون لدينا $k = \lambda\mu$، فتكون النسبة k حاصل ضرب النسبتين λ و μ لتآلفين (تمدّد أو تقلص). يمكننا إذاً اعتبار التحويل T مركباً من تـآلُفـيْن، مائليْن أو عموديَّيْن حسب كون الزاوية α قائمة أم لا، ومن إزاحة (أو حتى من تقايُس). وفي الحالة الخاصّة حيث يكون $\alpha = \beta$ و $\lambda = \mu$، يكون لدينا $k = \lambda^2$، ويكون التحويل T تشابهاً نسبته λ.

القضيّة ٢- نسبة مساحتـَي قِطعتيْن من قطع مكافئ*، تساوي نسبة مساحتـَي المثلثين المُرْفـَقيْن بهما.

لتكن ABC و DEG قطعتين من قطع مكافئ، ولتكن S و S'، مساحتيهما على التوالي ولتكن S_1 و S_1' مساحتي المثلثين P_1 و P'_1 المُرفـَقين بهاتين القِطعتين، نريد أن نبرهن أنّ:

$$\frac{S'}{S} = \frac{S_1'}{S_1}.$$

أقام ابن سنان برهانه بالخُلف مرتكزاً على المقدّمة التالية:

مقدّمة – إذا كانت النقطة M الرأس المُرفـَق بوترٍ ما BC من القطع المكافئ، عندئذٍ يكون لدينا: $\text{tr.}(BMC) > \frac{1}{2}\text{port.}(BMC)$.

حيث نرمز بـِ *port.(Q)* إلى مساحة القِطعة Q (من القطع المكافئ).

خطّ التماسّ عند M موازٍ لـِ BC، ويقطع القطر BH عند O ويقطع الخطّ المستقيم الموازي لـِ BH والمار بـِ C على النقطة S. يكون لدينا:

$$\text{tr.}(BMC) = \frac{1}{2}\text{aire}(BOSC)؛$$

(حيث نرمز بـِ *aire(U)* إلى مساحة شكل ما U مُغلـَق).

* القطعتان ليستا بالضرورة من قطع مكافئ واحِد بعينه (المترجِم).

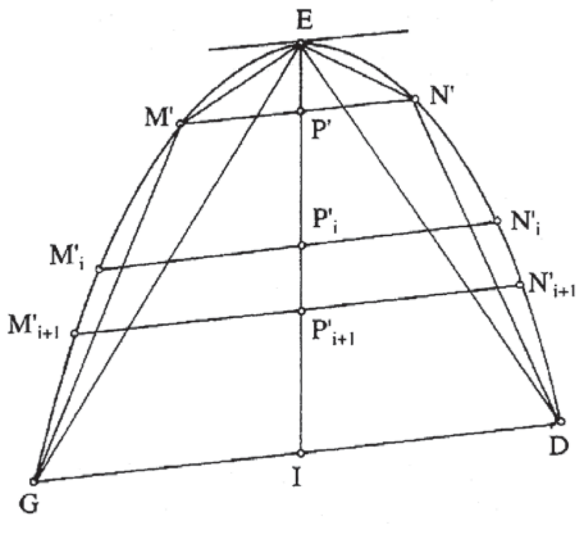
لكنّ $\text{aire}(BOSC) > \text{port.}(BMC)$ ، ومن هنا نحصل على النتيجة المطلوبة.

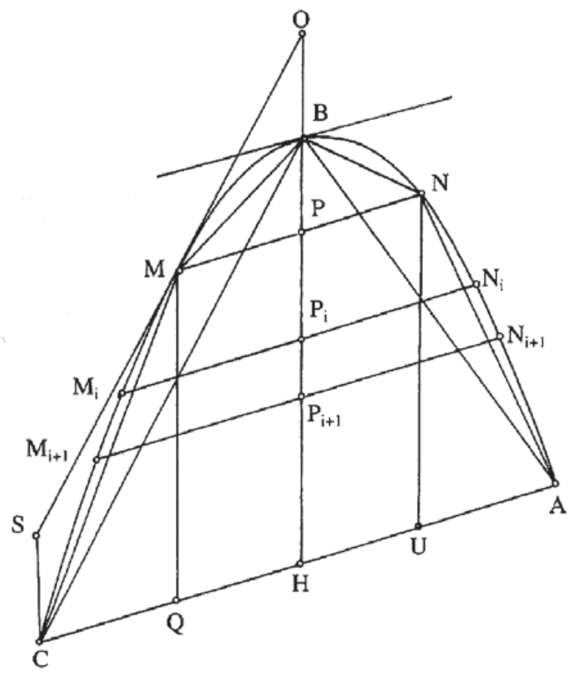
لنفترض إذاً أنّ: $\frac{S_1'}{S_1} \neq \frac{S'}{S}$.

<u>أوّلاً</u>: إذا كان لدينا $\frac{S_1'}{S_1} > \frac{S'}{S}$، فإنه توجد مساحة J بحيث يكون $\frac{S_1'}{S_1} = \frac{S'}{J}$؛ فيكون لدينا $J < S$ ونضع $S - J = \varepsilon$. فيكون: $S - S_1 \leq \varepsilon$ أو $S - S_1 > \varepsilon$.

إذا كان $S - S_1 \leq \varepsilon$، يكون $S - S_1 \leq S - J$، وبالتالي $S_1 \geq J$؛ وهذا غير ممكن لأنّ $\frac{S_1'}{S_1} = \frac{S'}{J}$ و $S_1' < S'$.

وإذا كان $S - S_1 > \varepsilon$، نَقسم كلّاً من HC و HA إلى نصفين في النقطتين Q و U على التوالي. ونـُرفِق بتقسيمة AC هذه إلى 2^2 أقسام متساوية، المضلعَ P_2 وهو (A, N, B, M, C) ومساحته S_2، وله $(2^2 + 1)$ رأساً. وبتكرار هذه العمليّة، نحصل على تقسيمات متتالية لـِ AC إلى 2^3، 2^4، ...، 2^n قسماً متساوياً. ونـُرفِق بهذه التقسيمات، على التوالي، المضلعات المحاطة: P_3 ذا المساحة S_3،...، P_n ذا المساحة S_n. ويكون للمضلع P_n $(2^n + 1)$ رأساً.





بناءً على المقدّمة السابقة، يكون لدينا: $S - S_1 < \frac{1}{2}S$ ، $S - S_2 < \frac{1}{2}(S - S_1) < \frac{1}{2^2}S$ ،...،

$S - S_n < \frac{1}{2}(S - S_{n-1}) < \frac{1}{2^n}S$ ؛ يكون إذاً لدينا لكلّ ε معلوم:

$$\exists N \in \mathbb{N}^*; \forall n \geq N,\ S - S_n < \varepsilon$$

أي $S - S_n < S - J$ ، فيكون: $S_n > J$.

ليكن P_n المُضلَّع الموافق لهذا العدد n. يكون خطّا الترتيب، لكلِّ رأسين من الرؤوس M_i و N_i مع $\left(0 \leq i \leq 2^{n-1}\right)$ ومع $B = M_0 = N_0$ ، و $C = M_{2^{n-1}}$ ، و $N_{2^{n-1}} = A$ ، متساويين، فتكون للنقطتين M_i و N_i نفس الإحداثيّة على BH. فإذا كان a الضلع القائم للقطع المكافئ، فإنّ الرؤوس $M_i\left(x_i, y_i\right)$ للمضلَّع P_n تحقق المعادلة $y_i^2 = ax_i$.

تـُوافق هذه الرؤوس تقسيمة للقطر BH في النقاط P_i ذات الإحداثية الأولى x_i، مع $x_0 = 0$ و $x_{2^{n-1}} = BH$. نُرفِق بتقسيمة BH هذه، تقسيمة لـِ EI مشابهة لها، حيث يكون EI قطر قطعة القَطع المكافئ الثانية، وذلك في النقاط P'_i ذات الإحداثيّة الأولى x'_i. يكون لدينا، إذاً:

$$\frac{x_i}{x'_i} = \frac{BH}{EI} = \lambda \qquad (1)$$

تحدّد النقطتان M'_i و N'_i من القطع المكافئ DEG، واللتان لهما إحداثيّة أولى مشتركة x'_i ، مضلعاً P'_n مساحته S'_n. إذا كان a' الضلع القائم لـِ DEG، فإنّ $\left(x'_i, y'_i\right)$، وهي إحداثيّتا M'_i، تحقق المعادلة $y'^2 = a'x'_i$. يكون لدينا:

$\frac{y_i^2}{y_i'^2} = \frac{ax_i}{a'x'_i} = \frac{a}{a'}\lambda$ ، فيكون، إذاً:

$$\frac{y_i}{y'_i} = \sqrt{\frac{a}{a'}\lambda} = \mu \qquad (2)$$

وفقاً للعلاقتين (1) و(2)، يحقق المضلّعان $(H,B,...,M_i,C)$ و$(H,B,...,N_i,A)$ والمضلّعان، المماثلان لهما على التوالي، $(I,E,...,M'_i,G)$ و $(I,E,...,N'_i,D)$ فرضيّات القضيّة ١؛ فنستخرج من ذلك: $\frac{S'_n}{S_n}=\frac{S'_1}{S_1}$، فيكون $\frac{S'_n}{S_n}=\frac{S'}{J}$؛

وهذا مستحيل لأنّ $S_n>J$ و $S'_n<S'$.

ثانياً: إذا كان لدينا $\frac{S'}{S}<\frac{S'_1}{S_1}$، توجد مساحة J' بحيث يكون $\frac{J'}{S}=\frac{S'_1}{S_1}$ مع $J'<S'$. فنبرهن بطريقة مماثلة أن هذا مستحيل.

من استحالة الحالتين $(\frac{S'}{S}>\frac{S'_1}{S_1})$، و $(\frac{S'}{S}<\frac{S'_1}{S_1})$ نستنتج أنّ $\frac{S'}{S}=\frac{S'_1}{S_1}$.

مقارنة بين الكتابتين

١- يتعلّق الاختلاف بين الكتابتين بوحدانيّة الإحداثيّات الأولى. وذلك لأنّ ابن سنان، في الكتابة القديمة(*)[١٦] ، يُرفِق بالنقطتين M و L اللتين لهما، من حيث بناؤهما، نفسُ خطّ الترتيب(الإحداثيّة الثانية)، إحداثيّتين مختلفتين IT و IV. ويُرفِق بالنقطتين T و V، المختلفتين على IG حسب الفرضية، النقطتين R و X المختلفتين على EH؛ وبعد ذلك يأخذ، بشكلٍ منفصل، المضلّعين (G,I,L,C) و (E,H,Q,A) من جهة، والمضلعين (G,I,M,D) و(E,H,J,B) من جهة أخرى، وهي مضلّعات تحقق فرضيّات القضيّة ١. ويستخرج من ذلك النتيجة الخاصّة بالمضلّعين (C,L,I,M,D) و (A,Q,H,I,B).

غير أنَّ إعطاءه إحداثيّتين مختلفتين للنقطتين M و L اللتين لهما نفس خطّ الترتيب، لم يكن له تأثير في دقّة البرهان. إنَّ وحدانيّة هذه الإحداثيّة تنتج من القضيّة العشرين من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس. لم يفكر ابن سنان بهذا لدى كتابته الأولى، بالرغم من معرفته العميقة بمؤلَّف "المخروطات".

إلّا أنَّ ابن سنان يبرهن، في كتابته الأخيرة، أنَّ النقطتين M و N اللتين لهما، وفق الفرضيّة، خطّا ترتيب متساويين $HQ=HU$، يكون لهما نفس الإحداثية الأولى وهي BP.

[١٦] انظر ضمن الملاحظات حول النصوص، ص. ٨٠٧، الملاحظة رقم ٣ الخاصة بكتاب "في مساحة القطع المكافئ" والمتعلقة بالصفحة ٥٠٥ من هذا المجلد.

بعد ذلك مباشرةً يأخذ المضلّعين (A,N,B,M,C) و (D,X,E,T,G) دون أن يشير إلى أن المضلعين (H,B,M,C) و (I,E,T,G) من جهة، والمضلّعين (H,B,N,A) و (I,E,X,D) من جهة أخرى، هي المضلّعات التي تحقق فرضيّات القضيّة ١.

ولكن، عندما نستعمل التطبيق التآلفي T المستنتـَج من القضيّة ١، يكون لدينا مباشرةً التماثل بين المضلعين (A,N,B,M,C) و (D,X,E,T,G)، ونستطيع الوصول إلى النتيجة بدون أن نفصل هذه المضلّعات إلى مجموعتين. ويبدو أنَّ هذه هي الفكرة التي دعت ابن سنان إلى إعادة كتابة مؤلَّفه من جديد.

٢ـ تدور القضيّة ٢، وكذلك القضايا التي تليها، حول قِطَع من قِطع مكافئ. رأس قطعة من القطع المكافئ هو طرف القطر المُرْفَق بالوتر الذي يشكّل قاعدة هذه القطعة[١٧]. هذا الرأس وهذا الوتر يحدّدان المثلّث المُرْفَق بقطعة القطع المكافئ. ويلعب هذا المثلّث هنا دوراً مهمّاً.

ففي نصِّ القضيّة، وفي الكتابتين، يعود ابن سنان بكلِّ قطعةٍ من القطع المكافئ إلى المثلث "الذي قاعدته هي قاعدة القطعة ورأسه رأسها".

في نصِّ القضيّة ٣، كما في نصِّ القضيّة ٤ من الكتابة الجديدة، ينسب ابن سنان قطعة القطع المكافئ إلى المثلث "الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه ارتفاعها"؛ ولكنه في القضيّة ٣ من الصِيغة القديمة، ينسب قطعة القطع المكافئ إلى متوازي الأضلاع "الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه ارتفاعها". ولكن، في كلٍّ من هذه القضايا لا يظهر ارتفاع المثلثات أو ارتفاع متوازي الأضلاع المذكورين. يستخدم ابن سنان، في الواقع، القطعة المستقيمة التي تصل بين الرأس ومنتصف القاعدة. وهذه القطعة لا تصير ارتفاعاً إلاّ في الحالة الخاصّة التي يكون فيها القطرُ المشار إليه محورَ القطع المكافئ، وهذا ما كان ابن سنان يعرفه حقَّ المعرفة.

القضيّة ٣ــ مساحة قطعة القطع المكافئ هي أربعة أثلاث مساحة المثلّث المُرفَق به.

لتكن ABC قطعة من قطع مكافئ، قاعدتها AC وقطرها BD؛ ولتكن S_p مساحتها ولتكن S_T مساحة المثلث ABC [انظر الشكل، ص.٥١٥]. يكون لدينا $S_p = \frac{4}{3} S_T$.

[١٧] انظر: كتاب "المخروطات"، المقالة الأولى، تحديد القطر: تظهر كلمة "رأس" للدلالة على طرف القطر. راجع الكتاب التالي ص. ٧ـ ٨ : *Les coniques d'Apollonius de Perge*, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke (Paris, 1959)

لتكن E و M منتصفي BC و BA على التوالي، وليكن GH و NU القطرين الموافقَين لهما، وليكن H و U منتصفي DC و DA على التوالي؛ فيكون GN موازِياً لـ AC ويقطع BD على I و BC على J.

ليكن $DK \perp BC$ و $GL \perp BC$؛ يكون لدينا $\frac{BI}{BD} = \frac{IJ}{CD}$، ومن جهة أخرى $\frac{IG^2}{CD^2} = \frac{BI}{BD}$، فيكون $IG^2 = IJ.CD$. لكن $DC = 2HD = 2GI$، فيكون $GI = 2IJ$، ويكون بالتالي: $GJ = \frac{1}{2}GI = \frac{1}{4}DC$.

المثلّثان القائما الزاوية DKC و GLJ متشابهان لأنّ $\widehat{CDK} = \widehat{LGJ}$ (زاويتان حادّتان متوازيتا الأضلاع)، فيكون إذاً: $\frac{GL}{DK} = \frac{GJ}{DC}$، ويكون بالتالي: $GL = \frac{1}{4}DK$.

للمثلّثين DBC و GBC نفس القاعدة BC، فيكون:

$$\text{tr.}(GBC) = \frac{1}{4}\text{tr.}(DBC) = \frac{1}{8}\text{tr.}(ABC) = \frac{1}{8}S_T.$$

لكن، وفقاً للقضيّة ٢، يكون لدينا: $\frac{\text{tr.}(GBC)}{S_T} = \frac{\text{aire}(GBC)}{S_p}$، فيكون: $\text{aire}(GBC) = \frac{1}{8}S_p$؛ ويكون: $\text{aire}(NBA) = \frac{1}{8}S_p$، فيكون بالتالي:

$\text{aire}(GBC)+\text{aire}(NBA) = \frac{1}{4}S_p$ و $S_T = \frac{3}{4}S_p$، فنحصل على النتيجة: $S_p = \frac{4}{3}S_T$.

لنقم ببرهان نتيجة ابن سنان هذه بطريقة تحليليّة، في الحالة الخاصّة التي يكون فيها BD محورَ القطع المكافئ. إذا أخذنا، في معلمٍ مُنظَّم متعامد، النقاطَ $B(0,0)$، $A\left(x_0, y_0 = \sqrt{ax_0}\right)$ و $C\left(x_0, -\sqrt{ax_0}\right)$، يكون لدينا: $S_p = 2\int_0^{x_0} \sqrt{ax}\,dx = \frac{4}{3}x_0\sqrt{ax_0}$؛ غير أنّ $S_T = x_0\sqrt{ax_0}$، فيكون: $S_p = \frac{4}{3}S_T$.

<u>مقارنة الكتابتين</u>

البرهانان متقاربان جدّاً؛ ولكنَّ ابن سنان يستخدم في الكتابة القديمة، ليبرهن أن $HO = \frac{1}{4}DP$ (أي $GL = \frac{1}{4}DK$ في الكتابة الجديدة)، خاصيّات خطّ التماسّ في نقطة معيّنة،

أي أنه يستخدم المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس[١٨]. والواضح هو أنَّ البرهان بهذه الطريقة أطول بكثير من البرهان الموجود في الكتابة الجديدة؛ ولقد أوجزناه هنا.

في الشكل الهندسي الوارد في الصِيغة القديمة، نجد مُجدّداً، كما في السابق، إحداثيَّتيْن أولـَيَيْن مُختلفتيْن للنقطتين H و I اللتين لهما خطّا ترتيب متساويان. ينتج من ذلك نقطتان مختلفتان، بدلاً من نقطة واحدة، لتقاطع خطّي التماسّ في H و I مع القطر[١٩]. لكنَّ هذا، كما في السابق، لا يدخل في الاستدلال.

لنلاحظ أخيراً أن ابن سنان ينهي دراسته، في الكتابة القديمة، بإعطاء مقدار $\frac{2}{3}$ لنسبة مساحة قطعة القطع المكافئ إلى مساحة متوازي الأضلاع المُرفـَق بالقطعة.

القضيّة التالية هي لازمة للقضيّة ٣، وهي غير موجودة في الكتابة القديمة، بل في الجديدة فقط.

القضيّة ٤– ليكن ACE و BCD قطعتين من نفس القطع المكافئ. إذا كانت القاعدتان AE و BD متوازيتين، وإذا قطعتا القطر CH المُرفـَق بهما على النقطتين H و G، فإنّ مساحتيهما على التوالي S_1 و S_2 تحققان العلاقة: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{CH}{CG}\cdot\sqrt{\frac{CH}{CG}}$.

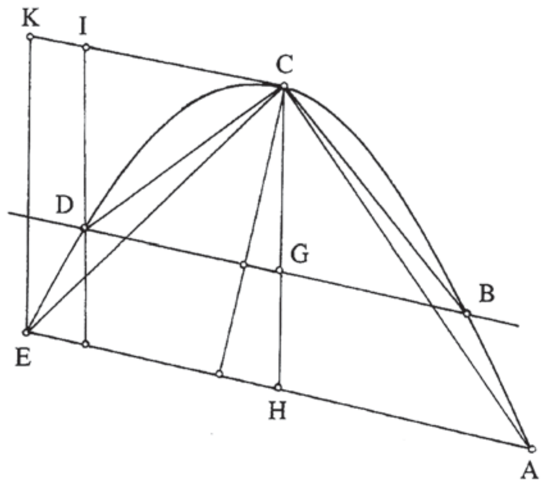
يكون لدينا، وفقاً للقضيّة ٣، $S_1=\frac{4}{3}\text{tr.}(ACE)=\frac{4}{3}\text{aire}(HCKE)$،

$S_2=\frac{4}{3}\text{tr.}(BCD)=\frac{4}{3}\text{aire}(GCID)$، فيكون: $\frac{S_1}{S_2}=\frac{\text{aire}(HCKE)}{\text{aire}(GCID)}=\frac{CH\cdot HE}{CG\cdot GD}$،

---

[١٨] المرجع المذكور سابقاً: "المخروطات"، ترجمة فير إيك (Ver Eecke)، ص. ٣٣ و ٣٥.

[١٩] من الواضح أنّ للنقطتين I و H، وفقاً لبنائهما، خطّي ترتيب متساويين، $\frac{DC}{2}$ و $\frac{DB}{2}$، فيكون لهما نفس الإحداثيّة الأولى؛ يجب، إذاً أن يكون لدينا $X=R$ (انظر الشكل ص. ٥٠٧). من جهة أخرى، وبما أن الرأس A هو منتصف الخطّ الذي تحت خطّ التماسّ، يجب أن يكون لدينا أيضاً $K=L$.



لأنّ $\widehat{IDG} = \widehat{KEH}$. لكنَّ لدينا: $\frac{HE^2}{GD^2} = \frac{CH}{CG}$، فيكون $\frac{S_1}{S_2} = \frac{CH}{CG} \cdot \sqrt{\frac{CH}{CG}}$.

ملاحظة – إذا وضعنا $CH = x_1$، $CG = x_2$، يكون لدينا: $\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{x_1}{x_2}\right)^{\frac{3}{2}}$.

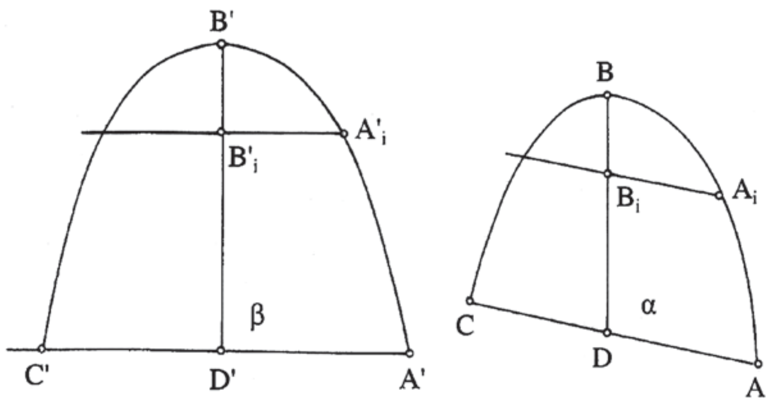
إذا رمزنا بـِ h_1 و h_2 إلى المسافتين من النقطة C إلى كلٍّ من الوترين AE و BD، يكون h_1 و h_2 الارتفاعين الخارجين من C في كلٍّ من المثلثين ACE و BCD، ويكون لدينا:

$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^{\frac{3}{2}}$، لأنّ: $\frac{h_1}{h_2} = \frac{x_1}{x_2}$.

إنّ التحويلَ التآلفيَّ T الذي حدّده ابن سنان في القضيّة ١ وتميّز بالنسبتين λ و μ، يُرفِق بالقطعة ABC من القطع المكافئ الذي قطره BD وضلعه القائم الخاصّ بهذا القطر a، القطعة $A'B'C'$ من القطع المكافئ الذي قطرها $B'D'$، بحيث يكون $B'D' = \lambda \cdot BD$، وقاعدتها $A'C'$ بحيث يكون $A'C' = \lambda \cdot AC$. فيكون الضلعُ القائم a' الخاصّ بهذا القطر $B'D'$ محدَّداً بالعلاقة: $a' = a \cdot \frac{\mu^2}{\lambda}$.

وذلك أنَّ لدينا : $B'B_i' = \lambda \cdot BB_i$ أي $x_i' = \lambda x_i$؛ و $B'A_i' = \mu \cdot B_i A_i$ أي $y_i' = \mu y_i$؛

ولدينا، استناداً إلى خاصيّة القطع المكافئ $y_i^2 = a x_i$، فيكون: $\frac{y_i'^2}{\mu^2} = a \frac{x_i'}{\lambda}$؛ وذلك لكلّ زاويتين α و β.



وبالعكس، إذا كان لدينا قطعتان ABC و $A'B'C'$ من قطع مكافئ، فإنه يوجد تحويل T بحيث يكون $(A'B'C')=T(ABC)$ [أي، بحيث يكون $A'B'C'$ مماثلاً لـِ ABC، أي صورة ABC بالتحويل T].

يصبح التحويل التآلفيّ T تشابهاً نسبته λ إذا كان لدينا $\alpha=\beta$ و $\lambda=\mu$، عندئذٍ يكون $a'=a\lambda$، $D'B'=\lambda\cdot DB$، و $A'C'=\lambda\cdot AC$.

وبالعكس، إذا حَقّقت قطعتان من قطع مكافئ، (ABC) و $(A'B'C')$، العلاقات:

$\alpha=\beta$، $D'B'=\lambda\cdot DB$، $a'=a\lambda$،

فإنهما تتماثلان بتشابهٍ نسبته λ: $(D'B'=\lambda\cdot DB\Rightarrow A'C'=\lambda\cdot AC)$.

وهكذا يُدخِل ابن سنان في كتابه، ضمن دراسة مساحة القطع المكافئ، مفهومَ التحويل التآلفيّ، كما يُدخِل في الوقت نفسه طرائق في اللامتناهيات في الصغر. وهكذا تترابط المراحل المختلفة لمسار ابن سنان في كتابه هذا على الشكل التالي:

- في القضيّة الأولى، يبرهن أنَّ التحويل التآلفيّ T يحفظ نسبة المساحات في حالة المثلثات والمضلّعات؛

- يبرهن بعد ذلك، في القضيّة الثانية، أنَّ التحويل التآلفيّ T يحفظ كذلك نسبة مساحة قطعة من القطع المكافئ إلى مساحة المثلث المُرافِق لها، فتكون هذه النسبة مساوية لنسبة مثيليهما. والخاصيّة المُضْمَرة هنا هي، في الواقع، حفظ نسب المساحات (حتى المنحنية منها) بأيِّ تحويلٍ تآلفي. ولكنَّ إمكانيّات الرياضيّات في ذلك العصر لم تكن تسمح بدراسة أصناف عامّة من المنحنيات؛ فلم يعطِ ابن سنان هذه الخاصيّة إلاّ للمضلّعات ولقِطَع القِطْع المكافئ.

وهو يستخدم لأجل ذلك، القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس، أو أيضاً، مقدّمة أرشميدس، ليبرهن أنه يمكن أن نُحيط بقطعة من القطع المكافئ مضلّعاً يكون الفرقُ بين مساحته ومساحة قطعة القطع المكافئ صغيراً إلى الحد الذي نريد.

- بعد برهان ذلك، لا يستدعي حساب نسبة مساحة قطعة القِطع المكافئ، إلى مساحة المثلث المُرفَق بها، أيّة طريقة في اللامتناهيات في الصغر؛ بل يكفي فقط استخدام خاصيّة هذه النسبة التي مفادها أنها مستقلّة عن قطعة القطع المكافئ المعنيّة بالأمر؛ وهذا بالتحديد ما برهنه ابن سنان.

ولقد نجحت خطّة ابن سنان، المَبنيّة على تركيب التحويلات التآلفيّة مع طرائق اللامتناهيات في الصغر، في خفض عدد المقدّمات المستخدَمة إلى اثنتين فقط.

٣ـ٣ نصّا كتابيْ إبراهيم بن سنان

نصّ كتاب: "في مساحة القطع المكافئ"

نصّ كتاب: "في مساحة قطع المخروط المكافئ"

ا – ٧٦ – ظ
ق – ١٨٢ – ظ

٣-٣-١ نص كتاب إبراهيم بن سنان

في مساحة القطع المكافئ

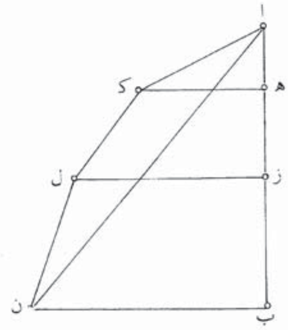
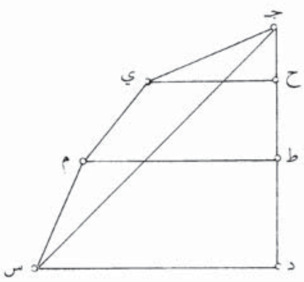
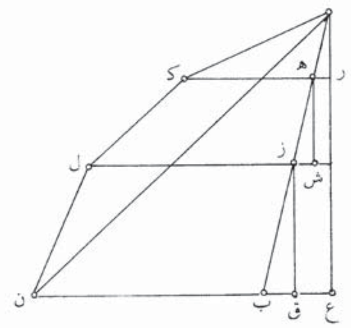
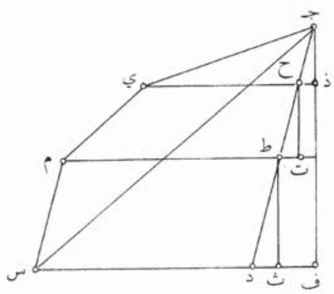
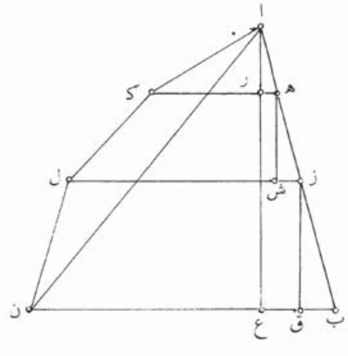
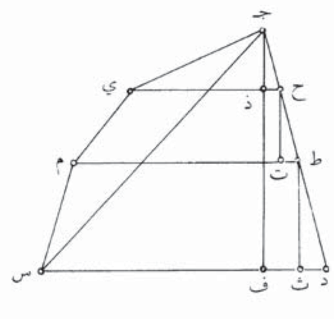
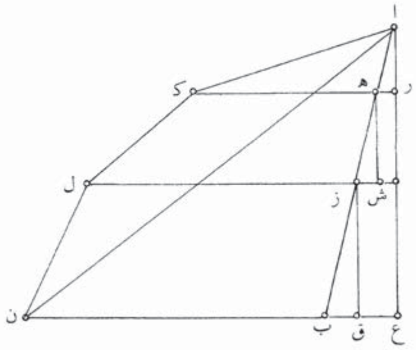
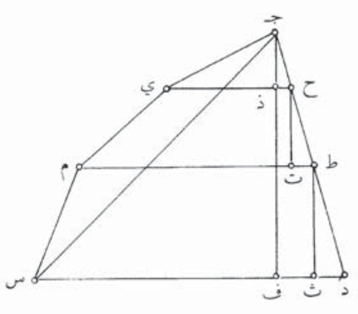
– آ – إذا كان خطّان مستقيمان عليهما اب جـ د، وقسما بأقسام كم كانت على نقط هـ ز ح ط، وكانت نسب خطوط ب ز زهـ هـ ا كنسب خطوط د ط ط ح ح جـ ح، وأخرجت خطوط ب ن زل هـ ك متوازية وخطوط د س ط م ح ي متوازية، وكانت أيضًا نسبة ب ن إلى زل كنسبة د س إلى م ط ونسبة زل إلى هـ ك كنسبة ط م إلى ح ي، ووصلت خطوط ا ن اك ل ك ل ن جـ س جـ ي ي م س م، فإن نسبة مثلث ب ن ا إلى مثلث د س جـ كنسبة شكل اك ل ن ب إلى شكل جـ ي م س د.

برهان ذلك: أن خطوط ب ن زل هـ ك إما أن تكون على خط ب ا أعمدة أو لا تكون كذلك. فإن كانت أعمدة، استعملنا خطوط ب ز زهـ هـ ا على أنها أعمدة على الخطوط المتوازية، وإلاّ أخرجنا من نقطة آ عمودًا على ن ب، وهو اع، يقع منه على ع؛ ومن نقطة هـ عمود هـ ش على خط زل؛ ومن نقطة ز عمود زق على خط ن ب. وكذلك أيضًا إن كانت خطوط ح ي ط م د س أعمدة على خط جـ د، استعملنا ⟨خطوط د ط ط ح ح جـ على أنها أعمدة على الخطوط المتوازية⟩ وإلاّ أخرجنا من نقط جـ ح ط أعمدة نظيرة للأعمدة التي أخرجت في الشكل الآخر، أمّا جـ ف فعلى د س، وأمّا ح ت فعلى م ط، وأمّا ط ث فعلى

1 البسملة: نجد بعدها «وما توفيقنا إلا بالله» [ا] – 2-3 كتاب ... المكافئ: كتاب في مساحة القطع المكافئ لإبراهيم بن سنان بن ثابت بن قرة الحرّاني، رحمهم الله تعالى رحمة واسعة [ق] ونجد في الهامش: «كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديمًا، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتابًا آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها». أما مخطوطة [ا] فنجد في آخر ص.٧٧–ظ: «كان في صدره مكتوب ما هذه حكايته: كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديمًا، ثم ذكر أنه ضاع منه، فعمل كتابًا آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها» – 5 جـ ح: ح جـ [ق] – 7 م ط: ط م [ق] / ل ك: ك ل [ق] – 8 ل ن: ب ل [ا] / س م: م س [ق] / ب ن ا: اب ن [ق] / د س جـ: جـ د س [ق] – 10 تكون: يكون [ق] / ب ا: اب [ق] / تكون: يكون [ق] – 12 ن ب: ب ن [ق] – 13 زل: ل ن [ا] / ن ب: ب ن [ق] – 14 استعملنا: ناقصة [ا] – 15 جـ: د [ا] – 16 م ط: ط م [ق].

س د. ونخرج ك هـ إلى ا ع، فيلقاه على ر ويكون عمودًا عليه لأنه عمود على خط موازٍ له. وكذلك نخرج ح ي إلى جـ ف، فيلقاه على ذ ويصير على خط جـ ف عمودًا أيضًا. فمثلث ا ن ب هو نصف ضرب ا ع في ن ب، ومثلث ا هـ ك هو نصف ضرب ا ر في هـ ك، فنسبة مثلث ا ن ب إلى مثلث ا هـ ك كنسبة نصف ضرب ا ع في ن ب إلى نصف ضرب ا ر في هـ ك وكنسبة ضرب ا ع في ن ب إلى ضرب ا ر في هـ ك. وهذه النسبة هي مؤلّفة من نسبة ا ع إلى ا ر ومن نسبة ب ن إلى هـ ك، ونسبة ا ع إلى ا ر هي نسبة ب ا إلى هـ ا لأن هـ ر موازٍ لـ ب ع، فنسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث ا هـ ك مؤلّفة من نسبة ب ن / ق – ١٨٣ – و إلى هـ ك ومن نسبة ب ا إلى ا هـ. وعلى هذا المثال أيضًا نبيّن أن نسبة مثلث جـ س د إلى مثلث جـ ح ي مؤلّفة من نسبة د س إلى ح ي ومن نسبة د جـ إلى جـ ح. ولأن نسبة ب ز إلى ز هـ كنسبة د ط إلى ط ح، يكون على التركيب نسبة ب هـ إلى هـ ز كنسبة د ح إلى ح ط. ونسبة ز هـ إلى هـ ا كنسبة ط ح إلى جـ ح. فبالمساواة، يصير نسبة ب هـ إلى هـ ا كنسبة د ح إلى جـ ح؛ وعلى التركيب، نسبة ب ا إلى ا هـ مثل نسبة د جـ إلى جـ ح ونسبة ب ن إلى ز ل كنسبة د س إلى م ط ونسبة ز ل إلى هـ ك كنسبة م ط إلى ح ي. فبالمساواة، نسبة ب ن إلى هـ ك كنسبة د س إلى ح ي. ولأنا قد بيّنا أن نسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث ا هـ ك مؤلّفة من نسبة ب ا إلى ا هـ ومن نسبة ب ن إلى هـ ك، وهذه النسب هي مثل نسبة د جـ إلى جـ ح ونسبة د س إلى ح ي كما بيّنا، يصير نسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث ا هـ ك مؤلّفة من نسبة د جـ إلى جـ ح ومن نسبة د س إلى ح ي، ومن هاتين النسبتين يأتلف نسبة مساوية لنسبة مثلث جـ س د إلى مثلث جـ ح ي كما بيّنا. فنسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث ا هـ ك مثل نسبة مثلث جـ س د إلى مثلث جـ ح ي. فعلى التبديل يصير نسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث جـ س د كنسبة مثلث ا هـ ك إلى مثلث جـ ح ي.

1 س د: د س [ق] / ر: كتب ناسخ [ق] الراء ذالاً وكتبها ناسخ [ا] زايًا، ولن نشير إليها فيما بعد / موازٍ: موازي [ا]، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 2 جـ ف فيلقاه على: ناقصة [ا] / ذ: ر [ق] / ويصير: فيصير [ا] – 3 ا ن ب: ا ب ن [ق] – 4 ا ن ب: ا ب ن [ق] / ن ب: ب ن [ق] / هـ ك: كرر بعدها «وكنسبة ضرب ا ع في ن ب إلى نصف ضرب ا ز في هـ ك»، ثم ضرب عليها بالقلم [ا] – 5 ن ب: ب ن [ق] – 8 جـ س د: جـ د س [ق] – 10 ط ح: جـ ط [ا] / جـ ح: ح جـ [ق] – 11 جـ ح: ح جـ [ق] – 12 جـ ح: ح جـ [ق] / م ط: ط م [ق] / ز ل: ز ك [ا] – 13 م ط: ط م [ق]/ إلى ح ي: إلى ب ح [ا] – 15 النسب: النسبة [ق] / د جـ: د ح [ا] – 16 د جـ: د ح [ا] / ح ي: ب ح [ا] – 17 يأتلف: لا نعرف لمثل هذا الاشتقاق استعمالاً في سياق نظرية النسبة إلاّ في نصي إبراهيم بن سنان (انظر ص 723)، ولهذا تركناه، والمقصود هو تألف نسبة من نسبتين أو أكثر، والمألوف في هذا المعنى هو «يتألف» / جـ س د: جـ د س [ق] / مثلث (الثالثة): ناقصة [ا] – 18 مثل: مثلث [ا] / جـ س د: جـ د س [ق] – 19 جـ س د: جـ د س [ق] / جـ ح ي: ي ح جـ [ا] – نجد في مخطوطة [ا] شكلين فقط.


ا
ه
ك
ز
ل
ن
ب

جـ
ح
ي
ط
م
س
د

ا
ك
ه
ر
ل
ز
ش
ن
ب
ق
ع

جـ
ي
ح
ذ
م
ط
ت
س
د
ث
ف

ا
ك
ر
ه
ل
ش
ز
ن
ع
ق
ب

جـ
ي
ذ
ح
م
ت
ط
س
ف
ث
د

ا
ك
ه
ر
ل
ز
ش
ن
ب
ق
ع

جـ
ي
ذ
ح
م
ت
ط
س
ف
ث
د

وأيضًا، فإن سطح هـ ك ل ز فيه خطان متوازيان وهما ز ل هـ ك، فهو مساوٍ لضرب نصف مجموع خطي ز ل هـ ك في العمود الواقع بينهما وهو هـ ش. فنسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ك ل ز كنسبة ضرب عمود ا ع في نصف خط ب ن إلى ضرب هـ ش في نصف خطي ز ل هـ ك، فنسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ز ل ك إذن مؤلفة من نسبة ا ع إلى هـ ش ومن نسبة نصف خط ب ن إلى نصف خطي هـ ك ز ل. ونسبة ا ع إلى هـ ش كنسبة ا ب إلى هـ ز / من ا – ٧٧ – و أجل أن مثلث هـ ش ز شبيه بمثلث ا ع ب، إذ كان خط ا ع موازيًا لخط هـ ش لأنهما عمودان على خطين / متوازيين. وخط ب ع موازٍ لخط ز ش وخط ا ب في استقامة خط هـ ز، فيصير ق – ١٨٣ – ظ نسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ز ل ك مؤلّفة من نسبة ا ب إلى هـ ز ومن نسبة نصف ب ن إلى نصف مجموع ز ل هـ ك. وعلى هذا المثال يتبيّن أن نسبة مثلث جـ د س إلى سطح ح ي م ط مؤلّفة من نسبة جـ د إلى ح ط ومن نسبة نصف د س إلى نصف خطي ط م ح ي. ولأن نسبة ز ل إلى هـ ك كنسبة ط م إلى ح ي، يكون نسبة ز ل إلى مجموع ل ز هـ ك كنسبة ط م إلى مجموع ط م ح ي. ونسبة ب ن إلى ز ل مثل نسبة د س إلى [مجموع] ط م [ح ي]، يصير نسبة ب ن إلى ز ل هـ ك كنسبة د س إلى ط م ح ي، ونسب أنصافها أيضًا كذلك: نسبة نصف ب ن إلى نصف ز ل هـ ك كنسبة نصف د س إلى نصف ط م ح ي؛ وقد كنّا بيّنا أن نسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ز ل ك مؤلّفة من نسبة ا ب إلى هـ ز ومن نسبة نصف ب ن إلى نصف ك هـ ل ز. فأمّا نسبة ا ب إلى هـ ز فإنها كنسبة د جـ إلى ط ح، لأن نسبة ا ب إلى ا هـ كنسبة د جـ إلى جـ ح كما بيّنا، ونسبة هـ ا إلى هـ ز كنسبة جـ ح إلى ح ط؛ فبالمساواة، يكون نسبة ا ب إلى هـ ز كنسبة جـ د إلى ح ط؛ وأمّا نسبة نصف ب ن إلى نصف هـ ك ز ل فإنها كنسبة نصف د س إلى نصف ح ي ط م. فإذن نسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ز ل ك مؤلّفة من نسبة جـ د إلى ح ط ومن نسبة نصف د س إلى نصف ح ي ط م. ونسبة مثلث جـ س د إلى سطح ح ي م ط مؤلفة من هاتين النسبتين كما قلنا، فنسبة مثلث ا ب ن إلى سطح هـ ز ل ك كنسبة مثلث جـ د س إلى سطح ح ط م ي. وعلى التبديل، نسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث جـ س د كنسبة سطح

1 هـ ك ل ز: هـ ك ز ل [ا، ق] / مساوٍ: مساوي [ا] – 3 هـ ك ل ز: هـ ك ز ل [ا، ق] – 4 سطح هـ ز ل ك: مثلث ا هـ ك [ا، ق] – 6 هـ ش ز: هـ س ر [ا] / ا ع ب: ا ن ع [ا] / ا ع: ن ع [ا] – 8 هـ ز ل ك: هـ ز ك ل [ا، ق] ولن نشير إلى مثلها فيما بعد – 9 ح ي م ط: ح ي ط م [ا، ق] – 11 هـ ك (الأولى): هـ ط [ا] / ط م (الثانية): م ط [ا] – 12 ب ن: ب ز [ق] – 15 ب ن: ن ب [ا] – 17 هـ ا: ا هـ [ق] – 19 ا ب ن: ا ب ز [ا] – 20 نصف (الأولى): ناقصة [ا] / جـ س د: جـ د س [ق] / ح ي م ط: ح ي ط م [ا، ق] – 22 ح ط م ي: ح ط ي م [ا، ق] / ا ب ن: ا ن ب [ا] / جـ س د: جـ د س [ق].

هـ ز ل ك إلى سطح ح ي م ط. وكذلك نبيّن أنّها أيضًا كنسبة سطح ب ن ل ز إلى سطح س د ط م؛ وقد كانت أيضًا هذه النسبة كنسبة مثلث ا هـ ك إلى مثلث جـ ح ي. فنسبة الواحد إلى قرينه كنسبة الجميع إلى الجميع. فنسبة مثلث ا ب ن إلى مثلث جـ س د كنسبة جميع مثلث ا هـ ك وسطح هـ ز ل ك وسطح ز ب ن ل إلى جميع مثلث جـ ح ي وسطح ح ي م ط وسطح س م ط د، وذلك كنسبة شكل ا ك ل ن ب إلى شكل جـ ي م س د؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ولنا أن نبيّن ذلك لو كان لنا أن زاوية ب قائمة وحدها أو كل واحدة من زاويتي ب د، فإن البرهان على ذلك شبيه بهذا لأنا نستعمل النسبة بين خط ا ب وبين أقسامه بدل ما استعملنا / النسبة بين عمود ا ع وبين عمود هـ ش أو عمود ز ق. وكذلك نستعمل مكان ضرب ا ع في ب ن، ضرب ا ب في ب ن، وبدل ضرب هـ ش في نصف ك هـ ل ز، ضرب هـ ز في نصف ك هـ ل ز. وكذلك في الشكل الذي عليه جـ ي م س د. ق – ١٨٤ – و

– ب – كل قطعتين من قطع مكافئ، فإن نسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدة الأولى ورأسه رأسها إلى المثلث الذي قاعدته قاعدة الأخرى ورأسه رأسها.

فليكن قطع مكافئ عليه ا ب جـ د،/ ونقطع منه قطعتين عليهما ا ب جـ د، ونقسم خطي ا ب جـ د بنصفين على نقطتي هـ ز، ونجيز عليهما قطرين، وهما قطرا هـ ح ز ط، يلقيان القطع على نقطتي ح ط، ونصل ا ح ح ب جـ ط ط د. ا – ٧٧ – ظ

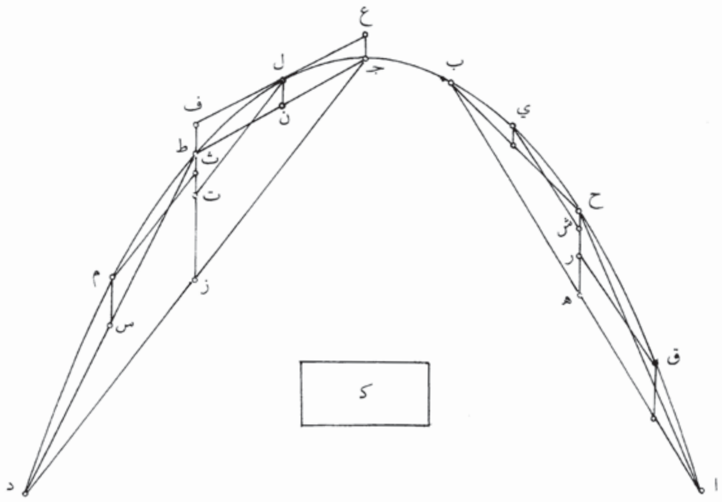
فأقول: إنّ نسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى قطعة جـ ط د من القطع كنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث جـ ط د.

فإن لم يكن كذلك، فليكن نسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث جـ ط د كنسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى سطح هو أصغر من قطعة جـ ط د من القطع، وهو سطح ك. فالقطعتان اللتان يحيط بهما خط جـ ط المستقيم وقطعة جـ ط من خط القطع وخط د ط والقطعة التي عليها ط د من خط

1 ح ي م ط: ح ط ي م [ق] ح م ي ط [ا] / ب ن ل ز: ا ب ن ل [ا] ز ب ل ن [ق] – 2 س د ط م: س د م ط [ا] ط د س م [ق] – 3 جـ س د: جـ د س [ق] – 4 ا هـ ك: هـ ك ا [ا] / هـ ز ل ك: هـ ز ك ل [ا] هـ ك ز ل [ق] / ز ب ن ل: ا ب ز ل [ا] ز ل ب ن [ق] / ح ي م ط: ح م ي ط [ا] ح ي ط م [ق] – 5 س م ط د: ط م د س [ق] / جـ ي م س د: د جـ م ي س [ا] – 8 هـ ش: هـ س [ا] – 10 جـ ي م س د: جـ د س ي م [ا] – 13 ا ب جـ د: ا جـ ب د [ق]؛ وكرر ناسخ [ا] بعدها «كل قطعتين من قطع مكافئ»، ثم ضرب عليها بالقلم – 16 ا ح ب: ا حـ ب [ا] / جـ ط د: د ط جـ [ا] / ا ح ب: ا ب ح [ا] – 17 جـ ط د: جـ ح ط [ا] – 18 جـ ط د: ح ط د [ا] / ا ح ب: ا ب ح [ا] – 19 جـ ط د: جـ د ط [ا] – 20 د ط: ط د [ق] / عليها: عليه [ا، ق] / ط د: ناقصة [ا].

القطع إما أن تكونا أعظم من فضل قطعة جـ ط د من القطع على سطح ک أو لا تكونا بأعظم من هذا الفضل.

فلتكونا أوّلاً ليس بأعظم من هذا الفضل، فيبقى مثلث جـ د ط ليس بأصغر من سطح ک، فنسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى سطح ک ليست بأصغر من نسبة قطعة ا ح ب إلى مثلث جـ د ط. لكن نسبة قطعة ا ح ب إلى سطح ک هي كنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث جـ د ط، فنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث جـ د ط ليست بأقلّ من نسبة قطعة ا ح ب إلى مثلث جـ د ط، وهذا محال، لأن مثلث ا ب ح أصغر من قطعة ا ح ب من القطع.



وليكن قطعتا جـ ل ط ط م د من القطع أعظم من فضل قطعة جـ ط د من القطع على ⟨سطح ک الذي يفضل على⟩ مثلث جـ د ط. ونقسم خطي جـ ط ط د بنصفين على نقطتي ن س، ونجيز عليهما قطرين موازيين لخط ز ط، إذ كانت أقطار هذا القطع متوازية، وهما قطرا ن ل س م. ونصل خطوط جـ ل ل ط ط م م د، ونجيز على نقطة ل خطًا موازيًا لخط جـ ن ط، فهو مماسّ للقطع كما تبيّن في كتاب المخروطات، وليكن الخط / ع ل ف؛ ونخرج إليه قطر ز ط فيلقاه على ف، وقطرًا موازيًا لقطر ز ط من نقطة جـ، وهو جـ ع. فسطح جـ ع ف ط متوازي الأضلاع ق - ١٨٤ - ظ

1 تكونا: يكونا [ق] / جـ ط د: جـ د ط [ا] / تكونا: يكونا [ق] / بأعظم: أعظم [ق] – 3 فلتكونا: فليكونا [ق] / جـ د ط: جـ ط د [ق] – 5 جـ د ط (الأولى والثانية): جـ ط د [ق] – 6 جـ د ط (الأولى والثانية): جـ ط د [ق] – 7 ا ب ح: ا ح ب [ق] – 9 جـ د ط: جـ ط د [ق].

وهو محيط بقطعة جـ ط ل من القطع ، فهو أعظم منها ، فنصفه أعظم من نصفها. فمثلث جـ ل ط الذي هو نصف سطح جـ ع ف ط أعظم من نصف قطعة جـ ل ط من القطع. وكذلك نبيّن أن مثلث ط م د أعظم من نصف القطعة التي هو فيها من القطع. فإذا فعلنا بالقِطَع التى على خطوط جـ ل ل ط ط م م د من القطع مثل هذا، أعني أنّا نفصل من كل واحدة منها أعظم من نصفها ، فإنّا سننتهي إلى فضلة من قطعة جـ ط د تكون أصغر من فضل قطعة جـ ط د على سطح ك. فليكن الباقي هو قطع جـ ل ل ط ط م م د من القطع ، فيبقى الشكل الذي عليه جـ د م ط ل أعظم من سطح ك. ولأن قطر ط ز قد قطع خط جـ د بنصفين، فإن خط جـ د على الترتيب. فنخرج من نقطتي ل م خطين موازيين له ، أعني على الترتيب على قطر ز ط ، وهما ل ت م ث، يلقيان القطر على نقطتي ت ث. ونقسم خط هـ ح من قطر هـ ح على نسب أقسام خط ط ز على نقطتي ش ر حتى يكون نسبة خط ح ش إلى هـ ح كنسبة ط ث إلى ط ز ونسبة ر ح إلى هـ ح كنسبة ت ط إلى ط ز. ونخرج من نقطتي ش ر خطين على الترتيب من قطر هـ ح ، أعني موازيين لخط ا ب ، فإن خط ا ب أيضًا من خطوط الترتيب لأن قطر هـ ح يقطعه بنصفين. والخطان ش ي ر ق ، ولنخرجها إلى جهتين مختلفتين، فيقعان على القطع على نقطتي ي ق ؛ ونصل ا ق ق ح ح ي ي ب. ولأن قطر القطع المكافئ هـ ح ، وقد قطعته خطوط على الترتيب وهي ا هـ ق ر ، يكون نسبة مربع ا هـ إلى مربع ق ر مثل نسبة هـ ح إلى خط ر ح ، فإن هذا ممّا قد تبيّن في كتاب المخروطات. وكذلك يصير نسبة مربع د ز إلى مربع ل ت كنسبة خط ز ط إلى خط ط ت. ولأن نسبة خط هـ ح إلى خط ر ح كنسبة خط ز ط إلى خط ط ت ، يصير نسبة مربع خط ا هـ إلى مربع خط ر ق كنسبة مربع خط ز د إلى مربع ل ت. وهذه الخطوط أيضًا في الطول تكون متناسبة. وقد تبيّن في الشكل الذي قبل هذا أنه إذا كان خطا هـ ح ز ط مستقيمين وقسم خط هـ ح على نقطة ر وخط ز ط على نقطة ت ، وكانت نسبة هـ ر إلى ر ح كنسبة ز ت إلى ت ط ، وأخرج خطا ا هـ ر ق / متوازيين وخطا ز د / ل ت متوازيين، وكانت نسبة ا هـ إلى ر ق كنسبة ز د إلى ل ت ، ووصلت الخطوط ، فإن نسبة مثلث ا هـ ح إلى مثلث

ا – ٧٨ – و
ق – ١٨٥ – و

5 تكون: يكون [ق] – 8 الترتيب: نجد بعدها «من خط جـ د» [ا] – 9 ت ث: ي ت [ا] – 10 ش: س [ا] / ح ش: ح س [ا]/ ط ث: ط ت [ا] – 11 رح: زح [ا] / ت ط: ث ط [ا] / ر: ز [ا] – 13 ش ي: س ي [ا] – 14 ي ب: رب [ا] – 15 رح: زح [ا] – 16 ل ت: م ب [ا] – 17 زط: د ط [ا] / رح: زح [ا] – 18 مربع (الرابعة): ناقصة [ا] / ل ت: م ت [ا] – 19 تكون: يكون [ق] – 20 هـ ح: هـ ط [ق] / ر: ز [ا] / ت: ث [ا] / هـ ر إلى رح: هـ ز إلى زح [ا] – 21 زت: رت [ا] / ت ط: ث ط [ا] / ل ت: م ت [ا] – 22 ل ت: م ت [ا].

جـ ط ز كنسبة سطح ا هـ ح ق إلى سطح جـ ل ط ز. وعلى هذا المثال نبيّن أن نسبة مثلث هـ ب ح إلى مثلث ز ط د كنسبة سطح هـ ح ي ب إلى سطح ط م د ز. ونسبة مثلث هـ ا ح إلى مثلث ط جـ ز كنسبة مثلث هـ ب ح إلى مثلث ز ط د؛ وذلك أن خط ا هـ كما كان مساويًا لخط هـ ب، وجب أن يكون مثلث ا هـ ح مثل مثلث هـ ب ح؛ وعلى هذا المثال يكون مثلث ز جـ ط مثل مثلث ز ط د. فمن أجل هذا يكون نسبة سطح ح ي ب هـ إلى سطح ز د م ط كنسبة سطح ا هـ ح ق إلى سطح جـ ل ط ز. ويصير نسبة سطح ا هـ ح ق إلى سطح جـ ل ط ز كنسبة شكل ا ب ي ح ق إلى شكل جـ د م ط ل. ولكن نسبة سطح ا هـ ح ق إلى سطح جـ ل ط ز كنسبة مثلث هـ ح ا إلى مثلث جـ ز ط وكنسبة أضعاف هذه المثلثات. فنسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث د ط جـ كنسبة سطح ب ا ق ح ي إلى سطح د جـ ل ط م. ولكنّا قد كنّا وضعنا أن نسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى سطح كَ كنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث د ط جـ، وبيّنا أن سطح كَ أصغر من شكل د جـ ل ط م، فنسبة قطعة ا ح ب من القطع إلى سطح كَ أعظم من نسبتها إلى شكل د جـ ل ط م. لكن نسبتها إلى سطح كَ كنسبة مثلث ح ا ب إلى مثلث د ط جـ كما وضعنا، فنسبة مثلث ح ا ب إلى مثلث د ط جـ أعظم من نسبة قطعة ا ح ب إلى شكل د جـ ل ط م. ونسبة قطعة ا ح ب إلى شكل د جـ ل ط م أعظم من نسبة شكل ا ب ي ح ق إلى شكل د جـ ل ط م، فنسبة مثلث ا ح ب إلى مثلث د ط جـ أعظم كثيرًا من نسبة شكل ا ب ي ح ق إلى شكل د جـ ل ط م. وقد بيّنا أن نسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث د جـ ط كنسبة شكل ا ب ي ح ق إلى شكل د جـ ل ط م، وهذا محال. فليس يمكن أن يكون نسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث د جـ ط كنسبة قطعة ا ب ح إلى شكل أصغر من قطعة د ط جـ.

وإن أمكن أن يكون إلى سطح أعظم منها، فإن نسبة مثلث د ط جـ إلى مثلث ا ب ح ستكون كنسبة قطعة د ط جـ إلى سطح أقلّ من قطعة ا ب ح، وهذا خلف لا يمكن.

فليس نسبة مثلث / ا ب ح إلى مثلث جـ ط د كنسبة قطعة ا ب ح إلى سطح هو أصغر ولا ق – ١٨٥ – ظ

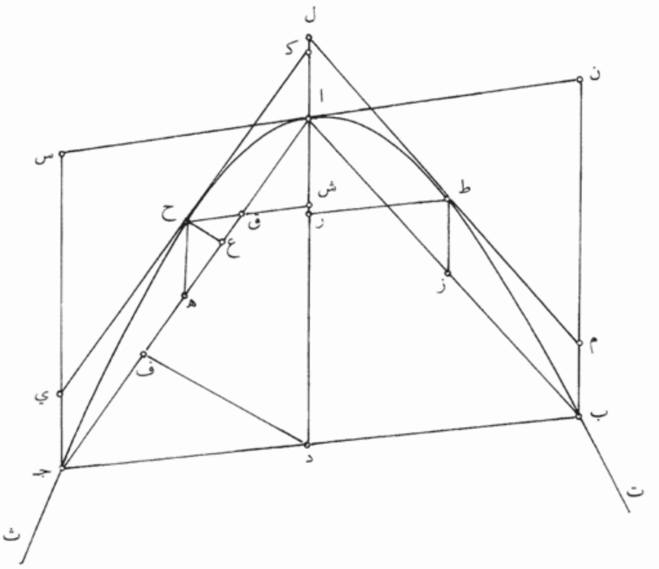
1 جـ ط ز: ط د ز [ا] / ا هـ ح ق: ا هـ ق ح [ا، ق] / جـ ل ط ز: د ز ط م [ا] / نبين: يتبين [ا] – 2 ز ط د: ز ط جـ [ا] / ط م د ز: ز ط جـ ل [ا] ط م ز د [ق] – 3 ط جـ ز: ط ز د [ا] / ز ط د: ز ط جـ [ا] – 4 ز جـ ط: ز د ط [ا] – 5 ز ط د: ز ط جـ [ا] / سطح: أثبتها في الهامش [ا] / ح ي ب هـ: هـ ا ف ح [ا] / ز د م ط: ز د ط م [ا، ق] – 6 ا هـ ح ق: ف ح ز ب [ا] / جـ ل ط ز: ط ز ل جـ [ا] / ا هـ ح ق: ا هـ ف ح [ا] ا هـ ق ح [ق] / جـ ل ط ز: ز م ط د [ا] – 7 ا ب ي ح ق: ا ب ي ح [ا] / شكل: سطح [ا] / جـ د م ط ل: د م ط ل جـ [ا] / ا هـ ح ق: ا هـ ف ح [ا] ا هـ ق ح [ق] / جـ ل ط ز: ز م ط د [ا] – 8 هـ ح ا: هـ جـ ا [ا] / جـ ز ط: د ز ط [ا] – 9 ب ا ق ح ي: ا هـ ق ح ي ب [ق] ا ق ح ي ب [ا] / د جـ ل ط م: جـ د م ط ل [ق] – 12 ح ا ب: حـ ا ب [ا] – 13 ح ا ب: حـ ا ب [ا] – 14 د جـ ل ط م (الأولى والثانية): د ح ل ط م [ا] – 15 د جـ ل ط م: د ح ل ط م [ا] / ا ح ب: ا حـ ب [ا] – 18 د جـ ط: د ح ط [ا] – 21 جـ ط د: د ط جـ [ا].

إلى سطح هو أعظم من قطعة ط جـ د، فنسبة مثلث ا ب ح إلى مثلث ط جـ د كنسبة القطعة التي يحيط بها خط ا ب المستقيم وقطعةٌ من خط القطع عليها ا ب إلى القطعة التي يحيط بها خط جـ د المستقيم وخطٌّ جـ د من القطع. وعلى هذا المثال يكون كلّ قطعتين من القطع المكافئ، فإن نسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدتها إلى المثلث الذي في الأخرى؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **جـ** – كل قطعة من قطع مكافئ، فهي مساوية لثلثي السطح المتوازي الأضلاع الذي قاعدته قاعدتها وارتفاعه كارتفاعها، وهي مثل وثلث المثلث الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها.

فليكن قطع مكافئ عليه ت ا ث وليقطعه خطّ ما، وهو خط ب جـ، ففصل منه قطعة ب ا جـ. وليقسم خط ب جـ بنصفين على د، / ولنخرج من نقطة د قطرًا للقطع وهو د ا. ونصل ا – ٧٨ – ظ ا ب ا جـ، ونجيز على نقطة ا خطًا موازيًا لخط ب جـ، وهو خط ن ا س، وعلى نقطتي ب جـ قطرين موازيين لقطر ا د وهما ب ن جـ س.

فأقول: إن نسبة قطعة ب ا جـ من القطع، أمّا إلى سطح ن ب جـ س فكنسبة الأربعة إلى الستة، وأمّا إلى مثلث ا ب جـ فكنسبة الأربعة إلى الثلاثة.



3 المستقيم وخط جـ د من القطع: من القطع وخط جـ د المستقيم [ا] – 8 ففصل: كتب ناسخ [ا] فوقها «فيفصل» – 9 قطرًا للقطع: قطر للقطع [ا] – 10 ن ا س: ر ا ش [ا] – 11 ا د: ا ب [ا] / ب ن: ب ر [ا] – 12 ن ب جـ س: ر ب جـ س [ا] – 13 ا ب جـ: ب ا جـ [ا].

برهان ذلك: أنّا نقسم كلّ واحد من خطي ا ج ا ب بنصفين على نقطتي ه ز، ونجيز عليهما قطرين يقطعان القطع، أمّا الذي يمرّ بنقطة ز منها فعلى ط وأمّا الآخر فعلى ح. ونخرج من نقطتي ط ح خطي ط ل ح ك مماسين للقطع ويلقيان القطر الذي عليه ا د على نقطتي ك ل، ونخرج ل ط ليلق ب ن على م وخط ك ح ليلق س ج على ي، ونخرج من نقطة ح خط ح ش على الترتيب من قطر ا د، وكذلك خط ط ر أيضًا. ونخرج من نقطة ح عمود ح ع على ا ج، ومن نقطة د عمود د ف على ا ج، وليلق خط ح ش خط ا ج على ق. فمن أجل أن خط ه ح قطر، وقد قطع خط ج ا بنصفين، فإن / ج ا خط ترتيب. وخط ح ك قد خرج مماسًّا للقطع من طرف ق – ١٨٦ – و القطر، فهو موازٍ لخطوط الترتيب. فخط ا ج موازٍ لخط ك ي، وخط ك ح أيضًا مماسّ للقطع؛ وقد خرج من موضع التماس إلى القطر الذي عليه ا د خط ترتيب وهو ح ش، ولقي قطر ا د الخط المماسّ على ك، فخط ك ا مثل خط ا ش، ونسبة ا ك إلى ا ش كنسبة ح ق إلى ق ش، لأن ا ق يوازي ك ح، فخط ح ق مثل خط ق ش. وأيضًا، لأن خطي ح ش ج د هما من خطوط الترتيب لقطر ا د، يكون ج د موازيًا لخط ش ق، فنسبة د ا إلى ا ش كنسبة د ج إلى ش ق. ونسبة د ا إلى ا ش كنسبة مربع د ج إلى مربع ش ح كما تبيّن في المخروطات، فنسبة د ج إلى ش ق كنسبة مربع د ج إلى مربع ش ح، ولذلك يكون خط ح ش وسطًا في النسبة بين خطي د ج ش ق. فضرب د ج في ش ق مثل مربع ش ح؛ ومربع ش ح مثل ضرب ش ق في ق ح أربع مرّات، لأن ش ق مثل ح ق كما بيّنا. فإذن ضرب د ج في ش ق مثل ضرب ح ق أربع مرّات في ش ق، فخط ح ق ربع خط د ج. ولأن خط د ج موازٍ لخط ح ق، وخط د ف العمود، وخط ح ع العمود وخط ق ع هو مستقيم مع خط ع ف، يكون مثلث د ف ج شبيهًا بمثلث ح ع ق، فنسبة ح ع إلى ف د كنسبة ح ق إلى د ج. وح ق ربع ج د، ف ح ع ربع د ف، ونسبة ح ع إلى د ف كنسبة ضرب عمود ح ع في ا ج إلى ضرب عمود د ف في خط ا ج. وهذه النسبة هي نسبة مثلث ا ح ج إلى مثلث ا د ج، فمثلث ا ح ج ربع مثلث ا د ج،

1 ا ب: ب ا [ا] – 3 ح ك: حـ ك [ا] – 4 ليلق: ليلقى [ا] / ب ن: ب ر [ا] / ليلق: ليلقى [ا] / س ج: ش ج [ا] / ح ش: كتب الشين سينًا، ولن نشير إلى مثلها فيما بعد [ا] – 5 ط ر: ط ن [ا] – 8 ك ي: ك ن [ا] – 11 ح ش: حـ س [ا] – 12 ا د: ب د [ا] – 14 ح ش: د س [ا] – 17 ح ق (الثانية): حـ ق [ا] – 18 وخط: لخط [ا، ق] / ح ع: حـ ع [ا] / ع ف: ح ف [ا] / د ف ج: د ك ج [ا] – 19 ح ع ق: حـ ع ق [ا] / ح ق (الأولى والثانية): حـ ق [ا] – 20 ح ع (الأولى والثانية): ع ح [ا] / د ف (الثانية): د ج [ا، ق] – 21 فمثلث ... ا د ج: كررها ناسخ [ا]، ثم ضرب عليها بالقلم.

فهو ثمن مثلث ا ب جـ، لأن مثلث ا ب جـ ضعف مثلث ا د جـ، إذ كان خط ب جـ مثلي خط جـ د. وقد تبيّن في الشكل الذي قبل هذا أن كل قطعتين من قطع مكافئ، فنسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدة الأولى ورأسه رأسها إلى المثلث الذي هو نظيره في الأخرى. فقطعة ا ح جـ من القطع ثمن قطعة ب ا جـ من القطع. وعلى هذا المثال يكون قطعة ب ط ا من القطع ثمن قطعة ب ا جـ من القطع، فمجموع هاتين القطعتين ربع قطعة ب ا جـ، ويبقى مثلث ب ا جـ ثلاثة أرباع قطعة ب ا جـ، فهي مثل وثلث له. وسطح ب ن س جـ ضعف مثلث ب ا جـ، فنسبة قطعة ب ا جـ إلى مثلث ب ا جـ كنسبة الأربعة إلى الثلاثة، وإلى سطح ب ن س جـ كنسبة الأربعة إلى الستة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.//

تمّ كتاب إبراهيم بن سنان في مساحة القطع المكافئ. ق – ١٨٦ – ظ
ا – ٧٩ – و

9 تمّ .. مساحة: تم استخراج مساحة [ا] / المكافئ: نجد بعدها: «والحمد لله ربّ العالمين والصلوة على النبي محمد وآله» [ا]؛ «والحمد لله وحده والصلوة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه أجمعين في ليلة يسفر صباحها عن نهار الأحد رابع عشر ذي القعدة لسنة تسع وخمسين ومائة بعد الألف بقلم الفقير الحاج مصطفى صدقي، غفر الله ولوالديه ولجميع المسلمين» [ق].

ب – ١٣٤ – ظ
خ – ١٣٢ – ظ
ل – ١٩١ – ظ

٣-٣-٢ كتاب إبراهيم بن سنان بن ثابت
في مساحة قطع المخروط المكافئ

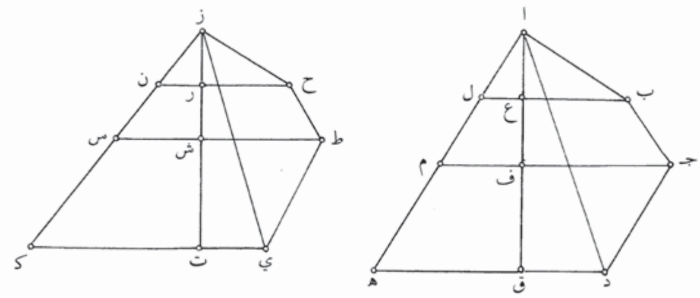
قد كنت عملت كتابًا في مساحة هذا القطع قديمًا، وغيرت في شكل منه شيئًا؛ ثم ضاعت النسخة المصلحة والنسخة القديمة، فاحتجت إلى إعادة ما استخرجته من ذلك في هذا الكتاب. فإن وقعت نسخة تخالف ألفاظها هذه الألفاظ، أو في شيء منها معنى يخالف بعض معاني هذه النسخة، فهي إحدى النسختين اللتين ذكرتها. وقد عمل جدّي ثابت بن قرة في ذلك والماهاني أعمالاً.

– آ – إذا كان شكل ا ب ج د ه كثير الزوايا وشكلُ ز ح ط ي ك أيضًا كثير الزوايا، وأخرجت خطوطُ ب ل ج م ح ن ط س توازي خط د ه وخطَّ ي ك، فكانت نسب خطوط ا ل ل م م ه على نسب خطوط ز ن ن س س ك، ونسبُ خطوط ب ل ج م د ه على نسب خطوط ح ن ط س ي ك، ووصل ا د ي ز، فإن نسبة مثلث ا د ه / إلى مثلث ي ك ز كنسبة شكل ا ب ج د ه إلى شكل ز ح ط ي ك. ل – ١٩٢ – و

برهان ذلك: أنّا نخرج عمود ا ع ف ق على خطوط ب ل ج م د ه المتوازية، وعمودَ ز ر ش ت ⟨على خطوط ح ن ط س ي ك المتوازية⟩، فنسبة مثلث ا د ه إلى سطح ج د ه م

1 البسملة: ناقصة [ل] – 2 إبراهيم: ابرهيم [ب] / بن ثابت: ناقصة [ب] – 3 قطع المخروط: القطع [ب] – 4 عملت: علمت [ل] – 6 نسخة: النسخة، ثم ضرب على «ال» بالقلم [ب] / تخالف: يخالف، ولن نشير إليها فيما بعد [ل] / أو: ناقصة [خ] / معنى: مضى [ل] – 7 فهي: فهو [ب، خ: ل] / ذكرتها: ذكرتها [ل] – 9 آ: ناقصة [ل] – 10 ب ل: نجد في الهامش «كل» مع «ن» فوقها، أي ك ل في نسخة أخرى، ويشير السجزي إلى هذه النسبة بحرف «ن» أو بعلامة + ويلحقه بحبر أحمر، ولن نذكر هذا بعد ذلك والتصحيحات ما عدا واحدة والزيادات كلها من النسخة الأخرى [ب] / خط (الأولى): ناقصة [ب] أثبتها فوق السطر [ل] / فكانت: وكانت [ل] – 11 ا ل: ا ك [ل] / م ه: به [ل، خ] / نسب: نسبت [ل] / ز ن: ب ر [خ، ل] / ن س: بس [ل] / ونسب: ونسبت [ل] – 11-12 ز ن ... خطوط: ناقصة [ب] – 12 ح ن: ح ر [خ، ل] / ي ك: ى ك [ل] / ا د: خطوط ا ل، وكتب «د» فوق «ل» [ب] / مثلث (الأولى): أثبتها في الهامش مع بيان موضعها [ب] / ي ك ز: ي ك [ل] ي ل ز [ب] ك ز ي [خ] – 13 ز ح ط ي ك: ز ح ط ى ك [ل] – 14 ا ع ف ق: نجد في الهامش «فو» مع «ن» فوقها [ب] – 15 ز ر ش ت: د و ش ت [ب] ونجد «ز» فوق الواو / مثلث: ناقصة [خ، ل].

هي كنسبة ضرب ا ق في نصف د هـ إلى ضرب ف ق في نصف د هـ جـ م، وذلك أن مساحتَها مساوية لضرب الخطوط التي ذكرنا بعضها في بعض. فإذن نسبة مثلث ا د هـ إلى سطح جـ م هـ د مؤلفة من نسبة ا ق إلى ق ف ومن نسبة نصف د هـ إلى نصف د هـ جـ م.



وأيضـًا، نبيّن أن نسبة مثلث ز ي ك إلى سطح ي ك س ط مؤلفة من نسبة ز ت إلى ت ش ومن نسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س.

فأما نسبة ا ق إلى ق ف فكنسبة ا هـ إلى هـ م، لتوازي/ خطي د هـ جـ م، وكنسبة/ ز ك ب – ١٣٥ – و
إلى ك س، لأنا فرضنا نسب هذه الخطوط في البدء متساوية، وكنسبة ز ت إلى ت ش. وأما خ – ١٣٣ – و
نسبة نصف د هـ إلى نصف د هـ جـ م فهي كنسبة د هـ إلى د هـ جـ م، وهذه النسبة مثل نسبة ي ك إلى ي ك ط س لأنها على التفصيل فرضت كذلك، وتلك النسبة كنسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س، فإذن نسبة نصف د هـ إلى نصف د هـ جـ م كنسبة نصف ي ك إلى نصف ي ك ط س. فإذن النسب التي تؤلف منها نسبة مساوية / لنسبة مثلث ا د هـ إلى سطح ل – ١٩٢ – ظ
جـ د هـ م، مساويةً للنسب التي تؤلف منها نسبة مساوية لنسبة مثلث ز ي ك إلى سطح

1 كنسبة: نسبة [ل] / ضرب (الثانية): ناقصة [خ] / ف ق: نجد في الهامش «فو» مع علامة + فوقها [ب] / مساحتَها: مساحتها [ب] – 2 فإذن: كتبها دائمًا «فإذًا» ولن نشير إليها فيما بعد [ب] – 3 جـ م هـ د: جـ م د هـ [ب، خ، ل] / ا ق: نجد في الهامش «او» مع علامة + فوقها [ب] / ق ف: ا ف [ب، خ، ل] / نسبة: ناقصة [ل] / نصف: أثبتها في الهامش [ب] / نصف: أثبتها فوق السطر [ل] – 4 ز ي ك: د ي ك [خ، ل] / ي ك س ط: ب ك ط س [ل] ي ك ط س [ب، خ] / نسبة: نسبة في، ثم ضرب على «في» بالقلم [ب] / إلى ت ش: إلى نسبة تس [ب] ونجد تحتها «سن» وضرب على «نسبة» بالقلم – 5 نسبة: ناقصة [ب، ل] – 6 ا ق: نجد «و» تحتها [ب] / ق ف: ف ق [ب] / فكنسبة: كنسبة [ل] / جـ م: نجد فوقها «جمد» مع علامة + [ب] / ز ك: ز ل [ب] – 7 البدء: البدى [ب، خ، ل] – 8 نصف: أثبتها فوق السطر [ل] / إلى نصف د هـ: ناقصة [ل] / فهي: هي [ل] / د هـ (الثالثة): جط، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 9 ي ك: ي ل، يشبه الكاف لامًا، ولن نشير إليها فيما بعد [ب] / إلى ي ك: ناقصة [ل] – 10 ط س: ط ش [ل] – 11-10 إلى نصف ي ك: ناقصة [ل] – 11 ط س: ط ش [ل] / النسب: النسبة [ل] / نسبة: نسب [خ، ل] هي نسبة [ب] / مساوية: متساوية [خ، ل] / لنسبة: كنسبة [خ] – 12 جـ د هـ م: د هـ جـ م، ثم أثبت الصواب في الهامش مع علامة + [ب] / مساوية للنسب: متساوية النسب [ل] / مساوية (الأولى) ... لنسبة: أثبتها في الهامش [ب] / مساوية لنسبة: متساوية كنسبة [ب، خ].

ي ك س ط. فلذلك تكون نسبة مثلث ا د هـ إلى سطح د هـ م جـ كنسبة مثلث ز ي ك إلى سطح ي ك س ط. وكذلك نسبة مثلث ا د هـ إلى سطح ب جـ م ل كنسبة مثلث ز ي ك إلى سطح ح ن س ط ؛ وذلك أن السطوح القائمة الزوايا المساوية لها، أضلاعُها يأتلف منها نسبةٌ واحدة، كأنا قلنا: نسبة ا ق إلى ع ف كنسبة ز ت إلى ر ش، ونسبةُ نصف د هـ إلى نصف جـ م ب ل كنسبة نصف ي ك إلى نصف ح ن ط س. وكذلك نسبة مثلث ا د هـ إلى مثلث ز ي ك كنسبة مثلث ا ب ل إلى مثلث ز ح ن، لأن نسبة عمود ا ق إلى ع ا كنسبة ز ت إلى ز ر ونسبة د هـ إلى ب ل كنسبة ي ك إلى ح ن. فإذن نسبة المثلثين الكبيرين كنسب السطوح كلٌّ واحد إلى نظيره. فإذا جمعنا، صارت نسبة سطح جـ م هـ د إلى سطح ط س ك ي كنسبة شكل ا ب جـ د هـ إلى شكل ز ح ط ي ك، وكانت كنسبة مثلث ا د هـ إلى مثلث ز ي ك. فإذن قد تبيّن ما كنا قصدنا/ بالبيّنة. ل – ١٩٣ – و

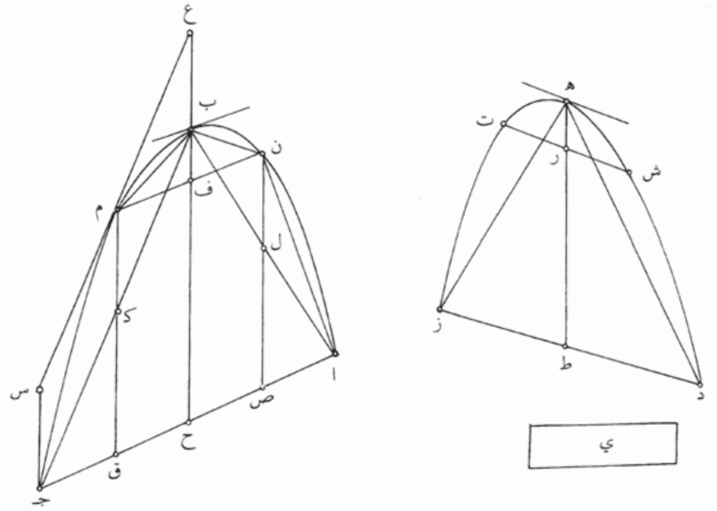
– ب – وإذ قد تبيّن ذلك، فإنّا نبيّن أن كلَّ قطعتين من قِطَع القِطْع المكافئ نسبةُ إحداهما إلى الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدتُه قاعدتُها ورأسه رأسها إلى المثلث المعمول في الأخرى على هذه الصفة.

فلتكن قطعة ا ب جـ من قطع مكافئ وقطعةُ د هـ ز من قطع مكافئ، وقاعدتاهما ا جـ د ز، ونقسمها بنصفين على ح ط. وليكن قطرا القطعتين ب ح هـ ط، ونصل ا ب جـ د هـ ز.

فأقول: إن ما ذكرناه حقّ. فإن كان باطلاً، فلتكن نسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ كنسبة قطعة د هـ ز إلى سطح أقل من قطعة ا ب جـ، وهو سطح ي. ونقسم ب جـ بنصفين على ك، وا ب بنصفين على ل، ونخرج قطري ك م ل ن موازيين لقطر ب ح، ويقعان على نقطتي م ن

1 ي ك س ط: ي ك ط س [خ، ل] خ ط س، ثم أثبت «ي» فوق «خ» [ب] / د هـ م جـ: د هـ جـ م [ب، خ، ل] / ز ي ك: ز ك ي [ب] – 1-3 فلذلك... ح ن س ط: أثبتها في الهامش [ب] – 2 ي ك س ط: ي ك ط س [ب] ك ي ط س [خ، ل] / وكذلك: فكذلك [ب] / ب جـ م ل: ب جـ ك م [ل] ب جـ ل م [ب، خ] – 3 ح ن س ط: ح ز ط س [خ، ل] ي ك ط س [ب] / يأتلف: انظر التعليق في النص الآخر ص 699 – 4 ز ت: ر س [ب، خ] ر ش [ل] – 5 إلى نصف ... ز ي ك: مكررة [خ] / نصف (الثانية): ناقصة [ب] / ح ن: ح ر [ب، خ، ل] – 6 ز ح ن: ر نح [ب] وصححها في الهامش / ز ت إلى ز ر: إلى [خ] ق ر إلى د ز [ل] ب ز إلى ز ن [ب] – 7 ح ن: جـ ن [ب] حيه [ل] / الكبيرين: الكثيرين [ل] / كنسب: كنسبة: ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 8 جـ م هـ د: جـ م د هـ [ب، خ، ل] / ط س ك ي: ط س ق ك [ل] ط س ي ك [ب، خ] – 9 ا ب جـ د هـ: ب جـ د هـ [خ] / ز ي ك: د ى ك [خ، ل] / قد: أثبتها فوق السطر [ب] – 10 بالبينة: لسبه [ب] بالتبيينة [ل] – 11 ب: ناقصة [ب، ل] / ذلك: ناقصة [ب] / قطعتين: قطعين [ب] / القطع: ناقصة [ب] / إحداهما: احدهما [ب، ل] – 15 ونقسمها: ونقسمها [خ] / قطرا: قطر [ب، ل] / ونصل ا ب جـ د هـ ز: ا د حب د هـ هـ ز، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 17 ا ب جـ: ا خ [ل] – 18 على: ف [ب] مع علامة + فوقها / موازيين: هكذا، ثم أضاف ت بلون أحمر: متوازيين [ب] / ب ح: أثبتها في الهامش [ب].

من القطع. ونصل ا ن ن ب ب م م جـ، فكلٌّ واحد من مثلثي ا ن ب ب م جـ أعظم من نصف القطعة التي هو فيها؛ وذلك أنّا إن أخرجنا خطًّا يماسّ القطع من نقطة م – كخط س م ع – كان موازيًا لخط ب ك جـ، الذي هو خط ترتيب على قطر م ك. وإن أخرجنا قطر جـ س كان موازيًا لخط ب ح./ فليلق ح ب م ع على ع، فمثلث ب جـ م نصف سطح ب ع جـ س ل – ١٩٣ – ظ المتوازي الأضلاع،/ والسطح أعظم من قطعة ب م جـ ك؛ فنصفه، أعني مثلث ب م جـ، خ – ١٣٣ – ظ أعظم من نصف القطعة.



ولا نزال ننصف خطوطَ ا ن ن ب م ب جـ م ونظائرَها، ونخرج أقطارًا على الأنصاف، ونصل خطوطًا تحدث مثلثات هي أعظم من نصف القِطَع التي هي فيها، إلى أن يبقى فضلة أقل من زيادة قطعة ا ب جـ على سطح ي. فليكن المقدار الباقي قِطَع ا ن ن ب ب م م جـ، فيكون سطح ا ح جـ م ب ن أعظم من سطح ي. فإذن نسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ كنسبة قطعة د هـ ز إلى سطح أصغر من سطح ا ن ب م جـ ح. ونصل م ن، فيلقى قطرع ح/ على ف، ب – ١٣٥ – ظ

1 أعظم: اقل [ب، خ، ل]، وربما كانت في الأصل «أقل» وسقطت «ليس» – 2 خطًّا يماس القطع: خطا مماس للقطع [ل] / م: أثبتها في الهامش [ب] – 3 ترتيب: الترتيب [ل] – 4 ح ب: ح ف [ل] / ب جـ م: ب م جـ [ل] – 5 ب م جـ ك: ب م جـ [ب] / فنصفه: فنصف [ل] – 7 نزال: يزال [ل] / ننصف: بنصف [ل] – 9 قطعة: فضلة، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / ي: ق [ل] – 10 سطح ا ح جـ م ب ن: سطح هس احجـ، ثم أثبت «مس» في الهامش [ب] / ي: ق [ل] / د هـ ز إلى مثلث: ناقصة [ل] – 11 قطعة: ناقصة [ب] / ا ن ب م جـ ح: انبمسحح [ب، خ، ل] / فيلقى: يلقى [ب، خ، ل] / قطر: أثبتها في الهامش [ب] / ع ح: حح [ل].

فيكون خط ترتيب. وذلك أنّا نجعل قطر م ك يلقى ح جـ على ق، وقطرَ ن ل يلقى ا ح على ص. فلأن ا ل مثل ل ب، وقطرَ ل ص يوازي قطر ب ح، يكون ا ص مثل ص ح. وكذلك ح ق مثل ق جـ. لكن ا ح مثل جـ ح، فيكون ح ص مثل ح ق. فالخط الخارج من م إلى قطر ب ح على ترتيب يقع على قطر ب ح ويكون مثل ح ق. وكذلك خط الترتيب الخارج من ن مثل ح ق، فخط الترتيب / الخارج من ن مثل الخارج من م، فهما يقعان على نقطة واحدة، فلتكن ف. ل – ١٩٤ – و ونقسم هـ ط على نسبة ب ف إلى ب ح على نقطة ر، ونخرج خط ترتيب ش ر ت يوازي د ز، ونصل د ش ش هـ هـ ت ت ز. فلأن نسبة ح ب إلى ب ف كنسبة هـ ط إلى هـ ر، تكون نسبة مربع د ز إلى مربع ت ش كنسبة مربع ا جـ إلى مربع م ن. وذلك أن أبلونيوس قد بيّن في كتاب المخروطات أن نسبة مربع خطوط الترتيب في القِطْع المكافئ كنسبة ما تفصله من القطر التي هي على ترتيب عليه. فإذن نسب خطوط د ز ش ت ا جـ م ن – في الطول – متساوية. فإذن قد قُسم خطا هـ ط ب ح على نقطتي ر ف بنسب متساوية – وأخرج د ز ش ت متوازيين وأخرج ا جـ م ن متوازيين – فكانت نسبة د ز إلى ش ت مثل نسبة ا جـ إلى م ن.

فإذن نسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ كنسبة سطح د ش هـ ت ز إلى سطح ا ن ب م جـ، كما بيّنا في الشكل الأول؛ وقد كانت نسبة قطعة د هـ ز إلى سطح أقل من ا ن ب م جـ كنسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ؛ فإذًا نسبة سطح د ش هـ ت ز إلى سطح ا ن ب م جـ كنسبة قطعة د هـ ز إلى سطح أصغر من سطح ا ن ب م جـ؛ وذلك محال، بيّن / الاستحالة، ظاهر أنه خلف لا يمكن، لأن قطعة د هـ ز أعظم من د ش هـ ت ز. فليس نسبة ل – ١٩٤ – ظ مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ كنسبة قطعة د هـ ز إلى سطح أصغرَ من قطعة ا ب جـ.

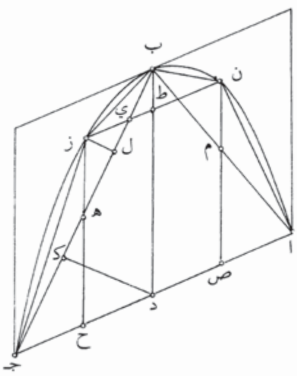
وإن أمكن، فليكن إلى سطح أعظمَ منها؛ فإذن نسبة مثلث ا ب جـ إلى مثلث د هـ ز كنسبة قطعة ا ب جـ إلى سطح أصغر من قطعة د هـ ز. وهذا يتبيّن أنه محال كما تبيّن ما قبله في عكس

1 خط: كتب فوقها «خطوط» [ب] / م ك: كتب فوقها «مد» [ب] / ح جـ: حجـ [خ] / ن ل: ر ل [خ] ر ك [ل] – 2 فلأن: ولأن [ب]، ثم أثبت الصواب في الهامش / مثل: مثلث [ل] / قطر (الثانية): أثبتها في الهامش [ب] / ب ح: بح ف [خ] / يكون: فيكون [ب] ويكون [ل] / ح ق: حص [ل] – 3 م: ن، وكتب «ر» فوقها [ب] ر [خ، ل] / على: ناقصة [ل] – 4 يقع: كتب «يقطع» في الهامش [ب] / ح ق: ح ص [ب، خ، ل] / ن: م [خ، ل، ب] – 5 ن: م [ل] / الخارج (الثانية): أضاف «الخط» في الهامش [ب] / فلتكن: فليكن [ب] – 6 ب ف: وف، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / ب ح: فح [ب] / ر: ن [ب] – 7 د ش: ر ش [خ] / هـ ر: هـ ز [ب] – 8 د ز: د ن [ب] / ت ش: س ز [ب] / ا جـ: إلى جـ [ل] / أبلونيوس: أبلنيوس [ل] – 9 التي: الذي [ب، خ، ل] / هي: هو [ب] – 10 نسب: نسبة [ب، ل] ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 11 ر: د [ل] / ف: ب [ل] / بنسب: بنسب [ل] / د ز: د ز إلى [ب] – 12 فكانت: وكانت [ل] – 13 د هـ ز: ا هـ ر [ل] – 14 ا ن ب م جـ: انبمسحـ [ب، خ، ل] – 15 ا ن ب م جـ: انبمسحـ [ب، خ، ل] – 15-16 مثلث (الأولى) ... كنسبة: ناقصة [خ، ل] – 16 سطح (الثانية): ناقصة [ل] – 17 من: ناقصة [ب] – 19 إلى (الأولى): ناقصة [ب] – 19-20 مثلث د هـ ز ... إلى: مكررة [خ] – 20 يتبين: نبين [ل] / أنه: أثبتها في الهامش بحبر أسود مما يعني أنها من الأصل [ب] / محال: ناقصة [ب] / ما: ناقصة [خ].

هذا الذي نحن فيه. فإذن نسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث ا ب جـ مثل نسبة قطعة د هـ ز إلى قطعة ا ب جـ؛ وهذا ما أردنا أن نبيّنه.

– جـ – فأقول: إن كلَّ قطعة من قِطْع مكافئ نسبتُها إلى المثلث، الذي على قاعدتها وفي ارتفاعها –/ كنسبة الأربعة إلى الثلاثة. خ – ١٣٤ – و

برهان ذلك: أنا نضع القطعة ا ب جـ وقاعدتها ا جـ ونصفها د والقطرَ ب د، ونخرج خطي ا ب ب جـ، ونقسم ب جـ بنصفين على هـ، ونخرج ز هـ ح يوازي ب د ويلقى القطع على ز، ونصل ب ز ز جـ، ونخرج خط ترتيب ز ي ط يلقى قطر ب د على ط وخطَّ ب جـ على ي. فلأن نسبة د جـ إلى ط ي كنسبة د ب إلى ب ط، التي هي كنسبة مربع د جـ إلى مربع ط ز، كما تبيّن في / خطوط الترتيب في كتاب المخروطات، يكون خط ط ز وسطًا في النسبة بين د جـ ط ي؛ ل – ١٩٥ – و لأن نسبة د جـ إلى ط ي كنسبة مربع د جـ إلى مربع ط ز كما بيّنا. لكن لأن ب هـ مثل هـ جـ، وقطر هـ ح يوازي قطر ب د، يكون د ح مثل ح جـ؛ فإذن د جـ مثلي ط ز، إذ كان مثلي د ح المساوي لـ ط ز، لأن سطح ز ط د ح متوازي الأضلاع لتوازي خطوط الترتيب وتوازي الأقطار في القطع المكافئ. لكن نسبة د جـ إلى ط ز كنسبة ز ط إلى ط ي، فـ ز ط مثلا ط ي، فإذن ط ي مثل ي ز؛ فيكون د جـ –/ الذي هو ضعف ز ط – أربعة أمثال ي ز. ب – ١٣٦ – و



1-2 قطعة ا ب جـ: قطعة من القطع، وأثبت ا ب جـ في الهامش [ب] – 2 وهذا: ناقصة [ب] – 3 جـ: ناقصة [ب، ل] / قاعدتها: كتب في الهامش «قاعدته» [ب] – 4 الأربعة: أثبتها في الهامش [ب] – 6 ونخرج ... ب د: أثبتها في الهامش [ب] / ز هـ ح: هـ ز ح [ب] – 7 ز جـ: ر ح، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / خط (الأولى): أثبتها في الهامش [ب] / ب جـ: ب ح [ل] / ي: ى [ل] – 8 د جـ: ن جـ [ب] / مربع (الثانية): ناقصة [ب] – 9 د جـ: د ح، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 10 لأن ... ط ي: في الهامش [ب] / كنسبة: وكنسبة [ب] / د جـ: جـ د [ب] – 11 هـ ح: هـ جـ، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] هـ ج [ل] / قطر: أثبتها فوق السطر [ب] / ح جـ: د جـ [ب، خ] ر ح [ل] / د جـ: د ح [ل] أثبتها في الهامش [ب] / مثلي: مثلثي [ل] مثل، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / إذ: اذا [ب] / مثلي: مثلثي [ل] – 12 ز ط د ح: و ط د، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] – 13 فـ ز ط مثلا ط ي: أثبتها في الهامش [ب] – 14 د جـ: ر ح [ل].

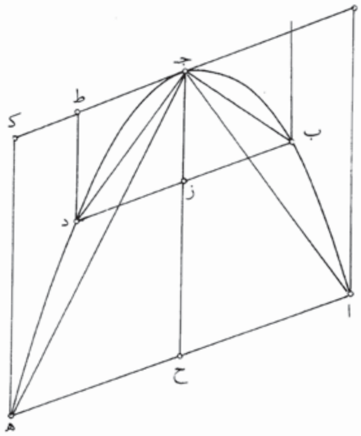
وإن نحن أخرجنا عمود د ک على ب ج وعمود ز ل على ب ج، كانا متوازيين؛ لكن د ج يوازي ز ي وقد وقع عليها جميعًا خط ب ج، فزاوية د ک ج مثلُ زاوية ز ل ي لأن د ک ل مثل ز ل ک المتبادلتين، وزاوية د ج ک مثل زاوية ز ي ل المتبادلتين؛ فمثلثا ز ي ل د ک ج متشابهان، فنسبة د ج إلى ز ي مثل نسبة د ک إلى ز ل. فإذن، لأن د ج أربعة أمثال ز ي يصير د ک أربعة أمثال ز ل. فإذن ضرب د ک في نصف ب ج، أعني مثلث ب ج د، أربعة أمثال ضرب ز ل في نصف ب ج، أعني مثلث ب ز ج. فإذن مثلث ا ب ج – إذ هو ضعف مثلث ب د ج / [ل – ١٩٥ – ظ] لأن خط ا ج ضعف خط ج د – ثمانية أمثال مثلث ب ز ج. فمثلث ب ز ج ثمن مثلث ا ب ج. لكن لأن ب د قطر وز ح قطر، تصير نسبة قطعة ا ب ج من القطع إلى قطعة ب ز ج من القطع كنسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث ب ز ج، فإذن قطعة ب ز ج من القطع ثمن قطعة ا ب ج.

وعلى هذا المثال إن قسمنا ا ب بنصفين على م، وأخرجنا قطر م ن، بيّنا أن نسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث ا ن ب كنسبة قطعة ا ب ج إلى قطعة ا ن ب، ونبيّن أيضًا أن مثلث ا ن ب ثمن مثلث ا ب ج، فإذن قطعة ا ن ب ثمن قطعة ا ب ج.

فإذن مجموع قطعتي ا ن ب ب ز ج ربعُ قطعة ا ب ج. فإن نحن جعلنا قطعة ا ب ج أربعة، كان مجموع قطعتي ا ن ب ب ز ج واحدًا، وبقي مثلث ا ب ج ثلاثة. فإذن نسبة قطعة ا ب ج إلى مثلث ا ب ج كنسبة الأربعة إلى الثلاثة. فإذن كل قطعة من قطع المخروط المكافئ نسبتها إلى المثلث الذي على قاعدتها وفي ارتفاعها كنسبة الأربعة إلى الثلاثة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– د – فأقول: إن كل قطعتين من قطع مخروط مكافئ، قاعدتاهما متوازيتان، فنسبة إحداهما إلى الأخرى كنسبة ارتفاعها إلى ارتفاعها مثناة بنسبة – إذا ثنيت بالتكرير – كانت كنسبة/ [ل – ١٩٦ – و] ارتفاعها إلى ارتفاعها.

1 د ک: ک د [ب] / د ج: د ح، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 1-2 كانا ... ب ج: ناقصة [خ، ل] – 2 ز ل ي: را [ل] ذ ک ي، ثم أثبت «ز ل» في الهامش [ب] / د ک ل: رک ل [ل] – 3 وزاوية: فزاوية [خ] / ز ي ل: ری ک [ل] / المتبادلتين: ناقصة [خ] / د ک ج: د ک ي، ثم أثبت «ج» فوق الياء [ب] – 4 د ج: د ح، ثم أثبت «ج» فوق السطر [ب] / د ک: ر ک [ل] / د ج: ر ج [ل] أثبتها في الهامش [ب] / ز ي: ي د [ب] د ي [ل] – 5 د ک: ک د [ب] ر ک [ل] / ضرب: ناقصة [ب] – 6 ب ز ج: ب ز ح، ثم أثبت «ج» فوق الحاء [ب] / إذ هو: او هر، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] – 8 لأن: ناقصة [ب] / ب د ... قطعة: أثبتها في الهامش [ب] / إلى قطعة ب ز ج من القطع: مكررة [ب] – 10 المثال: كتب فوقها «نبين ان نحن» [ب] / ا ب: ا د، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / م: ر، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / قطر: أثبتها في الهامش [ب] – 11 ا ب ج: ا ن ب، ثم أثبت الصواب فوقها [ب] / إلى مثلث ا ن ب: أثبتها في الهامش [ب] / ا ب ج إلى قطعة: ناقصة [ل] / ونبين: ويتبين [ب] – 12 ا ن ب: ايت [ل] – 13 مجموع: مقطوع، ثم أثبت الصواب في الهامش [ب] / قطعتي: أثبتها في الهامش [ب] / ا ن ب: ايت [ل] – 14 ا ن ب: ايت [ل] / واحدًا: واحد [خ، ل] – 15 نسبتها: نسبتها [ب] – 16 وفي: في، ثم أضاف الواو فوقها [ب] – 17 د – فأقول: ناقصة [ل] / قاعدتاهما: قاعدتيها [خ] قاعدتها [ل] / متوازيتان: متوايتان [ل] – 19 ارتفاعها: ارتفاعها، ثم صححها فوقها [ب] / إلى ارتفاعها: ناقصة [ل] – 20 إلى ارتفاعها: أثبتها في الهامش [ب].



فلتكن قطعة من القطع المكافئ اب ج د هـ، وليكن اهـ يوازي ب د، والقطر القاطع لخطي اهـ ب د بنصفين ج ز ح. فنخرج خطًا يوازي اهـ ب د،/ وهو ج ط، ونخرج خطي د ط هـ ك يوازيان ج ح؛ فسطح ز د ط ج مثل المثلث الذي قاعدته ب د ورأسه ج، لأن ب د ضعف د ز. وأيضًا، سطح ح هـ ك ج مثل المثلث الذي قاعدته اهـ ورأسه ج. فلذلك تكون نسبة قطعة اج هـ إلى قطعة ب ج د كنسبة سطح ك ج ح هـ إلى سطح ط ج ز د. لكن هذه النسبة – من قبل تساوي زوايا هذين السطحين – هي مثل نسبة ح ج إلى ز ج مثناة بنسبة ح هـ إلى ز د. فنسبة قطعة اج هـ إلى قطعة ب ج د كنسبة ح ج إلى ز ج مثناة بنسبة ح هـ إلى ز د. ومن البيّن أن نسبة ح هـ إلى ز د – إذا ثنيت بالتكرير – كانت كنسبة مربع ح هـ إلى مربع ز د، التي هي مثل نسبة ج ح إلى ج ز. فإذن نسبة ح هـ إلى ز د – إذا ثنيت بالتكرير – كانت كنسبة ح ج إلى ج ز. فإذن نسبة قطعة اج هـ إلى قطعة ب ج د كنسبة ح ج إلى ج ز مثناةً بنسبة – إذا ثنيت بالتكرير – كانت كنسبة ج ح إلى ج ز.

خ – ١٣٤ – ظ

1 اب ج د هـ: اب ج د [ل] / يوازي: توازى [ل] – 2 اهـ ب د: أثبتها في الهامش [ب] / بنصفين: مكررة [ب] / فنخرج: فيخرج [ل] / يوازي: موازيًا لخط [ب] / ج ط: خط [ل] / ونخرج: ويخرج [ل] – 3 د ط: رط [ل] / هـ ك: كتب «هـ ط» في الهامش [ب] / ز د ط ج: رح خط [ل] زج د ط [ب] د ج [خ] / قاعدته ... ج: رأسه ج وقاعدته ب د [ب، ل] – 3-4 لأن ب د: لانه [ب] – 4 د ز: ر د [ل] / ح هـ ك ج: ح هـ ج ك [ب، خ، ل] – 5 اج هـ: احة [ل] / ك ج ح هـ: ك ح [ب، خ، ل] / سطح: ناقصة [ب] / ط ج ز د: ز ط [ب، خ، ل] – 6 ح ج: ح [ل] ج ح [ب] ح ر [خ] / ز ج: زح، ثم أثبت «ج» فوق الحاء [ب] / بنسبة: فنسبة، ثم أثبت الصواب فوق السطر [ب] – 7 ح ج: ج ح [ب]، ثم أثبت الصواب فوقها – 8 البين: النبين [ل] / مربع ح هـ إلى: أثبتها في الهامش [ب] / مربع: مربعى [ل] – 9 ز د: د ز [ب] / ح هـ: هـ ح [ب] – 10 ح ج: ح ح [ل] / ج ز: ج ن [ب] / اج هـ: احة [ل] / مثناة: متناه [ل] – 11 ج ح: حج [ل].

وعلى هذا / المثال نبيّن أن كل قطعتين من قطع / مكافئ هذه حالها؛ وذلك ما كان غرضنا أن نبينه. ب – ١٣٦ – ظ ل – ١٩٦ – ظ

تـمّ كتاب إبراهيم بن سنان بن ثابت في مساحة القطع المكافئ

1 أن: ناقصة [خ] / ما كان: مكان [ل] – 2 نبينه: تبينة [ل] – 3 إبراهيم: ابرهيم [ب، ل] / المكافئ: نجد بعدها «والحمد للّه ربّ العالمين، حمد الشاكرين وصلواته على نبينا محمد وآله، وحسبنا اللّه ونعم الوكيل تم تم تم» [ل]؛ «والحمد للّه ربّ العالمين، حمد الشاكرين وصلواته على سيّد المرسلين محمد وعترته الطاهرين، وحسبنا اللّه ونعم الوكيل» [خ]؛ نجد في [ب]: «كتبه أحمد بن محمد بن عبد الجليل بشيراز في ماهارهبهست سنة ثمان وثلاثين وثلاثمائة بزدجزديه وللّه الحمد والمنة»، وبلون أحمر: «عارضت بنسخة أخرى غريبة بنفسي هذه المقالة بشيراز».

الفصل الرابع

أبو جعفر الخازن

السطوح والأجسام ذات الإحاطات المتساوية

٤ـ١ مقدّمة

٤ـ١ـ١ أبو جعفر الخازن : اسمه، حياته، وأعماله

تكمُن أهمّيّة أعمال الخازن، بالنسبة إلى مؤرِّخي الرياضيات، في النتائج التي تتضمَّنها والميادين التي تشملها، وفي دلالاتها خاصَّة. كان الخازن مبتكراً في مجالات الجبر والهندسة ونظريّة الأعداد وعلم الفلك. غير أنّه، بين أبناء جيله، أفضلُ من يمثِّل تياراً للبحث ظهر في عصره، هو تيّار الرياضيين الذين عرفوا كيف يزاوجون ما بين الإرث الهندسيّ اليونانيّ والإرث الجبريِّ للقرن التاسع، فعرفوا بذلك كيف يبعدون حدود الأوّل موفرّين للثاني امتدادات جديدة. فإذا صدّقنا شهادة الخيّام، وهو الخبير في هذا الموضوع، يكون الخازن أوّل من استخدَم بنجاح القطوع المخروطيّة في حل معادلة جبرية تكعيبيّة[١]، ممهِّداً بذلك، لظهور هذا الفصل في نظرية المعادلات الجبرية (وهو الفصل الذي أسَّسه الخيّام لاحقاً). وكان الخازن، مع الخُجَندي، احد أوائل الذين ابتكروا التحليل الديوفنطي الصحيح[٢]. وشكّل عمله في علم الفلك، باعتراف نُقّاده مثل ابن عراق[٣] والبيروني، إحدى الإسهامات الأكثر تميُّزاً في زمانه.

وبالرغم من اتساع نتاجه، الرائد في أغلب الأحيان، ومن الاعتراف الذي حظي به من معاصريه وخلفائه، فإن المصادر الفهرسية لا تذكر شيئاً تقريباً عن حياته وأعماله. ولقد ظهرت حديثاً شكوكٌ حول اسمه أدَّت إلى اعتباره شخصين مختلفين، فحرمته من جزء مهم من عناوين مؤلّفاته، ونسبتها إلى كاتب آخر لم يكن قطّ موجوداً. لنبدأ إذن بموضوع اسم الخازن.

---

[١] انظر: "رسائل الخيّام الجبريّة"، حقّقها وترجمها وقدّم لها رشدي راشد وأحمد جبّار، جامعة حلب، معهد التراث العلمي العربي، ١٩٨١.
L'oeuvre algébrique d'Al-khayyām, établie traduite et analysée par R.Rashed et A.Djebbar (Alep, 1981).
في النص العربي، ص. ١، في النص الفرنسي، ص. ١١-١٢.

[٢] أي التحليل الديوفنطي بالأعداد الصحيحة (المترجِم). انظر:
R. Rashed, "L'analyse disphantienne au X^e siècle : l'exemple d'al-Khāzin", Revue d'histoire des sciences, 32 (1979) pp. 193-222.

[٣] انظر: ابن عراق، "تصحيح زيج الصفائح"، ضمن "رسائل متفرقة في الهيئة" (حيدر أباد ١٩٤٨). يكفي ان نقرأ ما كتبه ابن عراق لنُدرِك منزلة الخازن الرفيعة في ذلك العصر: "وإنْ كان بعض الناس يعظم أن يستدرك على مثل أبي جعفر في تأليفاته سهو وقع له...". انظر أيضاً ذكر البيروني للخازن في كتاب "تحديد نهاية الأماكن" (الحاشية ١٥، أدناه).

إنَّ اسمه الأكثر تداولاً في الفهارس هو أبو جعفر الخازن. تحت هذا الاسم يكرِّس له النديم مقالة مُختصرة (من سطرٍ واحد)[٤]، ويذكره عَرَضاً مرّتين[٥]. وبهذا الاسم أيضاً يشير إليه القِفطي[٦] وكذلك خلفاؤه مثل ابن عراق والبيروني والخيّام. ونلاحظ، بالرغم من ذلك، أنَّ اسمه يظهر على ثلاثة أشكال أخرى مهمة. يعود الشكل الأوّل إلى أبي نصر العُتْبي، المؤرّخ الذي عاصر الخازن، الذي يروي لنا قصة عن "أبي الحسين جعفر بن محمد الخازن"[٧]. أما الشكل الثاني، وهو أقلّ أهميّة، فقد ورد عند النديم الذي يضيف صفة "الخُراساني"[٨] إلى الاسم، مرّة واحدة، للإشارة إلى مكان إقامة الكاتب. والشكل الثالث أخيراً، هو الأكثر حداثة لأنّه يعود إلى القرن الثاني عشر؛ فلقد أورد السموأل اسم هذا الرياضيّ كما يلي: "أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن"[٩]. وهذا الاسم، الذي ذكره السموأل، تحمله كتب عديدة للخازن وصلت إلينا[١٠]. لقد أورد أبو نصر العُتْبي، في الواقع، نفس الاسم مع فارق تبديلَيْن. لكن، وفي حين أنّ الرياضيّين والمؤرّخين القدامى لم يراودهم أي شكّ حول هوية هذه الشخصية، اعتقد البعض ابتداءً من ويبك (*F. Woepcke*)[١١]، أنّ بإمكانهم إثبات وجود رياضيّين هما: أبو جعفر الخازن وأبو جعفر محمد بن الحسين. وقد استطاع عادل أنبوبا مؤخّراً أن يثبت أنّ هذين الاسمين يشيران إلى شخص واحد بعينه[١٢].

ولكنّنا، بعد إزالة هذا الالتباس وإثبات هوية هذا المؤلِّف، نواجه قلّة المعلومات حول التواريخ الخاصّة به و حول أعماله. وهنا سنتوجه إلى المؤرِّخين وإلى الرياضيّين أيضاً. يُخبرنا النديم[١٣] أنّ تلميذ الكِندي، الأديب والفيلسوف أبا زيد البَلْخي أرسل إلى الخازن شرحه

---

[٤] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدّد (طهران ١٩٧١)، صفحة ٣٤١.

[٥] المرجع السابق، الصفحتان ١٥٣و٣١١.

[٦] انظر:القِفطي، تاريخ الحكماء، تحقيق يوليوس ليبرت (Julius lippert) (لايبزغ، Lepzig ١٩٠٣) ص. ٣٩٦.

[٧] "تاريخ أبي نصر العُتبي"، على هامش "شرح اليميني المُسَمّى الفتح الوهبي" للمنيني (القاهرة ١٨٧٠م/١٢٨٦هـ)، المجلد الأوّل، صفحة ٥٦.

[٨] انظر: النديم، الفهرست، صفحة ٣٢٥.

[٩] انظر: السموأل، "في كسف عُوار المنجّمين"، مخطوطة لايدن ٩٨.

[١٠] انظر: "مختصر مستخرج من كتاب المخروطات بإصلاح أبي جعفر محمد بن الحسين الخازن"، مخطوطة اوكسفورد، بودلاين (Bodleian)، هنتغتون (huntingtan) ٢٣٧. راجع نسخة أخرى من هذا النصّ تحمل الاسم نفسه للكاتب، هي مخطوطة الجزائر، المكتبة الوطنية، ١٤٤٦، ص. ١٢٧و. لدينا أيضاً "تفسير صدر المقالة العاشرة من أقليدس وضعه "أبو جعفر محمد بن الحسين الخازن". مخطوطة اسطنبول، فيض الله ١٣٥٩، صفحة ٢٤٥و، وكذلك مخطوطة تونس، المكتبة الوطنية ١٦١٦٧، ص. ٦٥ظ. وأخيراً، تحمل الرسالة التي نحقّقها هنا الاسم نفسه.

[١١] انظر:

F.Woepcke, “Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de pise", Atti Nuovi Lincei, 14 (1861), pp. 301-324.

[١٢] راجع مقال عادل أنبوبا

A.Aubouba, "L’algèbre arabe aux IX^{e} et X^{e} siècles : Aperçu général", *Journal for the history of arabic science*, 2 *(1978), pp. 66 – 100.*

[١٣] انظر: النديم، "الفهرست"، ص. ١٥٣ و ص. ٣١١.

لكتاب "السماء والعالَم" لأرسطو. ولكنّنا نعلم أنّ البَلْخي[١٤] تُوفـِّي عام ٣٢٢ هـ/ ٩٣٤م، مما يوفـّر لنا أوّل مَعْلَم، فقد يكون تاريخ ميلاد الخازن في نهاية القرن الثالث للهجرة تقريباً.

من جهة أخرى، ووفقاً للبيروني، كان الخازن يشاهد رصد ارتفاع الشمس، في نصف نهار يوم الأربعاء الثاني عشر من شهر ربيع الآخر سنة ثمانٍ وأربعين وثلاثمائة للهجرة[١٥]، الذي قام به الرياضيّ وعالم الفلك الهَرَوي، وهذا يعني أنّه كان ما يزال ناشطاً، على الأقلّ حتى عام ٩٥٩للميلاد. فضلاً عن ذلك، يورد المؤرخ العُتبي[١٦] قصة رواها الخازن بصدد مجيء سِبُكتِجِين (*Sebüktijīn*) إلى بُخارى في عهد الساماني منصور بن نوح، أي حوالى الخمسينيّات من القرن الثالث للهجرة. وفي القرن السابع عشر كتب المَنِيني، شارح تاريخ العُتْبي، أنّ الخازن كان وزيراً عند السامانيين[١٧]، وهذا ما لا نستطيع تأكيده، لكنّه يوحي بأنّ الخازن كان على صِلات مع السلطة. وتتوافق هذه الرواية مع المعلومات التي وصلت إلينا من المؤرِّخ ابن الأثير ومن الأديب التوحيدي. فوفقاً للأوّل[١٨] كان الخازن في عام ٩٥٣م/٣٤٢ هـ، مبعوثاً من طرف عليّ بن محتاج، قائد حملة الأمير الساماني نوح بن نصر، على البويهي ركن الدولة، من أجل التفاوض حول وقف المعارك. يقول ابن الأثير: "وكان الرسول أبا جعفر الخازن صاحب كتاب "زيج الصفائح"، وكان عارفاً في علوم الرياضة". تبيّن هذه الشهادة بوضوح أنّ الخازن كان في ذلك الوقت رجلاً ناضجاً، يتمتع بثقة الأمير ويحظى بشهرة علميّة راسخة. ويؤكّد التوحيدي هذه الصورة عن الخازن في جميع نقاطها، عندما يذكر أنّ الخازن أصبح في فترة لاحقة، في بلاط ركن الدولة، في دولة البويهيين، المنافسة لدولة السامانيين، في حماية الوزير الشهير ابن العميد[١٩]. ونذكّر هنا بأنّ الانتقال، من بلاط إلى آخر، كان ممارسة شائعة ومقبولة بين العلماء والأدباء، وهي تعود في الأصل

---

[١٤] ياقوت الحموي، "كتاب إرشاد الأريب إلى معرفة الأديب (معجم الأدباء)"، تحقيق مَرغوليوث (*D. S. Margoliouth*) (لندن، ١٩٢٦)، المجلد السابع، ص. ١٤١، ص.١٥٠ – ١٥١.

[١٥] البيروني، " كتاب تحديد نهاية الأماكن لتصحيح مسافات المساكن" . حقـّقه بولغاكوف (P. Bulgakog) وراجعه إمام إبراهيم أحمد، في مجلة معهد المخطوطات، ٨ (١٩٦٢)، ص. ٩٨.

[١٦] العُتبي، المجلد الأول، ص. ٥٦.

[١٧] انظر المرجع السابق.

[١٨] ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، نسخة مصوَّرة (بيروت، ١٩٧٩) استناداً إلى نسخة كارولوس يوهانس تورنبرغ (*Carolus Johannes Torenberg*) (لايدن، ١٨٦٢)، تحت عنوان "*Ibn–El–Athiri chronicon quod perfectissimum inscribitur*"، المجلد السادس (انظر "أحداث العام ٣٤٢")، ص ٢٤٤.

[١٩] التوحيدي، "مثالِب الوزيرين الصاحب بن عبّاد وابن العَميد"، تحقيق محمد الطنجي (بيروت، ١٩٩١). الصفحة ٣٤٦. من أجل معلومات اخرى عن الخازن، انظر المقالات في *Dictionarry of Scientific Biography*، التي كرّسها له دولد سامبلونيوس (*Y. Dold Samplonius*)، (New York,1973)، المجلد السابع، الصفحتان ٣٣٤ – ٣٣٥، انظر أيضاً مقال خوليو سامسو (J. Samso) في الموسوعة الإسلامية، النشرة الثانية، المجلـّد الرابع، ص. ١٢١٥-١٢١٦.

إلى تنافس بين البلاطات يخلق مناخاً جيّداً لتطوّر الفنون والعلوم (ولنا في تنقّلات المتنبي مثالٌ على ذلك).

باختصار، يبدو أنّ الخازن قد وُلِد في بداية القرن العاشر الميلاديّ، وأنّه كان لا يزال على قيد الحياة في الستينيّات من ذلك القرن. وكان عالماً معترفاً به ومشهوراً؛ ولا بدّ أنّه كان من أصحاب المراتب العالية في السلطة، إذ إنَّ اسمه قد حفظ في المؤلّفات الأدبيّة والتاريخيّة. هنا ينتهي ما توصّلنا إلى معرفته عن حياته وأعماله.

٤-١-٢ مؤلَّفات الخازن في السطوح والمجسّمات ذات الإحاطات المتساوية

لا نعرف للخازن في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، سوى الكتاب الذي نحقّقه هنا. لكنّ هذا الكتاب، وكما يشير عنوانه، جزءٌ من شرح وضعه الخازن للمقالة الأولى من المجسطي؛ فقد ورد العنوان كما يلي: "نقلناه من شرح أبي جعفر محمّد بن الحسين الخازن للمقالة الأولى من المجسطي". ويقدِّم لنا البيروني[٢٠] شهادة مزدوجة تؤكد وجود هذا الشرح، كما تؤكّد وجود توسيع لهذا الشرح؛ فهو قد لا يقتصِر على النصّ الموجود بين يدينا. لم يكن هذا النصّ إذاً كتاباً مستقلّاً مخصصاً لدراسة مسألة السطوح ذات المحيطات المتساوية لذاتها، لكنّه إسهام من رياضيّ لبرهان قضية عرضها بطلميوس، لكنّه لم يثبتها. فالهدف محدود، وهو يختلف من حيث طموحه عن نصّ ابن الهيثم، كما سنرى لاحقاً.

وصل إلينا نصُّ كتاب الخازن، حسب معلوماتنا الحاليّة على الأقلّ، في مخطوطة واحدة توجد ضمن المجموعة ٤٨٢١ (٨) في المكتبة الوطنية في باريس[٢١]. وهو يحتل الصفحات ٤٧ظ-٦٨ظ. وبخلاف كتابات أخرى في هذه المجموعة التي خطّها نسّاخٌ واحد، فإن نصّ الخازن غير مؤرَّخ. لكنّ الجمَل الختامية لهذه الكتابات لا تسمح بأي شكّ في هذا الشأن؛ فقد نُسِخ كتاب الخازن هذا عام ٥٤٤هـ/١١٤٩م، في حَمَدان أو في أسدأباد، والنسّاخ هو حسين بن محمد بن علي. المجموعة ورقية، عدد الأوراق فيها ٦٨، قياسها ٢٣٠×١٥٠ ملم،

---

[٢٠] البيروني، "القانون المسعودي"، نشرة Osmania Oriental Publications Bureau، ثلاثة مجلدات (حيدرأباد، ١٩٥٤ – ١٩٥٦)، المجلّد الثاني، ص. ٦٥٣، و"تحديد نهاية الأماكن"، ص. ٩٥.

[٢١] انظر:
G. Vajda, *Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque Nationale de Paris*, (Paris,1953).
راجع أيضاً التتمات والتصحيحات التي أضافها المؤلف الفقيد إلى كتابه، والمحفوظة في المكتبة الوطنية.

وتتضمّن كل صفحة ١٨ سطراً. الترقيم هو أكثر حداثة من النسخ. كانت المجموعة في إسطنبول في القرن الخامس عشر، وبقيت هناك، على الأرجح، حتى نهاية القرن السابع عشر، قبل أن تُشَكّل جزءاً من محفوظات المكتبة الوطنية في باريس.

كُتِبت هذه المخطوطة الوحيدة بعناية كبيرة بالخطّ النسخي الواضح تماماً. ولقد كتبت الإضافات والشطبات كلّها بيد النسّاخ، خلال عمليّة النسخ على الأرجح. لا شيء يسمح، إذاً، بالافتراض أنّ النسّاخ قد قابل نسخته، بعد إنجازها، مع النسخة التي نقل عنها. وقد حقّق هذا النصّ وترجمه إلى الإنكليزية ر. لورش (*R.Lorch*)[٢٢]. والتحسينات، البالغ عددها حوالى العشرين، التي نستطيع أن نُدخِلُها إلى عمل لورش المتقن، لا تبرِّر القيام بتحقيق جديد، لو لم يكن مشروعنا في هذا الكتاب يهدف إلى ضم جميع المساهمات التي وصلتنا في هذا الموضوع.

٤-٢ الشرح الرياضي

٤-٢-١ مقدّمة

لقد أثار اهتمامَ الرياضيين كما أثار اهتمامَ علماء الفلك أن يُثبَتَ أنَّ القرصَ هو السطحُ المُستويُ الأعظم مساحة من بين جميع السطوح المستوية التي لها محيط معلوم، وأنّ الكرة هي المجسَّم الأعظم حجماً، من بين جميع المجسّمات التي تكون مساحات إحاطاتها مساوية لمساحة معلومة. فقد كان علماء الفلك بحاجة إلى هذا البحث في "الأقصويّات"، لإثبات كرويّة السماء والعالم. أمّا الرياضيّون فقد عالجوا هذا الموضوع، على الأرجح ، لإرضاء علماء الفلك. وعلى أيّ حال يبدو أنّ هذه المسألة في الإحاطات المستوية والمجسَّمة، وعلى امتداد مرحلة طويلة من تاريخها، كانت مرتبطة بهذا المنظور الهيئويّ الذي أمَّن لهذه المسألة الاستمرار والخصوبة. وسنعرض تاريخ هذه المسألة، بالتفصيل، في مجلّد لاحق من مؤلّفِنا هذا، أمّا الآن فسنكتفي ببعض الأسماء وببعض العناوين. نبدأ بخَلَف أرشيمدس، الرياضيّ اليونانيّ زينودوروس (*Zénodore*)، وبكتابه المفقود "في الأشكال المستوية ذات الإحاطات

---

[٢٢] راجع
R. Lorch "Abū ja'afar al khāzin on Isoperimetry and the Archimedian Tradtion", Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen Wisserschaften, 3 (1986), pp. 150 – 229.

المتساوية". يذكر ثيون الاسكندري (*Théon*)، لحسن الحظ، هذا الكتابَ في مؤلَّفه "شرح المقالة الأولى من المجسطي"[٢٣]، عند الحديث عن صيغة شهيرة لبطلميوس هي التالية:

" ومن أجل أن الأشكال الكثيرة الأضلاع التي تكون دوائر متساوية أكثرها زوايا أعظمها عِظماً، تكون الدائرة أعظم الأشكال البسيطة وتكون الكرة أعظم الأشكال المجسّمة، فالسماء أعظم مما سِواها من الأجسام "[٢٤].

ومن بعد ثيون، لم يعد بإمكان شارحي المجسطي تجاهُل هذه الصيغة وعدم تقديم البرهان عليها. كما أنّ رياضيين آخرين أبدوا اهتماماً بهذه المسألة، على غرار إيرن الاسكندري، وبابّوس (*Pappus*) في المقالة الخامسة من "المجموعة الرياضية"[٢٥]. لكنّ ما يهمّنا هنا هو أنّ نصّ ثيون، وكتاب "المجسطي"، كانا معروفَين من قِبَل الرياضيين وعلماء الفلك في بغداد في القرن التاسع، وأنّهما أحدثا تقليداً في البحث بدأ مع الكِندي. هذا الأخير قال إنّه عالج هذه المسألة في مؤلَّفه "كتاب في الأُكَر"[٢٦]، في حين أنّ ابن أبي أصيبعة، المفهرس من القرن الثالث عشر، ينسب إليه كتاب "الكُرة هي أعظم الأشكال المجسّمة"[٢٧].

في هذا التقليد، ستندرج وبأشكال وأدوار مختلفة، أسماء ابن هود، وجابر بن أفلح...، وبخاصة الخازن وابن الهيثم، وهي الشخصيّات الأساسيّة بحسب معلوماتنا الحاليّة. تُظهر قراءة إسهامات هذين الأخيرين المسافة الكبيرة التي تفصِل بين هذين الرياضيَّين، وإن كانت أعمالهما تشكّل جزءاً من نفس التقليد الواحد. ففي حين كان الأوّل يعرض ما تمَّ الحصول عليه في الماضي، نرى الثاني، بعد إتمامه لهذا العرض نفسه، يلامس ما يُمكن القيام به في

---

[٢٣] انظر:

A. Rome, *Commentaries de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste, texte établi et annoté, t. II : Théon Alexandrie, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* (Vatican, 1936),
ص. ٣٥٥ وما يليها

[٢٤] هذه هي الترجمة العربية التي قام بها الحجّاج عام ٢١٢ هـ/٧٣٨م : مخطوطة لايدن ٦٨٠، ص. ٣ظ – ٤و؛ انظر:
J. L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. I. syntaxis mathematica* (Leipzig,1898), p.13, lignes 16–19.

[٢٥] راجع الحاشية ١، أعلاه، وكذلك ترجمة فير إيك (P. Ver Ecke):
Pappus d' Alexandrie, *La Collection Mathématique* (Paris et Bruges, 1933),
المجلّد الأوّل، ص. ٢٣٩ وما يليها.

[٢٦] يكتب الكندي في كتابه "في الصناعة العظمى"، الذي حققناه استناداً إلى مخطوطة إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٠، ص. ٥٩ظ ما يلي:
"وأيضاً، لأنّ أعظم الأشكال التي في الدائرة المتساوية الأضلاع أكثرُها زوايا، وأعظمَ [في المخطوطة، أعظَمَها] الأشكال المجسّمة المعتدلة المتساوية السطوح الكرةُ، كما أوضحنا ذلك في كتابنا "في الأكر"، تكون السماء إذاً [في المخطوطة، إذ] هي أعظم مما سواها من الأجسام كريّة، لأنّه ينبغي أن يكون لها الشكل الأعظم".

[٢٧] ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطباء"، تحقيق أ. مولر (*A. Müller*) ، ثلاثة مجلدات (القاهرة/كونيغسبرغ، ١٨٨٢-١٨٨٤). المجلد الأول، صفحة ٢١٠، ١٨، منشورات رضا (بيروت، ١٩٦٥) ص. ٢٨٩، ٢٧-٢٨.

المستقبل. لكن، ولكي نفهم، ولو جزئيّاً، معنى هذا القول الغامض، لنبدأ بتحليل نصّ الخازن. ينطلق هذا الأخير من صيغة بطلميوس، ويقترح إثباتها، لا بواسطة "الحساب"، بل بوسائل عِلم الهندسة. تتمثل الفكرة المركزية، التي يبدو أنّ الخازن يعيها تماماً، في أنّ الشكل الأكثر تناظراً، من بين جميع الأشكال المحدَّبة من نوع معلوم (مثلّث، معيّن، متوازي أضلاع،...)، يحقّق نهاية قصُوى (أي عظمى أو صغرى) لمقدار ما (مساحة، نسبة بين مساحتين، محيط، ...). طريقة العمل هي التالية: نختار قيمة ما لوسيط ونغيِّر الشكل لنجعله متناظراً بالنسبة إلى خط مستقيم ما. فعلى سبيل المثال، نُثبِّت محيط متوازي الأضلاع، ثمّ نحوّله إلى معيّن ليصبح متناظراً بالنسبة إلى أحد قطريه؛ فتكبُر في هذه العملية مساحة متوازي الأضلاع.

أمّا فيما يتعلّق بكتاب الخازن، فإنّه ينقسم إلى قسمين، أحدهما مخصّص للأشكال المستوية ذات المحيطات المتساوية، والآخر للأشكال المجسَّمة ذات السطوح المتساوية في مساحاتها. ويتعلّق هذان النوعان من المسائل، بمفاهيم لم تُذكر وبمسلّمات لم يتمّ التصريح عنها. من بين هذه المفاهيم هناك مفهوم التحدّب: فمُتعَدِّدات الأضلاع ومُتعَدِّدات السطوح التي تتناولها هذه الرسالة هي محدّبة. ومن بين المسلّمات المُضمَرة نذكر بالتحديد:

A_1 : محيط أيّ مُتعَدِّد أضلاع محدّب محاط بالدائرة، أصغر من محيط الدائرة.

A_2 : محيط أيّ مُتعَدِّد أضلاع محدّب محيط بالدائرة، أكبر من محيط الدائرة.

A_3 : مساحة أيّ مُتعَدِّد سطوح محدّب محاط بالكُرة، أصغر من مساحة الكُرة.

A_4 مساحة أيّ مُتعَدِّد سطوح محدّب محيط بالكُرة، أصغر من مساحة الكُرة.

وسنلاحظ أنّ الخازن يستخلص من المسلّمتين A_1 و A_2 النتائج المتعلقة بالمساحات في المُقدّمة ٨، ويستخلص من A_3 وA_4 النتائج المتعلقة بالأحجام في القضية ١٩.

نتناول الآن قِسمَي الكتاب، تباعاً.

٤-٢-٢ السطوح المستوية المتساوية في محيطاتها

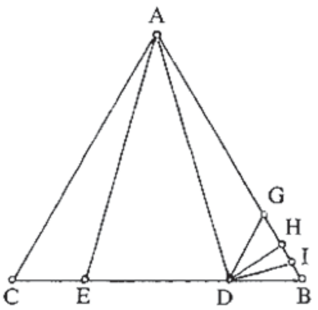
احتاج الخازن إلى ثماني مقدمات وقضيّة واحدة ليثبت مبرهنة السطوح المستوية المتساوية في محيطاتها. المقدّمات الأربع الأولى تتعلق بالمثلّثات المتساوية الساقين وبالمثلّثات المتساوية الأضلاع، وتبيّن أنّ مساحة المثلث متساوي الأضلاع هي أكبر من مساحة أي مثلث متساوي

الساقين له نفس المحيط. خلال هذا البرهان يثبت الخازن نتيجة سبق أن بيّنها كلٌّ من زينودوروس وبابّوس، هي التالية: "من بين كلّ الأشكال المتساوية المحيطات والتي لها العدد نفسه من الأضلع، يكون الأعظم (مساحةً) هو ذلك الذي تكون أضلعه متساوية وزواياه متساوية". وفي المُقدّمة ٦، يقارن متوازي الأضلاع مع مربّع له نفس المحيط. وفي المُقدّمة ٧، يأخذ مثال مُخَمَّسٍ (خماسي أضلاع) متساوي الأضلاع، ويستخلص منه مخمّساً غير متساوي الأضلاع وله نفس المحيط، ويبيّن أنّ مساحة الثاني أصغر من مساحة الأوّل. وينتقل أخيراً في المُقدّمة ٨، إلى مُتعَدِّدات الأضلاع المحدّبة التي تقبل دائرة محاطة ودائرة محيطة.

بعد ذلك يُصبِح كلّ شيء جاهزاً لإثبات خاصية مُتعَدِّدات الأضلاع ذات المحيطات المتساوية والمؤلّفة من مضلّعات متساوية الأضلاع، قبل الانتقال أخيراً إلى المبرهنة حول الدائرة. فلنتابع، خطوة خطوة، هذا المنهج التدريجيّ الذي تعمّد الخازن اتباعه.

المُقدّمة ١- ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع و ADE مثلّثاً متساوي الساقين (بحيث تقع النقطتان D و E على القطعة المستقيمة BC)، فيكون: $AB - AD < AD - BE$ ،

و $(AB - AD) + (AD - BE) = AB - BE = BD$ و $BE.9AB < (AB + BE + AE)^2$.[٢٨]



<u>البرهان</u>: تقع النقطة D بين B و C، فيكون $AD < AB$ (لأنّ الزاوية $\widehat{ADB}$ منفرجة) و $AD > DC$ (لأنّ $\widehat{ACD} > \widehat{CAD}$)، فيكون $AD > BE$.

إذا أخرجنا الخطّ DG موازياً لـِ AC، يكون لدينا $AG = CD = BE$ و $GB = DB$ ، وإذا كان $DH \perp AB$ ، يكون لدينا $BH = HG$ و $AH < AD$.

لتكن النقطة I على الخطّ AB بحيث يكون $AI = AD$ ، فيكون $AH < AI < AB$ ، وتكون النقطة I بين B و H، فيكون $BI < IG$ ؛ ومن جهة أخرى، يكون لدينا:

$$BI = AB - AD \quad \text{و} \quad GI = AI - AG = AD - BE$$

[٢٨] لا يعلن الخازن هذه النتيجة في صيغة المقدّمة، لكنّه يُثبتها في برهانه، ويستخدمها في المقدمة ٢.

فيكون $(AB-AD)<(AD-BE)$ و $(AB-AD)+(AD-BE)=BD$، فيمكن أن نكتب:

$$AB-BE+AB-AD=BG+BI=2AB-(AD+BE)$$

و $AB-BE+AD-BE=BD+IG=(AB+AD)-2BE$، لدينا إذاً:

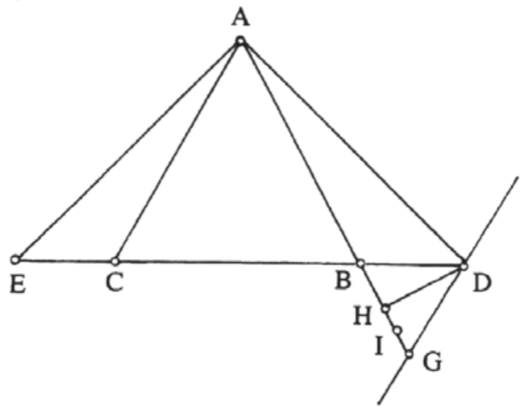
$$2AB-(AD+BE)<(AB+AD)-2BE$$ ،

وبالتالي: $3AB-(AB+BE+AD)<(AB+BE+AD)-3BE$

ونقسم الطرف الأيسر من هذه المتباينة على $AB+BE+AD$ والثاني على $3BE$ (مع العلم بأنّ $AB+BE+AD>3BE$)، فنحصل على: $\frac{AB+BE+AD}{3BE}<\frac{3AB}{AB+BE+AD}$،

وعلماً بأنّ $AE=AD$، يكون لدينا: $BE.9AB<(AB+BE+AE)^2$.

ملاحظة ـ الشكل الهندسيّ من جهة، واستدلال الخازن من جهة ثانية، يفترضان أنّ النقطتين E و D تقعان على الخط المستقيم BC. إذا كانت D و E على المستقيم BC، لكن خارج القطعة BC (حيث $DE>BC$)، يكون لدينا $AD>AB$ لأنّ الزاوية $\widehat{ABD}$ منفرجة و $BE>AE$، لأنّ $\widehat{EAB}>\widehat{ABE}$، فيكون $BE>AD$. المستقيم الخارج من النقطة D والموازي لـ AC يقطع AB على النقطة G ولدينا $AG=CD=BE$ و $GB=GD$.



لتكن النقطتان H و I على BG بحيث يكون $DH\perp BG$ و $AI=AD$؛ يكون لدينا:

$AB<AH<AI<AG$، ومن جهة أخرى: $BI=AD-AB$ و $GI=AG-AD=BE-AD$.

ويكون لدينا $BI>IG$، فيكون $AD-AB>BE-AD$، و

$$(AD-AB)+(BE-AD)=BG=BD=BE-AB.$$

فنستخلص:

$$BG + BI = (BE - AB) + (AD - AB) = (BE + AD) - 2AB$$

$$BD + IG = (BE - AB) + (BE - AD) = 2BE - (AB + AD)$$ ؛

ويكون معنا: $(BE + AD) - 2AB > 2BE - (AB + AD)$ ،

ومنها $(AB + BE + AD) - 3AB > 3BE - (AB + BE + AD)$.

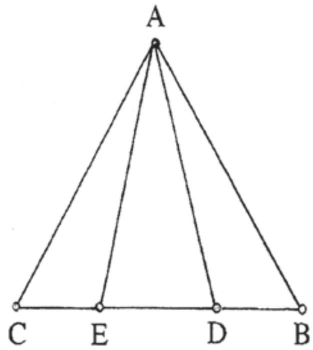
لنقسم الطرف الأيسر من هذه المتباينة على $3AB$ والثاني على $AB + BE + AD$ (مع العِلم أنّ $3AB < AB + BE + AD$)، فنحصل على: $\frac{AB + BE + AD}{3AB} > \frac{3EB}{AB + BE + AD}$،

وبالتالي، إذا أخذنا بالاعتبار أنّ $AD = AE$، يكون: $BE.9AB < (AB + BE + AE)^2$.

لذا، مهما كان وضع المثلّث AED بالنسبة إلى المثلّث ABC، يكون لدينا:

$$BE.9AB < [per.(ABE)]^2$$ *

المُقدّمة ٢- في ظلّ الشروط نفسها، يكون لدينا: $\frac{aire(ADE)}{aire(ABC)} > \frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2}$ **



<u>البرهان</u>: استناداً إلى المُقدّمة ١، يكون لدينا:

$[per.(ABE)]^2 > BE.9BC$ و $[per.(ADC)]^2 > DC.9BC$.

إذا أضفنا المتباينتين السابقتين، طرفاً إلى طرف، يصبح لدينا:

$[per.(ABE)]^2 + [per.(ADC]^2 > 9BC.(BE + DC) > 9BC^2 + 9BC.ED$، فيكون

(١) $[per.(ABE)]^2 + [per.(ADC)]^2 > [per.(ABC)]^2 + 9BC.ED$؛

---

* Per هي مختصر لكلمة périmetre التي تعني "محيط"، فالمقصود بـ $per.(H)$ هو محيط الشكل H مهما كان هذا الشكل المغلق H.

** aire = مساحة، فالمقصود بـ $aire(H)$ هو مساحة الشكل H مهما كان هذا الشكل المغلق H.

لكن $per.(ABE)+per.(ADC)=per.(ABC)+per.(ADE)$ ، مع

$per.(ABC)\neq per.(ADE)$ و $per(ABE)=per(ADC)$.

فنستخلص

(٢) $[per.(ABC)]^2+[per.(ADE)]^2>[per.(ABE)]^2+[per.(ADC)]^2$ [٢٩]،

ومن المتباينتين (١) و (٢) نحصل على: $[per.(ADE)]^2>9BC.ED$

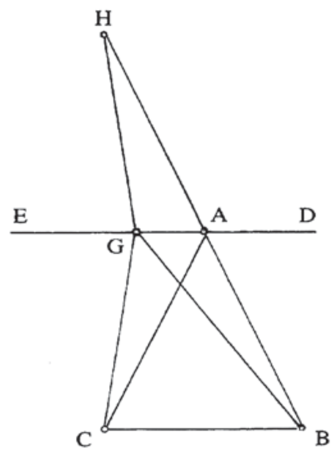
و $\frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2}>\frac{9BC.ED}{[per.(ABC)]^2}$ ، لكن $\frac{aire(ADE)}{aire(ABC)}=\frac{ED}{BC}=\frac{9BC.ED}{[per.(ABC)]^2}$ ،

لأنّ المثلثين ADE وABC لهما قمة مشتركة، وقاعدتان يحملهما خط مستقيم مشترك؛ فيكون

لدينا: $\frac{aire(ADE)}{aire(ABC)}>\frac{[per.(ADE)]^2}{[per.(ABC)]^2}$.

ملاحظة: الاستدلال السابق صالح أيضاً في الحالة التي يكون فيها $DE<BC$.

المُقدّمة ٣- إذا كان ABC مثلثاً متساوي الساقين قمّته A، و G نقطة على المستقيم المُخرَج من A والمتوازي مع BC، يكون: $GB+GC>AB+AC$.

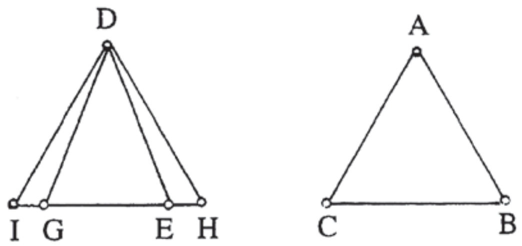


البرهان: نمدِّد BA على استقامة حتى H، بحيث يكون $AH=AB$ ، فيكون المثلّثان AHG وCAG متساويين و $GH=GC$ فنستخلص: $GB+GC=GB+GH>BH$، يكون إذاً:

$$GB+GC>AB+AC$$

[٢٩] لتكن b'، a'، b، a، أربعة أعداد بحيث يكون: $a=b$ و $a'\neq b'$ و $a+b=a'+b'$. يكون معنا $2a=a'+b'$ و $4a^2=a'^2+b'^2+2a'b'$ ؛ لكن $a'^2+b'^2>2a'b'$ لأنّ $(a'-b')^2>0$ ، فيكون $4a^2<2(a'^2+b'^2)$ ، وبالتالي $2a^2<a'^2+b'^2$ ، أي $a^2+b^2<a'^2+b'^2$

المُقدّمة ٤- إذا كان لدينا مثلث متساوي الأضلاع ABC ومثلث متساوي الساقين DEG $(DE=DG)$ لهما نفس المحيط، يكون $aire(ABC) > aire(DEG)$.

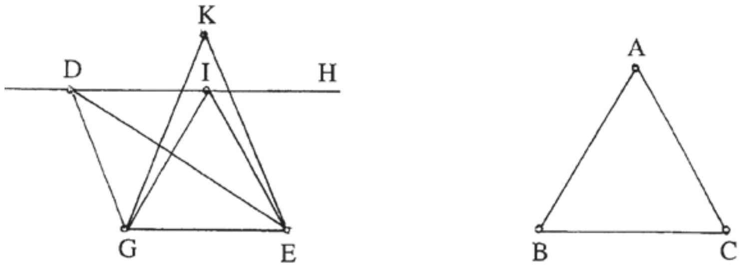


البرهان: لتكن H و I نقطتين من الخط المستقيم DE بحيث يكون المثلث DHI متساوي الأضلاع، فيكون لدينا وفق المُقدّمة ٢: $\frac{aire(DGE)}{aire(DHI)} > \frac{[per.(DGE)]^2}{[per.(DHI)]^2}$،

لكن $per.(DGE) = per.(ABC)$، ومن جهة أخرى، فإنّ المثلثين ABC و DHI متساويا الأضلاع، فيكون $\frac{aire(ABC)}{aire(DHI)} = \frac{[per.(ABC)]^2}{[per.(DHI)]^2}$، فنحصل على: $\frac{aire(DGE)}{aire(DHI)} > \frac{aire(ABC)}{aire(DHI)}$،

وبالتالي: $aire(ABC) > aire(DGE)$.

المُقدّمة ٥- إذا كان مثلث متساوي الأضلاع ABC ومثلث اختياريّ DEG متساويي المحيطَين، يكون: $aire(ABC) > aire(DEG)$.



البرهان: توجد نقطة I على المستقيم DH المُوازي لِـ GE بحيث يكون: $IG = IE$، واستناداً إلى المُقدّمة ٣: $IE + IG < DE + DG$، فيكون: $per.(IEG) < per.(DEG)$،

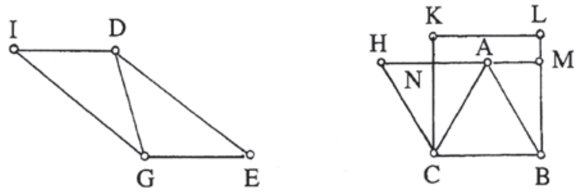
لكن $aire(IEG) = aire(DEG)$. لتكن النقطة K بحيث يكون $KG = KE$ و

$per.(KGE) = per.(DGE) = per.(ABC)$، فيكون: $aire(KGE) > aire(DGE)$،[٣٠]

فيكون لدينا، استناداً إلى المقدّمة ٤، $aire(ABC) > aire(KGE)$،

وبالتالي: $aire(ABC) > aire(DEG)$.

المقدّمة ٦- نأخذ مثلّثاً أيّاً كان، DEG ومثلثاً متساويَ الأضلاع ABC، لهما نفس المحيط، ونُكمل رسم متوازي الأضلاع $DEGI$ والمعيّن $ABCH$. فيكون المعيّن BH أعظم مساحة من متوازي الأضلاع EI.



<u>البرهان</u>: رأينا أنّه إذا كان $per.(DEG) = per(ABC)$، يكون $aire(ABC) > aire(DEG)$؛

لكنَّ: $aire(DEGI) = 2aire(DEG)$، $aire(ABCH) = 2aire(ABC)$،

فيكون: $aire(ABCH) > aire(DEGI)$. لكن بشكل عام: $per.(ABCH) \neq per.(DEGI)$،

فالمعيّن $ABCH$ ومتوازي الأضلاع $DEGI$ ليسا متساويي المحيطَين إلّا إذا افترضنا أنَّ $DG = AC$.[٣١]

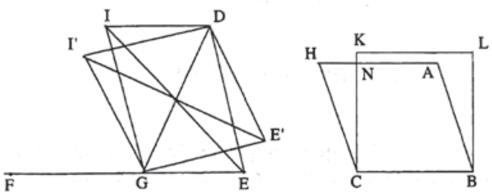
---

[٣٠] لقد أثبت الخازن إذاً النتيجة التالية بدون أن يعرضها: إذا كان لدينا مثلث اختياريّ ومثلث متساوي الساقين لهما نفس المحيط وقاعدتين متساويتين، فإن مساحة المثلث المتساوي الساقين هي أكبر من مساحة المثلث الآخر. لنلاحظ مع ذلك أنّ مساحة مثلث إختياري ليست أقل من مساحة أي مثلث متساوي الساقين وله نفس المحيط (لأنّ هناك مثلّثات متساوية الساقين لها محيط معلوم وتكون مساحتها معدومة تقريباً).

[٣١] متوازي الأضلاع والمعيّن اللذان بناهما الخازن ليس لهما بشكل عام نفس المحيط: $per.(ABCH) = per.(EDGI) \Leftrightarrow 2AC = ED + EG$

لكن لدينا، وفقاً للفرَضيّة $3AC = ED + EG + DG$، لذا لا بدّ من الشرط الإضافي $AC = DG$.

ونستطيع تناول الاستدلال مجدّداً دون إدخال المثلث المتساوي الأضلاع ABC. انطلاقاً من متوازي الأضلاع $DEGI$، نَبني معيّناً له نفس المحيط. يفصل القطر DG الشكل إلى مثلثين متساويي المساحة: $aire(DGI) = aire(DGE)$.



إذا اخذنا النقطتين I' و E' على العمود المنّصف للقطر DG بحيث يكون: $I'D = I'G = E'D = E'G = \frac{1}{2}(DE + EG) = \frac{1}{2}EF$

يكون معنا عندئذ معيّن $DE'GI'$ له نفس محيط $DEGI$. لكن، استناداً إلى ملحوظة المقدّمة ٥، لدينا $aire(DE'G) > aire(DEG)$، فيكون $aire(DE'GI') > aire(DEGI)$، ليكن إذاً $ABCH$ معيناً مساوياً لِـ $DE'GI$ وليكن $BCKL$، المربع المبنيّ على BC، فيكون

لتكن القطعة CK عمودية على BC بحيث يكون $CK=BC$، ولتكن القطعة KL المتوازية مع CB بحيث $KL = CB$. المستقيم AH يقطع CK في N و BL في M. يكون لدينا:

$aire\,(BCKL) > aire\,(MBCN)$ و $aire\,(BMNC) = aire\,(ABCH)$

فيكون: $aire\,(BCKL) > aire\,(ABCH) > aire\,(DEGI)$، لكنّ $LBCK$ مربّع يتساوى محيطه مع محيط المعين $ABCH$، وإذا كان $DG = AC$، يكون يتساوى محيط المربّع أيضاً مع محيط $DEGI$.

فيكون للمربّع، وهو مضلَّع متساوي الأضلاع، مساحة أكبر من مساحة أي متوازي أضلاع يتساوى محيطه مع محيط المربّع[٣٢].

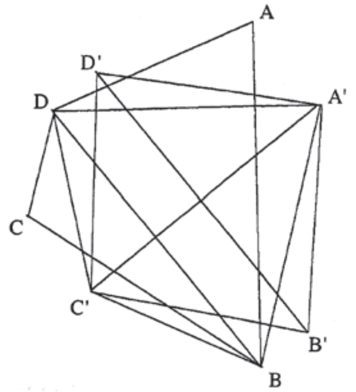
يعود الخازن بعد ذلك إلى العرض العام: من بين مُتعَدِّدي أضلاع محدَّبَين، لهما نفس العدد من الأضلاع ونفس المحيط، أحدهما متساوي الأضلاع والآخر اختياريّ، فإن مساحة المضلّع المتساوي الأضلاع أعظم من مساحة المضلّع الآخر.

$aire\,(BCKL) = BC.KC$ وَ $aire\,(ABCH) = BC.NC$

فتكون مساحة المربع أكبر من مساحة أي معيّن له نفس محيط المربع، ومساحة هذا الاخير أكبر من مساحة أي متوازي أضلاع له نفس محيط المعيّن.

[٣٢] نستطيع أن نثبت أنّه من بين جميع الأشكال الرباعيّة الأضلاع، المحدّبة والمتساوية المحيطات، فإن المربع له المساحة الكبرى. ليكن $ABCD$ رباعي أضلاع كيفما اتّفق، ولنأخذ على العمود المنصف للقطعة BD النقطتين C' و A' بحيث يكون

$C'D + C'B = CD + CB$ و $A'D + A'B = AD + AB$.



عند ذلك يكون رباعيا الأضلاع $ABCD$ و $A'BC'D$ متساويَي المحيطَين، ويكون المثلثان CDB و $C'DB$ متساويَي المحيطَين وكذلك المثلثان ADB و $A'DB$، واستناداً إلى ملحوظة المقدّمة ٥، يكون لدينا $aire\,(CDB) < aire\,(C'DB)$ و $aire\,(ADB) < aire\,(A'DB)$

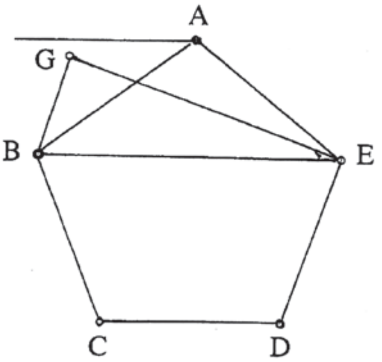
فنحصل على: $aire\,(ABCD) < aire\,(A'BC'D)$.

وبالطريقة نفسها نبني على العمود المنصّف للقطعة $A'C'$ النقطتين B' و D' بحيث يكون $B'A' + B'C' = BA' + BC'$ و $D'A' + D'C' = DA' + DC'$؛ يكون رباعي الأضلاع $A'B'C'D'$ إذاً معيّناً، ويكون لدينا $aire\,(A'BC'D) < aire\,(A'B'C'D')$.

لكننا نعلم أن مساحة المعيّن أصغر من مساحة المربّع الذي له نفس المحيط، فتكون مساحة $ABCD$ أصغر من مساحة المربّع الذي له نفس محيط $ABCD$.

المُقدّمة ٧ـ

<u>مثال</u>: ليكن $ABCDE$ مُخمَّساً متساوي الأضلاع ولتكن G نقطة بحيث يكون: $GB+GE=AB+AE$، فيكون محيط المخمَّس $GBCDE$ مساوياً لمحيط $ABCDE$ ، ويكون لدينا: $aire\,(ABCDE)>aire\,(GBCDE)$.

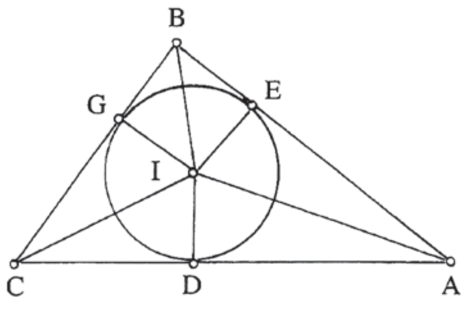


برهان ذلك أنّ النقطة G، وفق الفرضية المتعلّقة بها، تقع بين الخط BE والخطّ الموازي للخطّ BE المُخرج من النقطة A، لأنّه، استناداً إلى المُقدّمة ٣، إذا كانت G على هذا الخطّ الموازي للخطّ BE، يكون لدينا: $GB+GE>AB+AE$.

يكون لدينا إذاً: $aire\,(BAE)>aire\,(BGE)$، وبالتالي: $aire\,(ABCDE)>aire\,(GBCDE)$[٣٣].

المُقدّمة ٨ ـ مساحة مُتعَدِّد أضلاع، محيطُه p ويحيط بدائرة نصف قطرها r ، تساوي $\frac{1}{2}P.r$.

ليكن ABC مثلثاً محيطاً بدائرة مركزها I؛ ولتكن D و E و G نقاط التماسّ مع الدائرة؛ يكون لدينا: $aire\,(AIC)=ID.\frac{1}{2}AC$ ، $aire\,(AIB)=IC.\frac{1}{2}AB$ ، $aire\,(BIC)=IG.\frac{1}{2}BC$.



[٣٣] ينطلق الخازن من مُخمَّس متساوي الأضلاع ويستخلص مُخمَّساً غير متساوي الأضلاع، لـه محيط مساوٍ لمحيط المخمَّس الأوّل، ولـه مساحة أصغر من مساحة الأوّل. لكنّه لا يثبت أن مساحة مخمّسٍ اختياريٍّ، أقلّ من مساحة مخمّس متساوي الأضلاع لهُ نفس المحيط.

فنستخرج من ذلك: $aire\,(ABC)=\frac{1}{2}(AB+AC+BC).r$.

وإذا كان مُتعَدِّدُ الأضلاع ذا n ضلعاً، وإذا كان محيطاً بدائرة، نقسمه إلى مثلّثات عددها n ولها قمّة مشتركة هي مركز الدائرة، حيث يساوي ارتفاع كل واحد منها نصفَ قطر الدائرة.

إذا كان p_n وS_n على التوالي محيط ومساحة مُتعَدِّد الأضلاع، يكون لدينا: $S_n=\frac{1}{2}p_n.r$.

مساحة S_n المضلّع أعظم من مساحة الدائرة المحاطة، لأنّ p_n أكبر من محيط الدائرة.

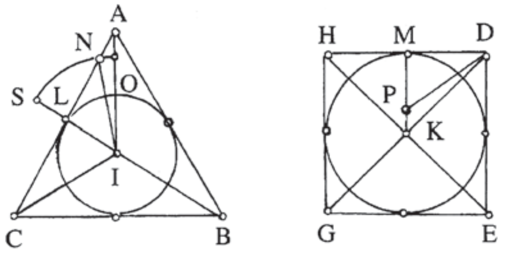
هذا البرهان هو نفس البرهان الذي أعطاه بنو موسى للقسم الأوّل من القضية ١ *. لكنّ هؤلاء أكملوا هذه القضية بتعميم إلى المجسّمات، وأعطوا صيغة حجم مُتعَدِّد السطوح المحيط بكرة نصف قطرها r.

إذا كان مُتعَدِّد أضلاع يقبل دائرة محيطة به نصف قطرها R، يكون لدينا $R>r$ و $S_n<\frac{1}{2}p_n.R$، وبالتالي فإن المساحة S_n أصغر من مساحة الدائرة المحيطة. وهاتان المتباينتان الأخيرتان هما بديهيتان بسبب احتواء أحد الشكلين الهندسيّين للشكل الآخر.

لنلاحظ أنّ الخازن يتناول في هذا المقطع، مُتعَدِّدات الأضلاع التي يكون لها دائرة محاطة بها ودائرة محيطة بها؛ وهذه الخاصّيّة صحيحة بالنسبة إلى المثلّثات وإلى مُتعَدِّدات الأضلاع المتساوية الأضلاع، ولكنها غير صحيحة لمُتعَدِّدات الأضلاع بشكل عام.

القضية ٩- إذا كان مُضلّعان متساويا الأضلاع وكان لهما نفس المحيط، فإنَّ الذي له العدد الأعظم من القمم، له المساحة العظمى.

<u>مثال</u>: ليكن ABC مثلّثاً متساوي الأضلاع محيطه p، وليكن $DEGH$ مربّعاً له نفس المحيط p. عند ذلك يكون: $aire\,(DEGH)>aire\,(ABC)$.



* راجع كتاب بني موسى "كتاب معرفة الأشكال البسيطة والكريّة"، "الشكل آ"، في بداية هذا المجلّد (المترجِم).

<u>البرهان</u>: إذا كانت النقطتان I و K مركزي الدائرتين المحاطتين، وL منتصف AC، وM منتصف HD، يكون لدينا: $\widehat{AIC}=4\frac{\pi}{2}.\frac{1}{3}$ و $AC=\frac{1}{3}p$ ، $\widehat{DHK}=4\frac{\pi}{2}.\frac{1}{4}$ و $DH=\frac{1}{4}p$ ؛

فنستخرج من ذلك: $\frac{AC}{DH}=\frac{\widehat{AIC}}{\widehat{DKH}}$ و $\frac{AL}{DM}=\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{DKM}}$.

لنأخذ N على AL بحيث يكون $LN=DM$ ؛ تقطع الدائرة (I,IN) المستقيم IL في S و IA في O؛ يكون لدينا: $\frac{AN}{NL}=\frac{aire\, triangle\,(AIN)}{aire\, triangle\,(NIL)}<\frac{aire\, secteur\,(INO)}{aire\, secteur\,(INS)}=\frac{\widehat{AIN}}{\widehat{NIL}}$ ، فنستخرج:

$\frac{AL}{DM}<\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{NIL}}$ ، فيكون: $\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{DKM}}<\frac{\widehat{AIL}}{\widehat{NIL}}$ وبالتالي: $\widehat{NIL}>\widehat{DKM}$ فيكون: $\widehat{INL}<\widehat{KDM}$.

نبني الزاوية $\widehat{MDP}$ بحيث يكون $\widehat{MDP}=\widehat{INL}$ ، فتقع النقطة P على القطعة المستقيمة MK، ويكون المثلّثان ILN، وPMD متساويين، و $IL=MP<MK$. غير أنّ:

$$aire\,(ABC)=\frac{1}{2}p.IL \quad \text{و} \quad aire\,(DEGH)=\frac{1}{2}p.MK$$

فيكون: $aire\,(DEGH)>aire\,(ABC)$.

ويمكن أن نوسّع هذا البرهان ليشمل مُضلّعين يكون كلّ منهما متساويَ الأضلاع ويكونا متساويّي المحيطين، مهما كان عدد قِممهما n و n' .

لنلاحظ أنّ ابن الهيثم تناول ثانية هذه القضية (راجع القضية ٢ من كتابه "في أنَّ الكرة أوسع الأشكال المجسّمة..." في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣٩٥-٣٩٨)؛ كما نجدها مرة أخرى في كتاب ابن هود (راجع أدناه الفصل السابع).

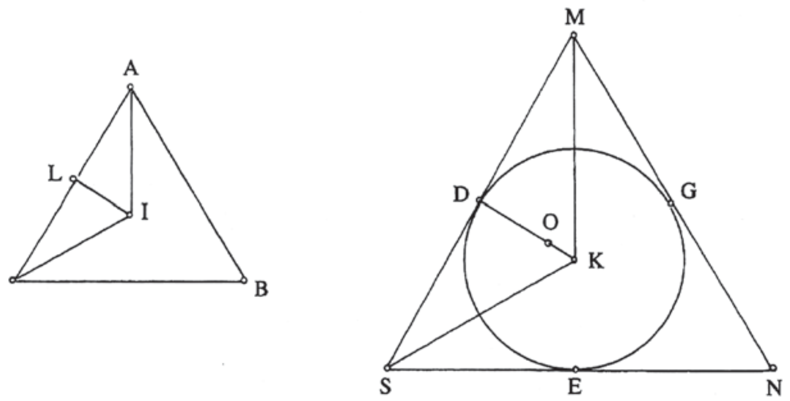
المبرهنة ١٠ – من بين جميع الأشكال المستوية، الدائرة ومُتعَدِّدات الأضلاع المنتظمة المحدَّبة، التي لها نفس المحيط، الدائرة هي الشكل الذي له المساحة العظمى.

<u>البرهان</u>: ليكن ABC مثلثاً متساوي الأضلاع ولتكن DEG دائرة وليكونا متساويَي المحيطَين. ليكن MNS مثلّثاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة DEG. محيط MNS أكبر من محيط الدائرة المساوي لمحيط ABC، يكون إذاً $MS>AC$.

لتكن النقطة I مركز المثلث ABC ولتكن K مركز الدائرة، و L منتصف AC، و D منتصف MS؛ فيكون لدينا $DM > AL$ ويكون المثلّثان AIL و MKD قائمي الزاوية ومتشابهين، وبالتالي $DK > LI$.

لكن الدائرة والمثلث ABC لهما نفس المحيط p، فيكون لدينا:

$$\text{مساحة الدائرة} = \frac{1}{2}p.DK \text{، مساحة} (ABC) = \frac{1}{2}p.LI$$



وبالتالي، فإن مساحة الدائرة هي أكبر من مساحة المثلث متساوي الأضلاع ABC.

يشير الخازن بعد ذلك إلى أنّ نفس الاستدلال ينطبق على المربّع وعلى المخمّس وعلى أي مُضلّع متساوي الأضلاع؛ ويستخلص النتيجة التي وردت في صغية القضية.

تناول ابن الهيثم هذه القضية مجدداً (راجع القضية الأولى من كتابه "في أنَّ الكرة أوسع الأشكال المجسّمة..." في المجلّد الثاني من هذه الموسوعة، ص ٣٩٤ ـ ٣٩٥).

يلفت الخازن الانتباه إلى إمكانيّة العمل بالطريق نفسها في حالة المضلّعات ذات الأضلاع غير المتساوية. وهذا صحيح بالنسبة إلى المثلث، لأنّنا عندما نأخذ مثلّثاً ABC ودائرة، يمكننا بناء مثلّث مشابه لِـ ABC ومحيط بالدائرة. لكن بشكل عام، لا يوجَد مُضلّعٌ مشابهٌ لمُضلّع ذي أضلاع غير متساوية ومحيطٌ بدائرة معلومة.

غير أنّ الاستدلال المستخدَم في حالة المُضلَّع المتساوي الأضلاع يسمح بالحصول على النتيجة في الحالة التي يكون فها مُتعَدِّدُ الأضلاع محدَّباً اختيارياً.

ليكن P مُتعَدِّدَ أضلاع اختيارياً، و P' مُضلّعاً متساويَ الأضلاع، ولتكن C دائرة، ولتكن محيطات الأشكال الثلاثة متساوية، وليكن للمضلّعين P و P' نفسُ العدد من الأضلاع. يكون لدينا: $aire\,(P) < aire\,(P')$ وَ $aire\,(P') < aire\,(C)$، فنحصل على: $aire\,(P) < aire\,(C)$.

فإذا كان مُتعَدِّدُ أضلاع محدَّبٌ ودائرة متساوِيَي المحيطَين، تكون مساحة الدائرة أعظم من مساحة مُتعَدِّد الأضلاع.

وهكذا نرى أنّ الخازن يعمد، بالنسبة إلى الأشكال الهندسيّة المستوية ذات المحيطات المتساوية إلى: (أ) مقارنة بين مُتعَدِّدات أضلاع متساوية الأضلاع متساوية المحيطات ومختلفة في أعداد أضلاعها، (ب) مقارنة بين متعدّد أضلاع متساوي الأضلاع وبين دائرة، حيث يكون محيطاهما متساويين، وذلك بواسطة مُتعَدِّد أضلاع آخر، شبيه بمتعدِّد الأضلاع الأوَّل ومحيطٍ بالدائرة. يمكن وصف مسار الخازن هذا بأنّه مسارٌ سكوني، مقارنةً بمسار ابن الهيثم (راجع المجلد الثاني من هذه الموسوعة). وسنرى أنّ ابن الهيثم يستخدم البند (أ) لإثبات ما يتعلّق بالبند (ب)، من خلال اعتباره الدائرة نهاية لمتتالية من مُتعَدِّدات أضلاع متساوية الأضلاع. بعبارات أخرى، نستطيع القول إنّ طريقة الخازن، وإن كانت مختلفة عن طريقة زينودوروس أو طريقة بابّوس، تنتمي إلى نفس فصيلة هاتين الطريقتين؛ في حين أنّ طريقة ابن الهيثم لا تنتمي إلى هذه الفصيلة.

٤-٢-٣ المجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية

يتناول القسم الثاني من كتاب الخازن هذا المسألة الأقصويّة نفسها، لكن هذه المرّة في الفضاء؛ فهو يعالج مسألة المجسَّمات ذات الإحاطات المتساوية. يتضمن هذا القِسم تسعَ مقدِّمات ومبرهنة واحدة. تتناول المُقدّمة الأولى المساحة الجانبية لهرم ذي قاعدة متساوية الأضلاع، والثانية حجم الهرم الذي يقبل كرة محاطة به؛ وفي الثالثة يتناول الخازن المساحة الجانبيّة لمخروط دَوَرانيّ وحجمه، وفي المُقدّمة الرابعة (القضية ١٤) يعالج المسألة التالية: كيف يتمّ، انطلاقاً من دائرة C معلومة، بناء مُتعَدِّدَي أضلاع متشابهين مساحتاهما S_1 وَS_2، أحدهما محيط بالدائرة C والثاني محاط بها، وبحيث يكون $\frac{S_1}{S_2} < k$ (حيث تكون النسبة k

معلومة). وفي المُقدّمة الخامسة، يعطي الخازن صيغة أخرى لمساحة المخروط الجانبية، لينتقل في السادسة إلى صيغة المساحة الجانبيّة لجذع المخروط. ومن المُقدّمة السادسة (القضية ١٦) تُستخلص المُقدّمة السابعة، وهي التالية:

"إذا كان خطٌّ مضلّع مُتساوي الأضلاع محاطاً بدائرة مساحتها S_1 ، ومحيطاً بدائرة مساحتها S_2 ، فإن مساحة S السطح المولّد من دوران هذا الخط حول أحد محاوره يحقق المتباينة المزدوجة $4S_2 < S < 4S_1$".

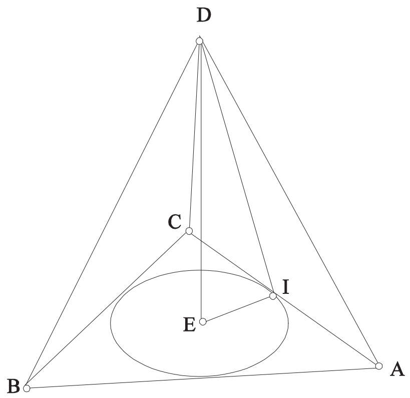
وينتقل الخازن في المُقدّمة الثامنة إلى حساب مساحة الكرة، ثم في التاسعة إلى حساب حجم الكرة. وفي هذه المُقدّمة يحدِّد الخازن مُتعَدِّد سطوح محاط بكرة ويُسَلِّم بوجود كرة مماسّة لجميع أوجه هذا المجسّم، وهذا غير صحيح (راجع ما يتبع أدناه). وُضعت جميع القضايا التمهيدية إذاً بهدف إثبات المبرهنة التالية: "من بين جميع المجسّمات التي تكون مساحات إحاطاتها متساوية، الكرة هي المجسّم الذي له الحجم الأعظم". ولقد أقام الخازن برهانه فقط للمجسّم الذي يقبل كرة محاطة به.

لنتناول الآن بالتفصيل المسار الذي وضعه الخازن.

المُقدّمة ١١ـ نتناول الهرم المنتظم الثلاثيّ الأوجه. قاعدته مثلثٌ متساويُ الأضلاع ABC ، وأوجهه الجانبية الثلاثة مثلّثات متساوية الساقين، متساوية، لها نفسُ القمّة D. ارتفاعه DE، عموديّ على سطح ABC. إذا كانت المثلثات التي قمتها D هي نفسها متساوية الأضلاع، يكون الهرمُ رباعيَّ سطوحٍ متساويَ الأوجه.

<u>المساحة الجانبية</u>: المثلّثات المتساوية الساقين التي قمّتها D لها ارتفاعات متساوية؛ ليكن DI أحدَها، ولنضَع $DI = a$. فيكون لدينا: المساحة الجانبيّة = $\frac{1}{2} per.(ABC).a$ *

* أي نصف محيط ABC مضروب بـ a (المترجِم).



المساحة الكاملة للهرم: القطعة المستقيمة $r = EI$ هي نصف قطر الدائرة المحاطة بالمثلّث ABC، فيكـون: $aire\,(ABC) = \frac{1}{2} per.(ABC).r$ ، وبالتــالي، تســاوي المســاحة الكلّيّــة للهــرم:

$(a+r).\frac{1}{2} per.(ABC)$ ، وتساوي نسبة المساحة الجانبية إلى مساحة القاعدة $\frac{a}{r}$.

هـذه النتـائج صـالحة لأيّ هـرم منـتظم، مهمـا كانـت طبيعيـة مُتعَدِّد الأضـلاع الـذي يشـكل قاعدته.

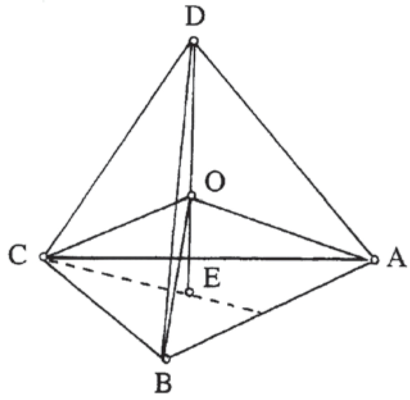
إذا كان a ارتفاع أحد الوجوه الجانبية، وr نصف قطر الدائرة المحاطة بالقاعدة، وp محيط مُتعَدِّد الأضلاع الذي يشكل القاعدة، يكون لدينا: المساحة الجانبيّة $= \frac{1}{2} p.a$ ،

المساحة الكلّيّة $= \frac{1}{2} p.(a+r)$، نسبة المساحة الجانبيّة إلى مساحة القاعدة $= \frac{a}{r}$.

المُقدّمة ١٢-

حجم الهرم $ABCD$.

استناداً إلى القضية السادسة من المقالة الثانية عشرة من "الأصول"، هذا الحجم، V ، يساوي ثلث حجم منشور قاعدته ABC وارتفاعه DE، لذا يكون: $V = \frac{1}{3} aire\,(ABC).DE$.



الهرم والكرة المحاطة به.

ليكن $DABC$ هرماً منتظماً؛ توجد كرة مركزها O، محاطة بهذا الهرم. فنستطيع إذن تقسيمه إلى أربعة أهرامات لها قمّة مشتركة هي O، مركز الكرة، وارتفاعات يساوي كلٌّ منها نصف قطر الكرة الذي نسمّيه r. فيساوي حجم الهرم $OABC$:

$$\frac{1}{3} aire\,(ABC).OE = \frac{1}{3} aire\,(ABC).r$$

ويساوي حجم الهرم $DABC$: $V = \frac{1}{3}.r$. مجموع مساحات القواعد، أي

(١) $V = \frac{1}{3}.r$. المساحة الكلّيّة.

مهما كان الهرم المنتظم الذي نتناوله، توجد كرة مركزها O محاطة بهذا الهرم. نقسمها إلى أهرامات عددها $(n+1)$ وقمّتها O وارتفاعها r، نصف قطر الكرة، حيث يكون n عدد أضلاع المضلّع المتساوي الأضلاع الذي يشكّل القاعدة. فتبقى النتيجة (١) صحيحة.

المسألة هنا هي حالة خاصة من تعميم النتيجة إلى الفضاء الذي أجراه بنو موسى في الجزء الثاني من قضيتهم الأولى.

تعميم

لقد بيّنا أنّ، لأيّ مضلّع، سواء أكان متساوي الأضلاع أم لا، محيط بدائرة نصف قطرها r، يكون لدينا: مساحة متعدّد الأضلاع = $\frac{1}{2}$(محيطه)$.r$.

وكذلك، في أيّ هرم، منتظم أو غير منتظم، إذا كان محيطاً بكرة نصف قطرها r، يكون لدينا: حجم الهرم = $\frac{1}{3}$(مساحته الكلّيّة)$.r$.

يُذكِّر الخازن، بعد ذلك، ببعض النتائج الخاصّة بالأسطوانة الدائرية المائلة أو القائمة:

- الأسطوانة، كشكل محدّد انطلاقاً من دائرتين متساويتين واقعتين في مستويين متوازيين؛
- ارتفاع الأسطوانة القائمة ومحورها؛
- توليد الأسطوانة القائمة انطلاقاً من مستطيل يدور حول أحد أضلاعه.

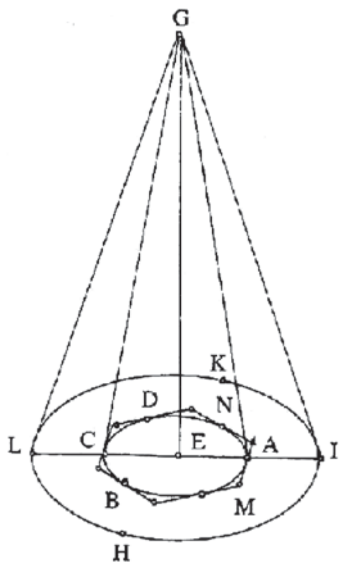
ثمّ يُذَكِّر ببعض النتائج المتعلّقة بالمخروط الدوراني.

المُقدّمة ١٣- المساحة الجانبية لمخروط دائري قائم.

يُرفق بكلّ أسطوانة قائمة، مخروطٌ قاعدته إحدى قاعدتي الأسطوانة وقمّته مركز القاعدة الأخرى.

لنأخذ المخروط الذي قاعدته الدائرة $(ABCD)$ وقطرها AC ومركزها E، ولتكن قمّته النقطة G، حيث GE عمود على مستوي القاعدة. المساحة الجانبية S للمخروط هي:

$S = \frac{1}{2} AG.$ محيط الدائرة، أي طول $S = AG \,.\, \widehat{ABC}$



<u>البرهان:</u> استدلال بالخُلف

لنفرض أنّ طول $S > AG \,.\, \widehat{ABC}$، وليكن IL قطر دائرةٍ هي $(IKLM)$ بحيث يكون طول $S = AG . \widehat{IKL}$، يكون لدينا إذاً $IL > AC$.

نأخذ عندئذ مضلّعاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة الأولى، بحيث تكون جميع رؤوسه داخل الدائرة الثانية؛ يُرفق بهذا المضلع هرمٌ قمّته G وأوجهه مماسّة للمخروط. المساحة الجانبية لهذا الهرم أعظم من مساحة المخروط الجانبية.

نسمّي p محيط الدائرة ($ABCD$)، و p_1 محيط الدائرة ($IKLH$)، و p_2 محيط المضلع، فيكون لدينا $p < p_2 < p_1$.

من جهة أخرى، تساوي مساحة الهرم الجانبية: $S' = \frac{1}{2} p_2 . AG$، ولدينا وفق الفرضية $S = \frac{1}{2} p_1 . AG$؛ وبما أنّ $p_1 > p_2$، يكون $S > S'$ وهذا محال.

لنفترض الآن أنّ $S < \frac{1}{2} p . AG$، فتكون $\frac{1}{2} p . AG$ المساحة الجانبية لمخروط قمته G وقاعدته دائرة أكبر من ($ABCD$)، وهي الدائرة ($IKLH$).

نأخذ بعد ذلك، كما في السابق، مضلّعاً متساوي الأضلاع محيطاً بالدائرة ($ABCD$) وفي داخل الدائرة ($IKLH$)، كما نأخذ الهرم المرفق بهذا المضلّع الذي تساوي مساحته الجانبية $\frac{1}{2} p_2 . AG$. هذه المساحة أعظم من $\frac{1}{2} p . AG$، وهذه الأخيرة هي مساحة المخروط ذي القاعدة $IHLK$؛ وهذا محال لأنّ الهرم يقع داخل هذا المخروط.

تساوي، إذاً، مساحة المخروط الجانبية $S = \frac{1}{2} p . AG$.

<u>حجم المخروط الدائري القائم</u>

وفقاً للقضية التاسعة من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس، يساوي حجم المخروط ثلث حجم الأسطوانة المرفقة به؛ يكون إذاً:

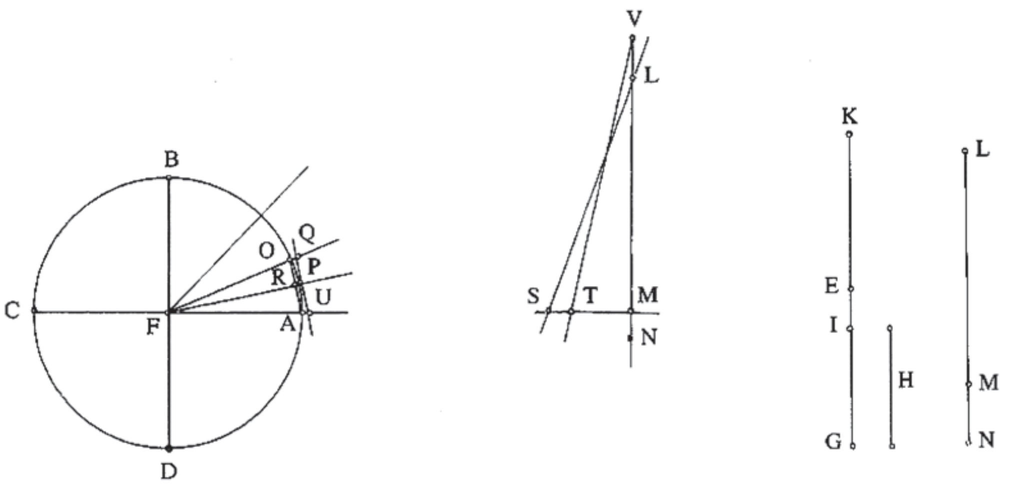
$$V = \frac{1}{3} aire(ABCD) . EG$$ (أي V = ثلث EG في مساحة الدائرة ($ABCD$))

وهكذا نرى أنّ الخازن يُسلّم، بدون تعليل، بوجود مضلّعٍ متساوي الأضلاع محيطٍ بالدائرة الأولى وموجود داخل الدائرة الثانية، وهي مسألة طرحها بنو موسى في الجزء الثاني من قضيتهم الثالثة. فضلاً عن ذلك، يستخدم بنو موسى في الجزء الأوّل من القضية التاسعة في كتابهم، مُتعَدِّدَ أضلاع متساويَ الأضلاع محاطاً بالدائرة الثانية وواقعاً خارج الأولى – وهي

القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس. ولكنّهم يأخذون، في الجزء الثاني من القضية نفسها، مُتعَدِّد أضلاع متساويَ الأضلاع محيطاً بالدائرة الصغرى وواقعاً داخل الكبرى؛ وهذا ما فعله الخازن هنا.

المُقدّمة ١٤- إذا كان لدينا دائرة معلومة، كيف يتمّ بناء مُتعَدِّدَي أضلاع متشابهين، أحدهما محيط بالدائرة، والآخر محاط بها بحيث تكون نسبة مساحتيهما أقلّ من نسبة مقدارَين مُعلومَين.

ليكن EG، وH مقدارين ولنَفرِض أنّ $EG > H$. وليكن $EI = EG - H$ و n أصغرعدد على الشكل 2^p، $(n = 2^p)$، بحيث يكون $EK = n.EI > H$، فيكون $\frac{EI}{EK} < \frac{EI}{H}$.



نأخذ قطعة مستقيمة LM، ونقسمها إلى أجزاء عددها n، ونـُمدِّدها على استقامة حتّى N بحيث يكون $MN = \frac{1}{n} \cdot LM$؛ فيكون لدينا: $\frac{MN}{LM} = \frac{EI}{EK}$، ويكون $\frac{MN}{LM} < \frac{EI}{GI}$، فنستخلص $\frac{EI + GI}{GI} < \frac{LM + MN}{LM}$، أي $\frac{EG}{H} < \frac{LN}{LM}$؛ فنبني الزاوية القائمة LMS، مع $LS = LN$.

ليكن F مركز الدائرة $ABCD$، نفترض أنَّ $\widehat{AFB}$ زاوية قائمة ونأخذ $\frac{1}{2}\widehat{AFB}$ و $\frac{1}{4}\widehat{AFB}$،

... وصولاً إلى $\widehat{AFO}$ = $\frac{1}{2^k}\widehat{AFB}$، بحيث يكون: $\widehat{AFO} < 2\widehat{MLS}$.

يلتقي منصِّف الزاوية $\widehat{AFO}$ بالدائرة في النقطة P، ويقطع خطّ تماسّ الدائرة في P المستقيمين FA و FO، على التوالي، على النقطتين U و Q. القطعتان المستقيمتان AO و

UQ هما ضلعا مُتعَدِّدي أضلاع متشابهين حيث يكون عدد أضلاع كلّ منهما 2^{k+2}، ويكون أحدهما محاطاً بالدائرة، والآخر محيطاً بهذه الدائرة.

ليكن R منتصف AO، فيكون $\widehat{AFR} = \frac{1}{2}\widehat{AFO}$ ، وبالتالي $\widehat{AFR} < \widehat{MLS}$ ؛ فيكون $\hat{S} < \hat{A}$. نبني على الزاوية القائمة LMS مثلثاً VMT بحيث يكون $\hat{T} = \hat{A}$ و $TV = LS$، فيكون $MV > ML$ و $MT < MS$ ويكون بالتالي: $\frac{EG}{H} < \frac{LN}{LM} = \frac{LS}{LM} < \frac{VT}{VM} = \frac{AF}{RF} = \frac{PF}{RF}$.

ولكن $\frac{UQ}{AO} = \frac{UF}{AF} = \frac{PF}{RF}$، فيكون $\frac{EG}{H} < \frac{UQ}{AO}$.

ولكنّ نسبة محيطَي مُتعَدِّدَي الأضلاع تساوي $\frac{UQ}{AO}$، فهي إذاً أقلّ من $\frac{EG}{H}$ [٣٤].

إذاً أردنا إيجاد مُتعَدِّدَيْ أضلاع نسبة مساحتيهما أقلّ من $\frac{EG}{H}$، نأخذ الطول X بحيث يكون $\frac{X}{LM} = \frac{LN}{X}$، ونقوم بالبناء نفسه انطلاقاً من الطولين LN و X، فنحصل على مُتعَدِّدَيْ أضلاعٍ، يحقّق ضلعاهما (وهما على التوالي C_1 و C_2) العلاقة التالية: $\frac{LN}{X} < \frac{C_1}{C_2}$، فيكون: $\frac{LN^2}{X^2} < \frac{C_1^2}{C_2^2}$ ؛ وبالتالي $\frac{LN}{LM} = \frac{LN^2}{LN.LM} = \frac{LN^2}{X^2}$، فيكون $\frac{EG}{H} < \frac{LN}{LM} < \frac{C_1^2}{C_2^2}$، وتكون بالتالي نسبة مساحتي مُتعَدِّدي الأضلاع أصغر من $\frac{EG}{H}$ [٣٥].

<u>المساحة الجانبيّة للمخروط الدائري القائم (تابع)</u>

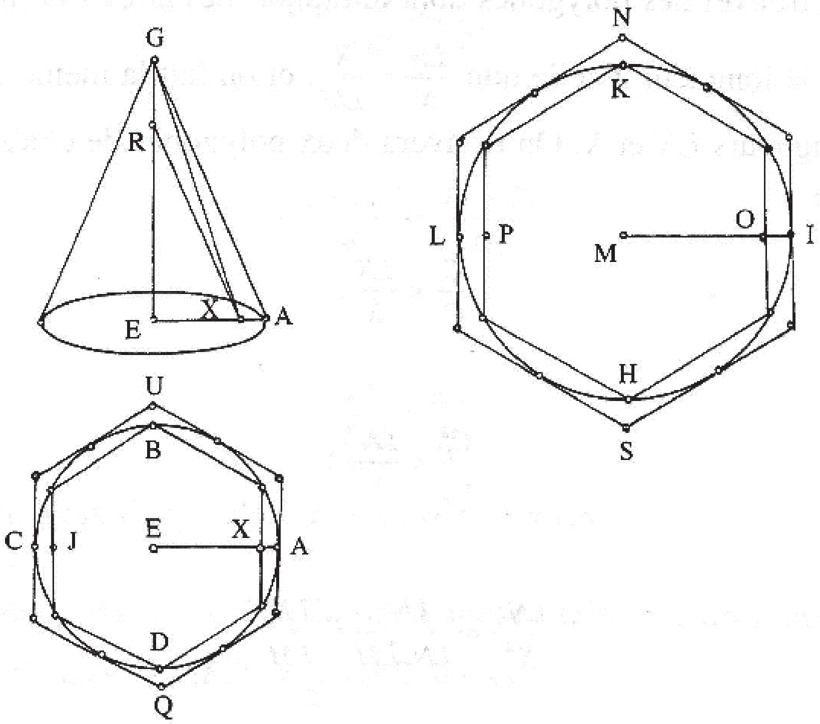
المقدّمة ١٥ـ المساحة الجانبية للمخروط الدوراني تساوي مساحة دائرة نصف قطرها المتوسط المتناسب بين مولّد المخروط ونصف قطر قاعدته[٣٦].

ليكن AG مولّدَ المخروط و AE نصفَ قطر قاعدته، ولتكن القطعة المستقيمة IM وسطاً تناسبيّاً(أو "وسطاً في النسبة"، وفقاً لتعبير الخازن) بين AG و AE، أي $\frac{AE}{IM} = \frac{IM}{AG}$. لنبيِّن أنّ المساحة S' للدائرة (M, IM) تساوي المساحة الجانبيّة، S، للمخروط.

---

[٣٤] انظر القضيّتين ٣ و ٤ من المقالة الأولى من كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس: Archimède, *La sphère et le cylindre*.
[٣٥] انظر القضيّة ٥ من المقالة الأولى من كتاب Archimède, *La sphère et le cylindre*.
[٣٦] انظر القضيّة ١٤ من المقالة الأولى من كتاب Archimède, *La sphère et le cylindre*.

يستخدِم الخازن استدلالاً بالخُلف، فيفترض أوّلاً أنّ $S > S'$. يُمكِن، استناداً إلى القضيّة السابقة، بناء مُتعَدِّد أضلاعٍ محيطٍ بالدائرة (M, IM) ومُتعَدِّد أضلاعٍ محاطٍ بها؛ فليكونا على التوالي المسدَّسَيْن $INLS$ و $OKPH$ بحيث يكون: $\frac{aire(INLS)}{aire(OKPH)} < \frac{S}{S'}$.



ليكن $AUCQ$ مسدَّس الأضلاع المحيط بالدائرة (E, AE) و$XBJD$ المسدّس المحاط بهذه الدائرة. يكون لدينا: $\frac{aire(AUCQ)}{aire(INLS)} = \frac{AE^2}{IM^2} = \frac{AE^2}{AE.AG} = \frac{AE}{AG}$.

لكن، وفقاً للقضية ١١، لدينا:

$$\frac{AE}{AG} = \frac{\text{مساحة } (AUCQ)}{\text{المساحة الجانبيّة للمخروط } (G, AUCQ)}$$

لدينا إذاً : $aire(INLS) = aire\ latérale\ (G, AUCQ)$ *، فنحصل على: $\frac{aire(G, AUCQ)}{aire(OKPH)} < \frac{S}{S'}$

أو $\frac{aire(OKPH)}{S'} < \frac{aire(G, AUCQ)}{S}$، وهذا محال لأنّ

ثمّ يفترِض الخازن أنّ $S > S'$، فيبني المسدّسَين $INLS$ و $OKPH$ بحيث يكون

* حيث نرمز بـ "$aire\ latérale\ (A, C)$" إلى المساحة الجانبيّة للمخروط (A, C)، ذي القمّة النقطة A والقاعدة الدائرية C.

$\frac{S'}{S} < \frac{aire(INLS)}{aire(OKPH)}$ ؛ ويأخذ المسدَّس $XBJD$ المحاط بالدائرة (E, EA)؛ فيكون:

$$\frac{aire(XBJD)}{aire(OKPH)} = \frac{XE^2}{OM^2} = \frac{AE^2}{IM^2} = \frac{AE}{AG}.$$

في المستوي AEG، نخرج المستقيم XR الموازي لِـ AG. فيكون لدينا: $\frac{AE}{AG} = \frac{XE}{XR} > \frac{XE}{XG}$.

لكن $\frac{XE}{XG} = \frac{aire\ (XBJD)}{aire\ latérale\ (G, XBJD)}$، فنحصل على: $\frac{AE}{AG} > \frac{aire\ (XBJD)}{aire\ latérale\ (G, XBJD)}$،

وبالتالي: $aire\ latérale\ (G, XBJD) > aire\ (OKPH)$، و $\frac{S}{S'} < \frac{aire\ (INLS)}{aire\ latérale\ (G, XBJD)}$،

وهذا محال لأنّ $aire\ (INLS) > S'$ و $aire\ laterale\ (G, XBJD) < S$.

نستنتج ممّا سبق أنّ $S = S'$.

ملاحظة: إذا سمَّينا p محيط الدائرة التي تشكل القاعدة، وr نصف قطرها، و l طول المولِّد،

يكون لدينا، استناداً إلى المُقدّمة ١٣: $S = \frac{1}{2}p.l$؛ يكون لدينا إذاً : $S = \pi r.l$.

فإذا وضعنا $\rho^2 = r.l$، حيث يكون ρ الوسط في النسبة (الوسط التناسبي) بين r و l، يكون لدينا: $\pi.\rho^2 = S$، مساحة الدائرة ذات نصف القطر ρ.

نلاحِظ أنّ الخازن لا يستخدم صيغة محيط الدائرة تبعاً لنصف قطرها؛ لذلك كان من الضروريّ أن يستخدم، من جديد، برهاناً بالخلف .

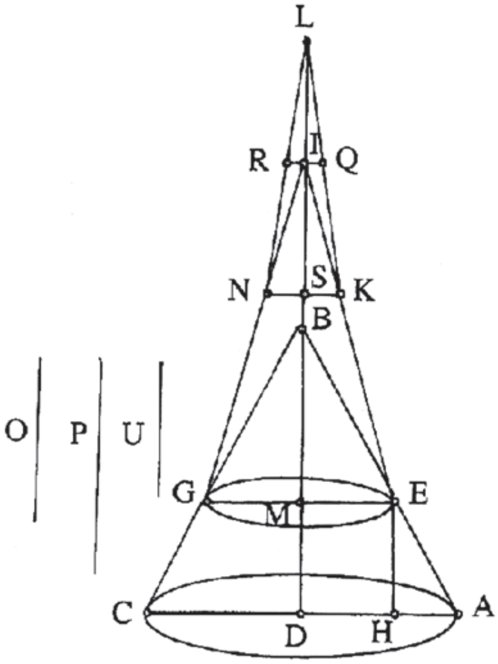
المساحة الجانبية لجذع المخروط وتطبيقاتها.

المُقدّمة ١٦– ليكن ABC مثلثاً متساوي الساقين محوره BD. ولنأخذ مستقيماً موازياً لـِ CA يقطع BA على E، وBD على M، و BC على G . لتكن I نقطة على امتداد DB المستقيم، فيكون المثلث IGE متساوي الساقين. نبني بالطريقة نفسها المثلث NKL المتساوي الساقين.

تُحدث المثلثات القائمة الزاوية ABD و EIM و KLS، بدورانها حول المستقيم BD، مخروطات دورانيّة.

المساحة الجانبية لجذع مخروط محصور بين الدائرتين $(D، DA)$ و $(M، ME)$ تساوي

مساحة دائرة نصف قطرها O بحيث يكون: $O^2 = AE.(AD+EM)$ [٣٧]



<u>البرهان</u>: ليكن EH موازياً لِـ BD، فيكون $EH = MD$ لنأخذ القِطَع المستقيمة O وP وU بحيث يكون: $O^2 = AE(AD+EM)$، $P^2 = AB.AD$ و $U^2 = EB.EM$.

استناداً إلى القضية السابقة تساوي المساحتان الجانبيتان للمخروطين ABC وEBG على التوالي، مساحتي دائرتين، نصف قطر الأولى منهما P ونصف قطر الثانية U. الفرق بينهما هو المساحة المطلوبة.

لكنّ $BA.AD = BE.AD + EA.AD = BE.EM + BE.AH + EA.AD$

وبما أنّ المثلثين EHA و EBM متشابهان، يكون $BE.AH = EA.EM$ ويكون لدينا :

$BA.AD = BE.EM + EA.EM + EA.AD$ و $BA.AD = U^2 + O^2$، أي $O^2 = P^2 - U^2$.

المساحة الجانبية لجذع مخروط تساوي إذاً مساحة دائرة نصف قطرها O.

نرى هنا أنّ الخازن ينطلق من صيغة المساحة الجانبية للمخروط التي وجدها في القضية السابقة، أي $S = \pi\rho^2$، مع $\rho^2 = rl$، حيث r هو نصف قطر القاعدة و l المولّد. هذه الصيغة، أي $S = \pi rl$، ليست سوى تلك التي بيّنها بنو موسى في القضية التاسعة واستخدموها في القضية ١١ التي عالجوا فيها مسألة المساحة الجانبية لجذع مخروط.

[٣٧] انظر: القضيّة ١٦ من المقالة الأولى من "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس.

ونستنتج من البرهان السابق، أنّ المساحة الجانبية لجذعِ مخروطٍ محدّد بواسطة المربَّع المنحرف $EKNG$ تساوي مساحة دائرة نصف قطرها O_1، حيث يكون $O_1^2 = KE.(KS+EM)$، وهكذا دواليك.

إذا افترضنا أنّ $AE = EK = KQ$، فإنَّ المساحة الجانبية لمجسّم محصور بين الدائرة (I، IQ) والدائرة (D، DA) تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R_1 بحيث يكون:

$$R_1^2 = AE.(DA + 2ME + 2SK + IQ) \quad \text{(أ)}$$

إذا أخذنا المجسمَ ذا القمة L الناتج من دوران $LQKEAD$، حيث $LQ = KQ$، فإنَّ مساحته تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R_2 بحيث يكون:

$$R_2^2 = AE.(AD + 2ME + 2SK + 2IQ) \quad \text{(ب)}$$

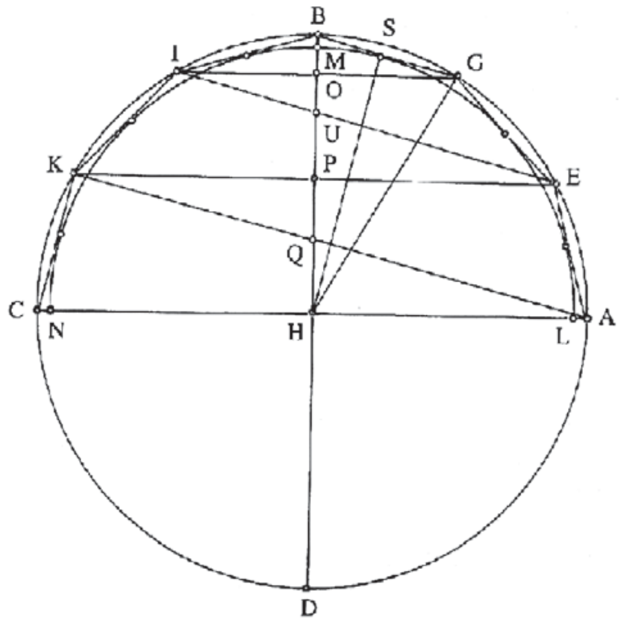
نلاحظ أنّ مسار الخازن هنا مماثل لمسار بني موسى في الجزء الثاني من القضية ١١.

<u>الكرة</u>

لتكن معنا كرة مركزها H، ولتكن $ABCD$ إحدى دوائرها العظام. ونأخذ القطرين AC و BD المتعامدين، وليكن $AEGBIKC$ خطّاً مضلّعاً متساوي الأضلاع محاطاً بنصف الدائرة ABC، ولتكن LMN نصف دائرة محاطة بهذا الخط.

المُقدّمة ١٧- المساحة الجانبية للمجسّم الناتج من دوران الخط $AEGB$ حول المستقيم BH هي أقلّ من ضعفي مساحة الدائرة المحيطة (H، HA) وأكبر من ضعفي مساحة الدائرة المحاطة (H، HL).

لتكن النقاط S، O، P على التوالي منتصفات GB، GI، EK؛ وليقطع المستقيم HB المستقيمين AK و EI على التوالي على Q و U. القِطَع المستقيمة AC، KE، GI متوازية، وكذلك القطعتان EI و AK ؛ ينتج من ذلك أنّ المثلّثات AHQ، KPQ، EPU، GBO، وIUO متشابهة، والمثلث BSH مشابه لها لأنّ HS هو منصّف الزاوية BHG والعمود المنصّف لـِ BG. فنستخلص العلاقة التالية:



$$\frac{OG}{OB} = \frac{OI}{OU} = \frac{PE}{PU} = \frac{PK}{PQ} = \frac{AH}{HQ} = \frac{OG+OI+PE+PK+AH}{BO+OU+UP+PQ+HQ} = \frac{GI+EK+AH}{BH}$$ ؛

لكنّ $\frac{OG}{OB} = \frac{SH}{SB}$، فيكون $SB.(GI+EK+AH) = BH.SH$.

واستناداً إلى القضية السابقة، فإن المساحة الجانبية للمجسّم الناتج من دوران $AEGB$ تساوي مساحة دائرة نصف قطرها R بحيث يكون: $R^2 = AE.(GI+EK+AH)$.

فيكون لدينا (لأنّ $AE = 2SB$): $\frac{1}{2}R^2 = BH.SH$، وبالتالي $2SH^2 < R^2 < 2BH^2$، فتكون المساحة الجانبية المعنيّة بالأمر محصورة، إذاً، بين ضعفي مساحة الدائرة العظمى $ABCD$ وضعفي مساحة الدائرة المحاطة (H ،HL).

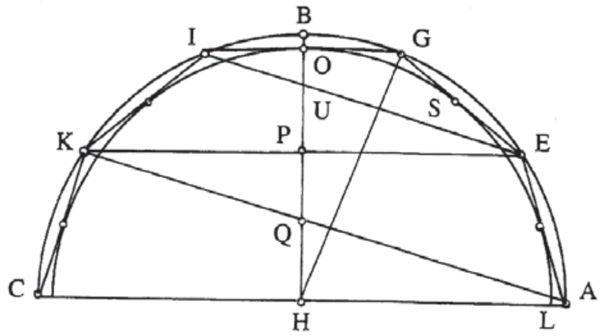
نلاحظ أنّ الاستدلال جرى باستخدام شكل مضلّع هو $AEGBIKC$ له عددٌ زوجيّ من الأضلاع، مع تطبيق النتيجة (ب) من القضية السابقة.

ونلاحظ أنّ الشكل في تلك القضيّة كان مقعّراً، في حين أنّنا هنا نطبّق النتيجة السابقة في حالة الشكل المحدّب؛ إلا أنّ هذه القضيّة هي على أي حال قضيّة عامة وتُطَبَّق في الحالتين على السواء[٣٨].

[٣٨] هل يظهر هذا العرض نيّة لدى الخازن؟ هذا البرهان مبني على الأسس نفسها التي اعتمدها أرشميدس، "كتاب الكرة والأسطوانة"، المقالة الأولى، القضية ٢١ وما بعدها)، وهو برهان معروف بالعربية منذ منتصف القرن التاسع على الأقل، وسبق أن استخدمه بنو موسى.

إذا كان للخطّ المُضلّع، المحاط بنصف الدائرة ذات القطر AC، عددٌ فرديّ من الأضلاع، (الخط $AEGIKC$، مثلاً)، فلا يكون له قمّة في B، ويُستبدل المثلّث BSH بالمثلث OGH، ويكون لدينا: $\frac{OI}{OU}=\frac{PE}{PU}=\frac{PK}{PQ}=\frac{AH}{HQ}=\frac{OI+EK+AH}{OH}=\frac{OH}{OG}$، فنحصل على:

$$OG(OI+EK+AH)=OH^2.$$



استناداً إلى النتيجة (أ) في القضيّة السابقة، المساحة الجانبية الناتجة من دوران الخط AEG هي مساحة دائرة نصف قطرها R_1 بحيث يكون: $R_1^2=AE(OI+EK+AH)$، فيكون $R_1^2=2OH^2$. المساحة الجانبية الناتجة من دوران $AEGO$ هي إذاً مساحة دائرة نصف قطرها R_2، بحيث يكون: $R_2^2=R_1^2+OG^2=2OH^2+OG^2$؛ يكون لدينا إذاً: $R_2^2=OH^2+HG^2$،

و $$2OH^2<R_2^2<2HG^2.$$

تكون المساحة الجانبية المعنيّة بالأمر محصورة، إذاً، بين ضعفي مساحة الدائرة الكبرى $ABCD$ وضعفي مساحة الدائرة المحاطة (H، HO).

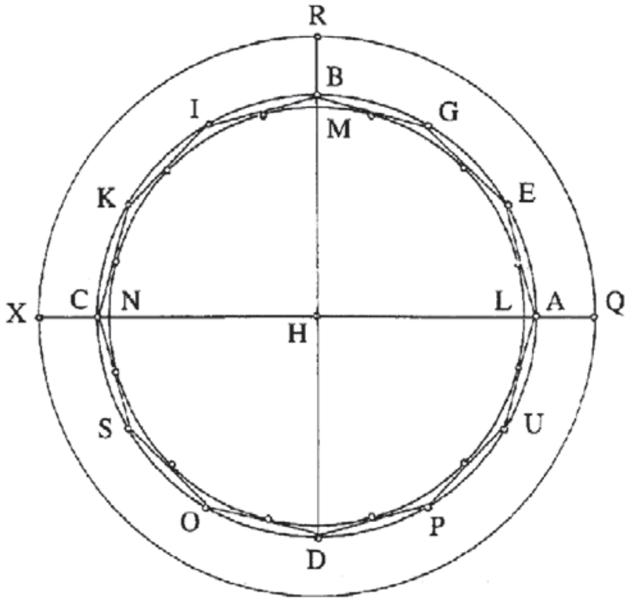
لقد حصل أرشميدس على هذه النتائج نفسها لمجسّم محدَّد انطلاقاً من مُضلّع متساوي الأضلاع عدد أضلاعه يساوي أضعاف العدد ٤، وذلك في القضايا ٢٧-٣٠، من كتاب "الكرة والأسطوانة". وعالج بنو موسى، بعد ذلك، المسألة نفسها لمجسّم محدَّد انطلاقاً من خط مضلّع محاط بنصف دائرة وله عدد زوجيّ من الأضلاع (القضيتان ١٢ و ١٣). وهذه بالضبط الحالة التي عالجها الخازن. من جهة أخرى درس جوهانس دو تينمو (*Johannes de Tinemue*) في القضية الخامسة (راجع م. كلاجيت (*M. Clagett*، ص. ٤٦٩ وما يليها)

القضية نفسها انطلاقاً من مُضلَّع متساوي الأضلاع محاط بدائرة وله عدد أضلاع مساوٍ، إمّا لأضعاف العدد ٤، وإمّا لأضعاف العدد ٢، فحسب.

المُقدّمة ١٨ـ تساوي مساحة الكرة، S، أربعة أمثال s، مساحة دائرتها العظمى[٣٩].

لتكن $ABCD$ دائرة عظمى من الكرة ولتكن s مساحة هذه الدائرة.

لنفترض أنّ $4s < S$، فتكون $4s = S'$ مساحة كرة أصغر من الكرة المعلومة، وتكون دائرتها العظمى LMN. فنأخذ مُضلَّعاً LMN متساويَ الأضلاع ، محيطاً بالدائرة، كما في الدراسة السابقة، بحيث توجَد رؤوسه داخل الدائرة $ABCD$ أو على هذه الدائرة. لتكن S'' مساحة المجسم الناتج من دوران هذا المضلّع؛ يكون لدينا: $S' < S'' < S$.



استناداً إلى القضية ١٧، لدينا $S'' < 4s$، فيكون $S' < 4s$، وهذا محال لأنّنا افترضنا $S' = 4s$.

لنفترض $4s > S$، فتكون $4s = S_1'$ مساحة كرة أكبر من الكرة $ABCD$، فلتكن QRS دائرتها العظمى؛ فنأخذ مُتعَدِّد أضلاعٍ محيطاً بالدائرة $ABCD$، تقع رؤوسه داخل الدائرة QRS أو على هذه الدائرة؛ لتكن S_1'' مساحة المجسّم الناتج من دوران مُتعَدِّد الأضلاع هذا، فيكون لدينا $S < S_1'' < S_1'$.

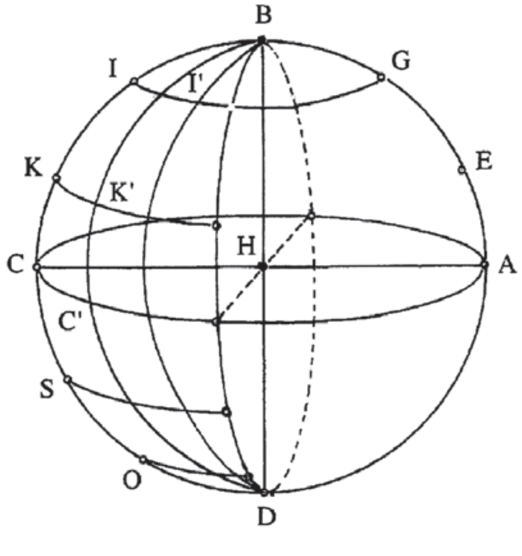
[٣٩] أرشميدس، "الكرة والأسطوانة".

استناداً إلى القضية ١٧، لدينا $S_1'' > 4s$، وبالتالي $S_1' > 4s$، وهذا محال لأنّنا افترضنا $S_1' = 4s$.

تكون إذاً $S = 4s$، أي أنّ مساحة الكرة تساوي أربع مرات مساحة دائرتها العظمى، أو أيضاً حاصل ضرب قطر الدائرة العظمى بمحيطها.

لنلاحظ أنّ بني موسى، لكي يبرهنوا هذه القضية نفسها، استخدموا في جزءي الاستدلال، مجسّماً محاطاً بالكرة العظمى، وليس له نقاطٌ مشتركة مع الكرة الصغرى، وقد توصّلوا إلى هذا المجسّم انطلاقاً من القضية السادسة من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" (راجع القضية ١٤ من كتابهم).

المُقدّمة ١٩ـ حجم الكرة هو حاصل ضرب نصف قطر، R، لدائرة عظمى منها، بثلث مساحة سطحها S.



ليكن V حجم الكرة، ولتكن $ABCD$ دائرة عظمى منها.

لنفترض أنّ $V > \frac{1}{3} R.S$، إذ ذاك توجد كرة أصغر منها، حجمها V'، حيث $V' = \frac{1}{3} R.S$؛

لتكن LMN دائرة عظمى من هذه الكرة.

نأخذ مستويين عموديين على المستوى $ABCD$، أحدهما يمرُّ بالخطّ AC، والآخر يمرّ بالخطّ BD؛ يقطع هذان المستويان الكرة وفق دائرتين عظميين. نأخذ الدوائر ذات القطر BD، التي تقسم كلَّ ربع من الدائرة ذات القطر AC إلى ثلاثة أجزاء متساوية. نحصل بذلك

على ستّ دوائر قطرها BD. وعلى كلّ واحدة منها نأخذ مُتعَدِّد أضلاعٍ مثل $AEGBIKC$. تحدِّد رؤوسُ جميع مُتعَدِّدات الأضلاع هذه مُتعَدِّدَ سطوح أوجهه هي مربَّعات منحرفة أو مثلّثات. إنّه مُتعَدِّد السطوح المحدَّد في القضية ١٧ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" – راجع الملاحظة جـ) أدناه. ونرفق بكل وجه من هذه الوجوه، هرماً قمته H، مركز الكرة.

يفترض الخازن أنّ الكرة LMN مماسة لكل واحد من هذه الأوجه (انظر الملاحظة في نهاية هذه القضية)؛ يكون، في هذه الحالة، ارتفاعُ كلِّ هرم قمته H مساوياً لنصف القطر R' للكرة LMN؛ يكون إذاً الحجم V_1 للمجسّم مساوياً لحاصل ضرب R' بثلث المساحة الكاملة S_1 للمجسّم: $V_1 = R'.\frac{1}{3}S_1$ و $V_1 > V'$؛ لكن $R > R'$ و $S > S_1$، فيكون: $R.\frac{1}{3}S > V_1 > V'$، وهذا محال لأنّنا افترضنا أنّ $V' = R.\frac{1}{3}S$.

لنفترِض الآن أنّ $V < \frac{1}{3}R.S$؛ توجَد عندئذ كرة أكبر من الكرة $ABCD$ يكون حجمها V'، مع $V' = \frac{1}{3}R.S$؛ لتكن QRX هذه الكرة. نجعلها تحيط بمُتعَدِّد سطوح من النوع السابق بحيث تكون الكرة $ABCD$ مماسة لأوجه مُتعَدِّد السطوح هذا[٤٠]. ليكن V' و V_1 و V على التوالي حجم الكرة QRX ومُتعَدِّد السطوح والكرة $ABCD$؛ يكون لدينا: $V_1 = \frac{1}{3}R.S_1$، لكنّ $S_1 > S$، يكون إذاً $V_1 > \frac{1}{3}R.S$؛ وهذا محال لأنّ $V_1 < V'$ ولأنّنا افترضنا $V' = \frac{1}{3}R.S$.

استناداً إلى استحالة الافتراضين السابقين يبقى أنّ حجم الكرة $ABCD$ هو V، حيث يكون $V = \frac{1}{3}RS$. لكن إذا سمَّينا s مساحة الدائرة العظمى ، يكون لدينا $S = 4s$، فيكون $V = (1+\frac{1}{3})R.s$ و $2sR = \frac{3}{2}V$.

---

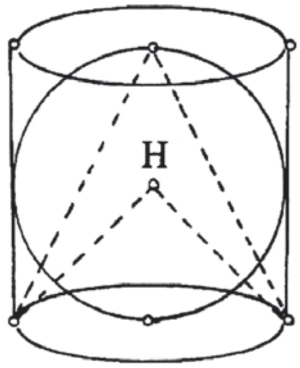
[٤٠] وفق الملاحظة التي تختم هذه القضية، نستطيع أن نفترض أن متعدّد السطوح المحاط بالكرة QRS مأخوذ بحيث لا تقطع الكرة $ABCD$ أوجهه. يكون لدينا :

$$\frac{1}{3}h_3S_1 < V_1 < \frac{1}{3}h_1S_1 \quad \text{مع} \quad (R \le h_3)$$

ونعلم أنّ $V_1 < V'$ ، لذلك يكون $\frac{1}{3}h_2S_1 < V'$؛ لكن $h_2 \ge R$ و $S_1 > S$؛ لدينا إذاً $\frac{1}{3}h_2S_1 > \frac{1}{3}R.S$،

وهذا محال لأنّ الحجم $V' = \frac{1}{3}R.S$ معلوم.

يساوي حجم الأسطوانة المرفقة بالكرة $v = 2R.s$، فيكون إذاً $v = \frac{3}{2}V$.



ويكون للمخروط المرفق بهذه الأسطوانة، وهو المخروط ذو الارتفاع $2R$، الحجمُ: $v_1 = \frac{1}{3}v = \frac{1}{2}V$؛ ويكون للمخروط ذو القمة H والارتفاع R الحجمُ $v_1' = \frac{1}{2}v_1$؛ يكون إذاً $V = 4v_1'$.

المخروط الذي قاعدته دائرة مساحتها $4s$ (أي دائرة نصف قطرها $2R$) وارتفاعه R، يكون له نفس مساحة الكرة.

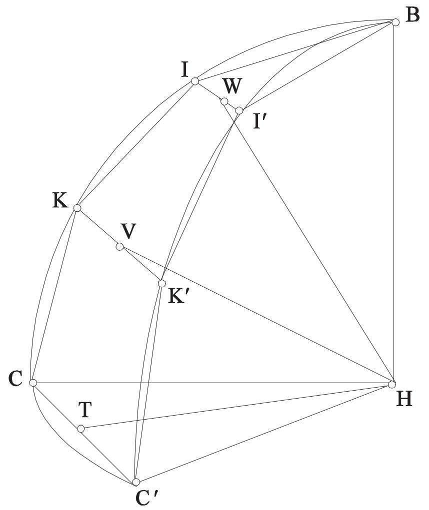
ملاحظة: يرتكز استدلال الخازن على وجود مُتعَدِّد سطوح محاط بالكرة $ABCD$ ومحيط بالكرة LMN. وهنا يجب القيام بثلاث ملاحظات:

أ) الكرة LMN تقطع أوجه مُتعَدِّد السطوح:

الدائرة LMN في القضية ١٨ مماسّة للأوتار BI، IK، KC،... ومن خلال البناء في القضية ١٩، فإن الأقواس المحدَّدة على الدائرة الاستوائية ذات القطر CA وعلى الدوائر المارَّة بالقطبين ذات القطر BD تساوي جميعها القوس $\widehat{BI}$، لذلك فإن أوتارها تساوي الوتر BI، والكرة LMN تكون مماسة لجميع هذه الأوتار. نستخلص مما سبق أن جميع أوجه مُتعَدِّد السطوح تقطع الكرة LMN. ذلك أنّ منتصفات هذه الأوتار المتساوية هي نقاط تماس الكرة LMN مع هذه الأوتار، وكل وجه من مُتعَدِّد السطوح له إذاً على الأقلّ نقطتان على الكرة، فهو يقطع إذاً الكرة LMN.

ب) مُتعَدِّد السطوح لا يقبل كرة محاطة:

المسافة من النقطة H إلى أوجه مُتعَدِّد السطوح متغيرة. لتكن النقطة T منتصف CC'؛ يمرُّ المستوي HBT بالنقطة V منتصف KK' وبالنقطة W منتصف II'. يكون لدينا $\widehat{CC'} > \widehat{KK'} > \widehat{II'}$؛ ينتج من ذلك $HT < HV < HW$. إذا رمزنا بـ h_1، h_2، h_3، على التوالي، إلى المسافات من H إلى متسويات الأوجه BII'، $II'K'K$، $KK'C'C$، يكون لدينا $R > h_1 > HW > h_2 > HV > h_3 > HT$. فالمثلّث BII' متساويُ الساقين وكذلك المربَّعات المنحرفة $II'K'K$ و $KK'C'C$، مع $KC = CC', IK > KK', IB > II'$. لذلك فإن الزوايا $\widehat{IBI'}$، $\widehat{KIK'}$ وَ $\widehat{CKC'}$ حادة ومراكز الدوائر المحيطة تقع على التوالي على القِطَع المستقيمة WB، VW، TV.



بشكل أعمّ، مهما كان عدد الأوجه، أي مهما كان عدد التقسيمات، n، على كل ربع دائرة، يكون لدينا: $R > h_1 > h_2 > ... h_{n-1} > h_n$.

ليس لمُتعَدِّد السطوح، إذاً، كرةٌ محاطة به، ويحقّق حجمُه المتباينات:

$$\frac{1}{3} h_n . S_1 < V_1 < h_1 . S_1 < \frac{1}{3} R . S_1 .$$

ومن أجل تطبيق استدلال الخازن، بإمكاننا أن نأخذ العدد n كبيراً بما يكفي حتى لا تقطع الكرة ذات الحجم V'، $\left(V' = \frac{1}{3} R . S\right)$، ونصف القطر R'، $(R' < R)$، أوجهَ مُتعَدِّد السطوح؛ هذا يعني أنّ علينا أن نأخذ n بحيث يكون $h_n \geq R'$. عند ذلك يكون لدينا: $V' < V_1 < \frac{1}{3} R . S_1$ فيكون إذاً $\frac{1}{3} R . S < \frac{1}{3} R S_1$، وهذا محال لأنّ $S > S_1$.

جـ) نشير أيضاً إلى أنّ الخازن يتصور هنا مجسّماً على الشكل التالي:

مُتعَدِّد سطوح محاط بكرة.

ليكن B وD قطبَي الكرة. هناك دائرتان متعامدتان تمرّان بالقطبين B و D ؛ نرسم الدائرة الاستوائية، الموافقة للقطبين، التي تقطع هاتين الدائرتين على أربع نقاط. يقسِم الخازن كلّ قوس إلى ثلاثة أجزاء، فنحصل على اثنتي عشرة نقطة على الدائرة الاستوائية؛ فيكون لدينا إذاً اثنتا عشرة نقطة على كلّ واحدة من الدوائر الستّ المُرفقة والمارّة بالقطبين، أي عشر نقاط بالإضافة إلى نقطتي القطبين.

إذا قسّمنا كل قوس من الأقواس الأربع إلى أجزاء عددها n، يكون لدينا نقاط عددها $4n$ على الدائرة الاستوائية، وبالتالي دوائر مارَّة بالقطبين عددها $2n$.

على كل دائرة من الدوائر المارّة بالقطبين لدينا نقاط عددها $2(2n-1)$ بالإضافة إلى القطبين. فيكون لدينا، بالمجموع، نقاطٌ عددها $4n(2n-1)$، بالإضافة إلى القطبين.

يكون لمُتعَدِّد السطوح إذاً رؤوسٌ عددُها $4n(2n-1)+2$:

في الحالة $n = 1$، يكون له ٦ رؤوس؛ في الحالة $n = 2$، يكون له ٢٦ رأساً؛

في الحالة $n = 3$، يكون له ٦٢ رأساً؛ وهي الحالة التي أخذها الخازن؛

في الحالة $n = 4$، يكون له ١١٤ رأساً.

إذا سَمّينا A_n و V_n مساحة وحجم المجسم $\sum_n$، وإذا سمَّينا A وV مساحة وحجم الكرة، فإنّ A_n تتزايد بتزايد n (مع $A_n < A$) و V_n يتزايد بتزايد n (مع $V_n < V$).

المبرهنة ٢٠- من بين جميع المجسّمات المحدّبة، التي لها نفس المساحة، الكرة هي المجسم الذي له الحجم الأكبر.

لتكن لدينا كرة مركزها O، ونصف قطرها R، ومساحتها S، وحجمها V، وليكن معنا مُتعَدِّدُ سطوح مساحته S نفسها وحجمه V_1؛ نفترض أنَّ مُتعَدِّدَ السطوح هذا محيطٌ بكرة LMN، مركزها H، ونصف قطرها R' ومساحتها S'، فيكون لدينا $V_1 = \frac{1}{3} S.R'$.

المساحة S' أقلّ من مساحة مُتعَدِّد السطوح، أي $S' < S$ ، و $R' < R$ ، فيكون $\frac{1}{3}S.R' < \frac{1}{3}S.R$

أي $V_1 < V$.

لنلاحظ أنّ طبيعة مُتعَدِّد السطوح ليست محدّدة، لكن البرهان يفترض أنّه محيط بكرة، وهذه هي الحالة بالنسبة إلى مُتعَدِّد سطوح منتظم، لكن البرهان المعتمد هنا لا ينطبق على مُتعَدِّد سطوح اختياريّ أو على مجسّم اختياريّ.

ملاحظة: أمثلة عن مجسمات متساوية المساحة S مع كرة نصف قطرها R.

إذا كانت أسطوانة نصف قطرها R وارتفاعها R، تكون مساحتها الجانبية $2\pi R.R$ ، مساحتها الكلّيّة هي إذاً $S = 4\pi R^2$ ، ويكون حجمها $V = \pi R^3 > \frac{4}{3}\pi R^3$.

إذا كان لمخروط قاعدة نصف قطرها R ومولّد l، حيث $l = 3R$ ، تكون مساحته الكلّيّة $S = \pi R(R+l) = 4\pi R^2$ ، فيحقّق ارتفاعه h العلاقة $h^2 = l^2 - R^2 = 8R^2$ ، أي $h = 2\sqrt{2}R$ ،

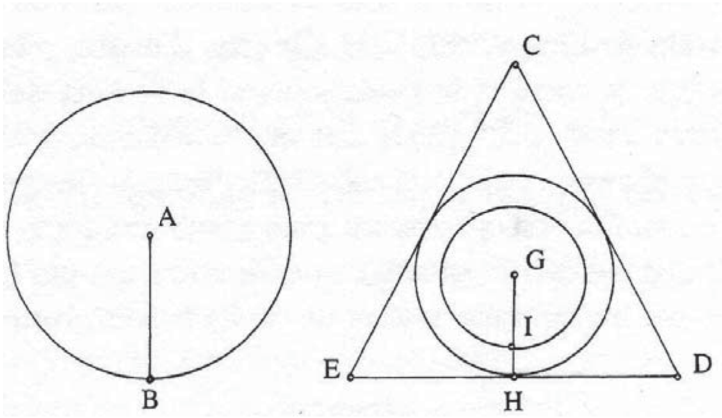
ويكون حجمه $V = \frac{1}{3}\pi R^2.2\sqrt{2}R = \frac{2\sqrt{2}}{3}\pi R^3 > \frac{4}{3}\pi R^3$

هكذا نرى أنّ الخازن لا يعمد إلى مقارنة مُتعَدِّدات السطوح، لكنّه يصل إلى النتيجة باستخدام الصيغة التي تربط بين حجم الكرة ومساحتها، وهي الصيغة التي يحصل عليها من خلال مقاربة الكرة بواسطة مُتعَدِّدات سطوح غير منتظمة. وسيكون مسار ابن الهيثم مختلفاً، كما سنرى لاحقاً؛ فهذا الأخير يحاول العمل من خلال مقارنة مُتعَدِّدات سطوح منتظمة، مساحاتها متساوية، وأعداد أوجهها مختلفة، ليتمكّن من تقديم برهان فعّال. لكن هذا البرهان يُخفِق بسبب العدد المنتهي لمُتعَدِّدات السطوح المنتظمة؛ لذا، وبدلاً من أن يحلّ المسألة الأصليّة، عرض ابن الهيثم نظرية مبتكرة في الزاوية المجسّمة. نرى إذن أنّ الخازن ينتمي هنا، مرّة أخرى، إلى عائلة زينودوروس وبابوس، التي لا ينتمي إليها ابن الهيثم.

٤-٢-٤ مقالة السُمَيساطي

يتضمّن هذا النصُّ للسُمَيساطي، نتيجة واحدة؛ ولكنّه عرف انتشاراً واسعاً. وكان الخازن قد أثبت هذه النتيجة (التي هي المرحلة الأخيرة من استدلاله في المبرهنة العاشرة). إنّ جميع النتائج المتعلّقة بمُتعَدِّدات الأضلاع غير المنتظمة غائبة، بشكل واضح، عن هذا النصّ.

مساحة الدائرة أكبر من مساحة أي مُضلّع متساوي الأضلاع والدائرة المحيط نفسه.



لتكن الدائرة (A، AB) ذات المركز A ونصف القطر AB، وليكن CDE مُضلّعاً متساويَ الأضلاع، وليكن محيطه مساوياً لمحيط الدائرة p. ليكن G مركز الدائرة المحاطة بـ CDE و GH نصف قطرها، بحيث تكون النقطة H منتصف DE. حاصل ضرب نصف المحيط p بنصف القطر GH هو مساحة مُتعَدِّد الأضلاع.

إذا كان $GH = AB$، يكون محيط الدائرة $(G, \ GH)$ مساوياً أيضاً لـِ p، وتكون مساحة الدائرة مساوية لمساحة مُتعَدِّد الأضلاع، وهذا محال.

إذا كان $GH > AB$، يكون محيط الدائرة $(G, \ GH)$ أكبر من محيط الدائرة $(A, \ AB)$، ويكون محيط CDE، الذي هو أكبر من محيط الدائرة $(G, \ GH)$، أكبر بكثير من محيط الدائرة $(A, \ AB)$؛ وهذا محال. لدينا إذاً $GH < AB$، مساحة الدائرة $(A, \ AB) = \frac{1}{2}p.AB$، مساحة المضلّع $= \frac{1}{2}p.GH$، فيكون: مساحة الدائرة $(A, AB) >$ مساحة المُضَلّع (CDE).

٤-٣ أبو جعفر الخازن:
نصّ من "شرح المقالة الأولى للمجسطي"

٤-٣-١ السميساطي:
مقالة "في أنَّ سطح كلّ دائرة أوسع من كلِّ سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها"

٤٧ – ظ

نقلناه من شرح أبي جعفر محمد بن الحسن الخازن
للمقالة الأولى من المجسطي

قال بطلميوس: وإن الأشكال المختلفة التي إحاطتها متساوية ما هو منها أكثر زوايا فهو أعظم قدرًا، ولذلك وجب أن الدائرة أعظم السطوح والكرةَ أعظم المجسمات.

يعني أن الأشكال المختلفة من ذوات الأضلاع المستقيمة، كالمثلث والمربع والمخمس وسائر ذلك إلى ما لا ينتهي، إذا كانت أضلاع كل واحد منها مساوية لأضلاع الآخر مجموعةً، فإن أكثرها زوايا أعظمها مساحة؛ مثل المثلث والمربع والمخمس إذا كانت جملة أضلاع كل واحد منها عشرة، كان المربع أعظم مساحةً من المثلث والمخمسُ أعظم مساحةً من المربع، ثم كذلك إلى ما لا نهاية له في الأشكال الكثيرة الأضلاع؛ ثم الدائرة التي محيطها عشرة أعظمها كلها. واعتبار ذلك بالحساب يسير، وأما بيانه بالهندسة فإنا نقدم ما نحتاج إليه من المقدمات فنقول:

〈مقدمات〉

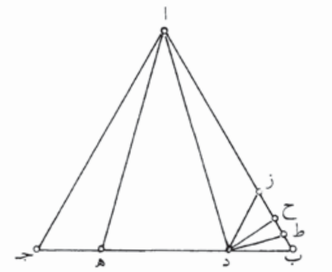
إن كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية العدد والإحاطة وأحدهما متساوي الأضلاع والزوايا، / فإنه أعظم من الآخر. ٤٨ – و

ومن مقدمات ذلك:

〈آ〉 مثلث آ ب ج متساوي الأضلاع ومثلث آ د ه متساوي الساقين.

9 مساحة من (الأولى): من مساحة.

أقول: إن فضل ا ب على ا د أصغر من فضل ا د على ب ه، وإن كلا الفضلين مثلُ فضل ا ب على ب ه، وهو ب د.



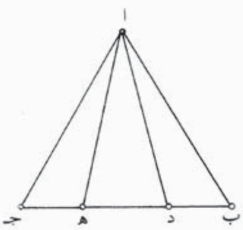
برهان ذلك: أن نخرج د ز يوازي ا ج، ونلقي عمود د ح ⟨على ا ب⟩، فمثلث ب ز د متساوي الأضلاع، ف ب ح مثل ز ح، وا ح أصغر من ا د. ونأخذ ا ط مثل ا د، فيكون ب ط أصغر من ط ز، ولكن ب ط فضلُ ا ب على ا د، وط ز فضل ا د على ب ه، لأن ز ا مثل د ج ود ج مثل ب ه، وجميع ب ط ط ز مثل ب د.

فإذن فضل ضعف ا ب على ب ه ا د، وهو ب د ب ط، أصغر من فضل ا ب ا د على ضعف ب ه، وهو ب د ط ز؛ ونجعل ا ب مشتركًا بين ضعف ا ب وبين ب ه ا د، وب ه مشتركًا بين ا ب ا د وبين ضعف ب ه، فيكون فضل ثلاثة أمثال ا ب على جميع ا ب ب ه ا د، أعني ه ا، أصغرَ من فضل جميع ا ب ب ه ه ا على ثلاثة أمثال ب ه. ويكون ضرب ثلاثة أمثال ب ه في ثلاثة أمثال ا ب،/ – الذي هو ضرب ب ه في تسعة أمثال ا ب – أصغرَ [٤٨ – ظ] من مربع جميع ا ب ب ه ه ا، لأن نسبة الأول إلى الثاني أصغر من نسبة الثاني إلى الثالث، من قِبَلِ أن الفضل المنقوص من الأول، وهو ب د ب ط، حتى بقي الثاني أصغرَ من الفضل المنقوص من الثاني، وهو ب د ط ز، حتى بقي الثالث.

– ب – مثلث ا ب ج متساوي الأضلاع ومثلث ا د ه متساوي الساقين.

أقول: إن نسبة مربع محيط ا د ه إلى مربع محيط ا ب ج أعظم من نسبة مثلث ا د ه إلى مثلث ا ب ج.

1 كلا: يكتبها «كلى» ولن نشير لذلك مرة أخرى – 10 ب ه: كتب بعدها «طا»، ثم ضرب عليها بالقلم.

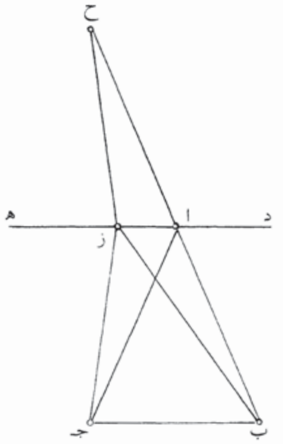


برهان ذلك: أن مربع محيط ا ب ه أعظم من ضرب ب ه في تسعة أمثال ب ج، وأيضًا مربع محيط ا د ج أعظم من ضرب د ج في تسعة أمثال ب ج، وذلك مثل ضرب ب ج في تسعة أمثال ب ج وضرب د ه في تسعة أمثال ب ج؛ إلّا أن ضرب ب ج في تسعة أمثاله مثل ⟨مربع⟩ محيط ا ب ج، فمربعا محيطي ا ب ه ا د ج أعظم من مربع محيط ا ب ج وضرب د ه في تسعة أمثال ب ج. ولكن الخط المساوي لمحيطي ا ب ج ا د ه قد انقسم بقسمين متساويين وهما ا ب ه ا د ج وبقسمين مختلفين وهما ا ب ج ا د ه، فمربعا محيطي ا ب ج ا د ه أعظم من مربعي / محيطي ا ب ه ا د ج. وقد تبيّن أن مربعي ا ب ه ا د ج أعظم من مربع محيط ا ب ج وضرب د ه في تسعة أمثال ب ج. فمربعا محيطي ا ب ج ا د ه أعظم كثيرًا من مربع محيط ا ب ج وضرب د ه في تسعة أمثال ب ج. ونلقي مربع محيط ا ب ج المشترك، فيبقى مربع محيط ا د ه أعظم من ضرب د ه في تسعة أمثال ب ج، فنسبة مربع محيط ا د ه إلى مربع محيط ا ب ج أعظم من نسبة ضرب د ه في تسعة أمثال ب ج إلى مربع محيط ا ب ج. ولكن ضرب د ه في تسعة أمثال ب ج مثل ضرب ثلاثة أمثال د ه في ثلاثة أمثال ب ج، ونسبة ضرب ثلاثة أمثال د ه في ثلاثة أمثال ب ج إلى مربع محيط ا ب ج كنسبة ثلاثة أمثال د ه إلى ثلاثة أمثال ب ج وكنسبة د ه إلى ب ج وكنسبة مثلث ا د ه إلى مثلث ا ب ج. فنسبة مربع محيط ا د ه إلى مربع محيط ا ب ج أعظم من نسبة مثلث ا د ه إلى مثلث ا ب ج./ و – ٤٩

– ج – مثلث ا ب ج متساوي الساقين. وقد جاز على نقطة ا خط د ه يوازي ب ج، ظ – ٤٩
وخرج إليه من نقطتي ب ج خطان فالتقيا على ز.

أقول: إن مجموع ب ز ز ج أطول من مجموع ا ب ا ج.

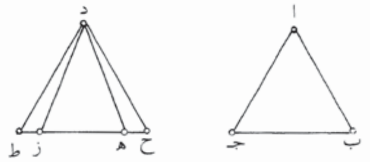
2 وذلك: استدركها في الهامش مع بيان موضعها – 5 بقسمين: الأفصح «قسمين» وسنتركها كما هي دون الإشارة فيما بعد – 6 ا د ه (الثانية): كتبها أولاً ا ب ه، ثم صححها تحتها.



برهان ذلك: أن نزيد في اب مثله، وهو اح، ونصل زح. فزاوية داب مثل زاوية زاح وزاوية داب مثل زاوية اب جـ التي تساوي زاوية اجـ ب. وزاوية اجـ ب مثل زاوية زاجـ، فزاوية زاجـ مثل زاوية زاح. واح مثل اجـ واز مشترك في مثلثي ازجـ ازح، فضلع زح مثل زجـ. ومجموع زب زح أطول من ب ح، فمجموع ب ز زجـ أطول من مجموع اب اجـ.

– د – مثلث اب جـ متساوي الأضلاع ومثلث د هـ ز متساوي الساقين، وهما د هـ د ز، ومحيطاهما متساويان.

أقول: إن مثلث اب جـ أعظم من مثلث د هـ ز.



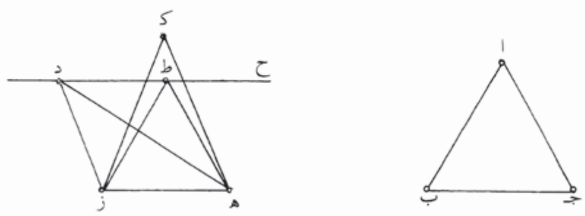
برهان ذلك: أنّا نعمل مثلث د ح ط متساوي الأضلاع، فيكون نسبة مربع محيط / د هـ ز ٥٠-و إلى مربع محيط د ح ط أعظم من نسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث د ح ط. ولكن مربع محيط د هـ ز مساوٍ لمربع محيط اب جـ، فنسبة مربع محيط اب جـ إلى مربع محيط د ح ط أعظم من نسبة

5 متساوي (الأولى): كتب بعدها «الساقين»، ثم ضرب عليها بالقلم.

مثلث د ه ز إلى مثلث د ح ط. ولكن نسبة مربع محيط ا ب ج إلى مربع ⟨محيط⟩ د ح ط كنسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د ح ط، فنسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د ح ط أعظم من نسبة مثلث د ه ز إلى مثلث د ح ط. فمثلث ا ب ج أعظم من مثلث د ه ز.

– **ه** – مثلث ا ب ج متساوي الأضلاع، ومثلث د ه ز مختلف الأضلاع، ومحيطاهما متساويان.

أقول: إن مثلث ا ب ج أعظم من مثلث د ه ز.



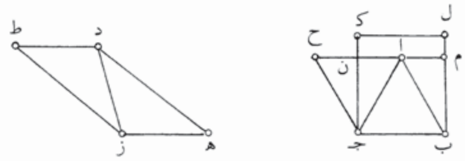
برهان ذلك: أنّا نجيز على نقطة د خط د ح غير محدود يوازي ه ز، ونخرج إليه من نقطتي ه ز خطي ه ط ز ط متساويين. فمجموع ط ه ط ز أصغر من مجموع د ه د ز. ونخرج من نقطتي ه ز خطي ه ك ز ك متساويين ومساويين لخطي د ه د ز. فمثلث ه ك ز أعظم من مثلث ه ط ز، ومثلث / ه ط ز مثل مثلث ه د ز لأنهما على قاعدة واحدة وبين خطين متوازيين. فمثلث ظ – ٥٠
ه ك ز أعظم من مثلث ه د ز، ومثلث ه ك ز، كما قد بينّا، ليس بأعظم من مثلث ا ب ج لأن محيطيهما متساويان، فمثلث ا ب ج أعظم من مثلث د ه ز.

وقد تبيّن من ذلك أن المثلث المتساوي الساقين أعظم من المثلث المختلف الأضلاع إذا كان محيطاهما متساويين.

– **و** – ونعيد مثلثي ا ب ج د ه ز ونضعّفهما بخطوط ا ح ج ح ز ط د ط؛ فيكون معيّن ب ح أعظم من معيّن ه ط المستطيل، وأحدهما متساوي الأضلاع والآخر مختلفها، وإن كان

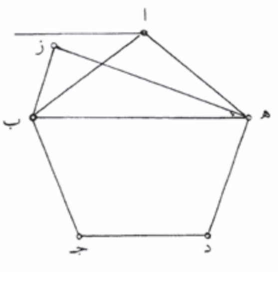
3 مثلث (الأولى): مكررة – 9 ه ك: ه د، ثم أثبت الصواب في الهامش – 14 متساويين: متساويان – 15 ز ط: ح ط.

محيطاهما متساويين. ونخرج جـ ك على زاوية قائمة من ب جـ يساوي ا جـ، وك ل يساوي ويوازي ب جـ، ونصل ل ب، ونخرج ا ح إلى م، فمثلث ا م ب مثل مثلث جـ ن ح، ومستطيل ب م ن جـ مثل معيّن ب ح، فمربع ب ك أعظم من معيّن ب ح، فهو أعظم كثيرًا من معيّن هـ ط. وأحدهما متساوي الأضلاع والزوايا والآخر مختلف / الأضلاع والزوايا. ٥١ - و



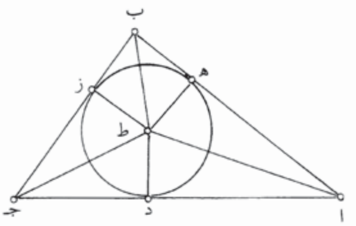
وهذه حال كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع الكثيرة المستقيمة المتساوية العدد والإحاطة: أن المتساوي الأضلاع والزوايا منها أعظم من المختلف الأضلاع والزوايا.

– ز – مثال ذلك: أن يكون مخمّس ا ب جـ د هـ متساوي الأضلاع والزوايا، ونصل خط هـ ب، ونخرج من نقطتي هـ ب خطين يلتقيان على ز ويكون مجموعها مثل مجموع ا هـ ا ب. فيكون مثلث ا هـ ب أعظم من مثلث هـ ز ب. ونجعل سطح هـ ب جـ د مشتركًا، فيكون مخمس ا ب جـ د هـ أعظم من مخمس ز ب جـ د هـ. وإن عُمل مثل ذلك على سائر الأضلاع، فيكون مخمس ا ب جـ د هـ أعظم كثيرًا من المختلف الأضلاع. وأيضًا، زاوية هـ ا ب مثل كل واحدة من زوايا ا ب جـ ب جـ د جـ د هـ د هـ ا، وزاوية هـ ز ب مخالفة لزاوية هـ ا ب، فيكون مخمس ا ب جـ د هـ المتساوي الزوايا أعظم من مخمس ز ب جـ د هـ المختلف الزوايا./ ٥١ - ظ



2 ومستطيل: ومربع – 12 هـ ز ب: كتبها ا ر د، وصححها في الهامش.

– ح – كل شكل ذي أضلاع مستقيمة يحيط بدائرة، فإن ضرب نصف قطر الدائرة في نصف جملة الأضلاع مساحةُ الشكل.



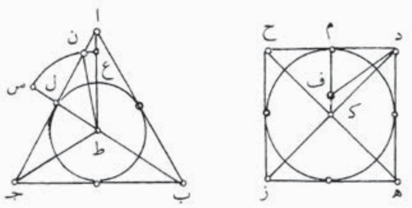
فليكن الشكل ا ب ج، والدائرة التي يحيط بها د ه ز ومركزها ط. ونخرج ط د ط ه ط ز، فتكون أعمدة على الأضلاع، ونصل خطوط ا ط ب ط ج ط. فضرب ط د في نصف ا ج مثلثُ ا ط ج، وضرب ط ه في نصف ا ب مثلثُ ا ب ط، وضرب ط ز في نصف ب ج مثلثُ ب ط ج. فضرب نصف قطر الدائرة في نصف جملة الأضلاع مساحةُ مثلث ا ب ج.

وإن كان الشكل ذا أربعة أضلاع، انقسم بأربعة مثلثات، فإن كان كثير الأضلاع، انقسم بمثلثات على عدة أضلاع، وكان ضربُ نصف قطر الدائرة التي يحيط بها الشكل في نصف كل واحد من الأضلاع مساحةَ واحدٍ واحدٍ من المثلثات، وجملةُ المثلثات هي مساحة الشكل، ومساحةُ الشكل أعظمُ من مساحة الدائرة لأن ضرب نصف قطرها في نصف محيطها / مساحتُها، ونصف محيطها أصغر من نصف جملة أضلاع الشكل لأن الشكل محيطٌ بها. ولذلك ٥٢ – و يكون ضرب نصف قطر الدائرة التي تحيط بالشكل في نصف جملة أضلاعه أعظم من مساحة الشكل، وضربه في نصف محيط الدائرة مساحة الدائرة، فمساحتها أعظم من مساحة الشكل الذي تحيط هي به.

– ط – كل شكلين من الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية الإحاطة متساويي الأضلاع والزوايا من نوعين مختلفين، فإن أكثرهما زوايا هو أعظم.

مثال ذلك: أن يكون مثلث ا ب ج ومربع د ه ز ح متساويي الأضلاع والزوايا، وتكون إحاطتاهما متساويتين، فيكون المربع أعظم من المثلث.

7 بأربعة: بأربع.



برهان ذلك : أن نفرض نقطتي ط ك مركزي الدائرتين اللتين يحيط بهما الشكلان. فنصل ا ط ب ط جـ ط ح ك د ك هـ ك ز ك ، فجملةُ الزوايا الثلاث عند نقطة ط مثلُ جملة الزوايا الأربع عند نقطة ك لأن كل واحدة من الجملتين مثلُ أربع زوايا قائمة. فزاوية ا ط جـ ثلث أربع زوايا قائمة، وزاوية د ك ح ربع أربع زوايا قائمة، وا جـ ثلث محيط ا ب جـ ود ح ربع محيط مربع د هـ ز ح، والمحيطان متساويان، / فنسبة زاوية ا ط جـ إلى زاوية د ك ح كنسبة ا جـ إلى د ح؛ ٥٢ - ظ
وزاوية ا ط جـ أعظم من زاوية د ك ح، وا جـ أعظم من د ح. ونلقي عمودي ط ل ك م؛ فتنقسم كل واحدة من زاويتي ا ط جـ د ك ح وكلٌّ واحد من ضلعي ا جـ د ح نصفين نصفين. فنسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية د ك م كنسبة ا ل إلى د م. وزاوية ا ط ل أعظم من زاوية د ك م وا ل أعظم من د م. فنأخذ ن ل مثل د م، ونصل ن ط، ونرسم على نقطة ط وببعد ط ن قوس س ن ع، ونخرج ط ل إلى س، فنسبة زاوية ا ط ن إلى زاوية ن ط ل كنسبة قطاع ط ن ع إلى قطاع ط ن س. ونسبة قطاع ط ن ع إلى قطاع ط ن س أصغر من نسبة مثلث ا ط ن إلى مثلث ن ط ل. ونسبة مثلث ا ط ن إلى مثلث ن ط ل كنسبة ا ن إلى ن ل، فنسبة زاوية ا ط ن إلى زاوية ن ط ل أصغر من نسبة ا ن إلى ن ل. وفي التركيب، نسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية ن ط ل أصغر من نسبة ا ل إلى ن ل. ون ل مثل د م، فنسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية ن ط ل أصغر من نسبة ا ل إلى د م. ولكن نسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية د ك م كنسبة ا ل إلى د م، فنسبة زاوية ا ط ل إلى زاوية ن ط ل أصغر من نسبة زاوية ا ط ل إلى / زاوية د ك م. وزاويتا ا ل ط د م ك ٥٣ - و
قائمتان، فتبقى زاوية ط ن ل من مثلث ط ل ن أصغر من زاوية ك د م من مثلث ك م د. فنعمل زاوية م د ف مثل زاوية ط ن ل، ومثلث م د ف يشبه مثلث ل ن ط. ولكن د م مثل ن ل، ف م ف مثل ل ط، فضرب نصف محيط مربع د هـ ز ح في ك م أعظم من ضربه في ف م. ولكن ضربه في ك م مساحةُ مربع د هـ ز ح، وضربه في ف م مساحة مثلث ا ب جـ.

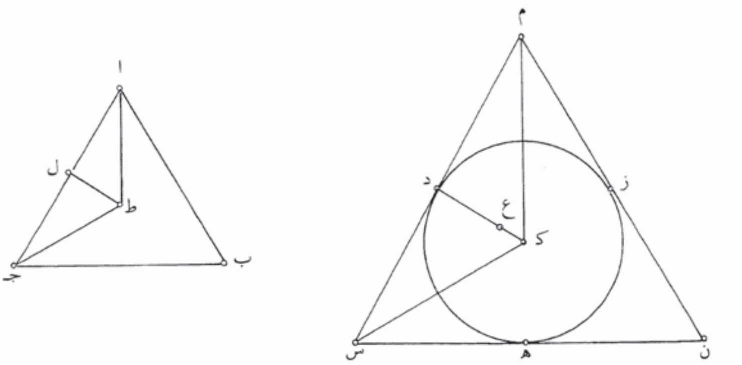
13 ن ط ل (الثانية) : كتبها ط ن ل ، وصححها في الهامش.

وبمثل هذا التدبير تبيّن في شكلين متساويي الأضلاع والزوايا من الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة ⟨المتساوية الإحاطة⟩ أن أكثرهما زوايا أعظمها مساحة.

– يَ – ونعيد مثلث ا ب جـ دون القطاع ونرسم معه دائرة د هـ ز على مركز ك، وليكن محيطاهما متساويين.

فنقول: إن الدائرة أعظم من المثلث.

برهان ذلك: أن نخطّ مثلث م ن س متساوي الأضلاع يحيط بالدائرة، ونصل ك م / ك س؛ فنسبة محيط مثلث م ن س إلى محيط مثلث ا ب جـ كنسبة ضلع م س إلى ضلع ا جـ. ٥٣ – ظ
ومحيط مثلث م ن س أعظم من محيط مثلث ا ب جـ لأنه أعظم من محيط دائرة د هـ ز، فضلع م س أعظم من ضلع ا جـ. ونلقي عمود ك د، فيكون م د أعظم من ا ل، وزاوية م ك س مثل زاوية ا ط جـ، لأن كل واحدة منها ثلث أربع زوايا قائمات، وزاوية م ك د نصف زاوية م ك س، وزاوية ا ط ل نصف زاوية ا ط جـ، فزاوية م ك د مثل زاوية ا ط ل. وزاوية م د ك قائمة مثل زاوية ا ل ط، فمثلث م ك د يشبه مثلث ا ط ل. ولكن م د أعظم من ا ل، فـ د ك أعظم من ل ط. فنأخذ منه د ع مثل ل ط. وضرب نصف محيط دائرة د هـ ز في د ك مساحة الدائرة، وضربه في د ع مساحة مثلث ا ب جـ، فالدائرة أعظم من المثلث./



ونقيس أيضًا هذه الدائرة إلى مربع د هـ ز ح من الشكل المتقدم، بأن نعيد المربع مكان ٥٤ – و
مثلث ا ب جـ، ونتوهم جملة أضلاعه مساوية لمحيط دائرة د هـ ز. ونعمل على الدائرة مربعًا مكان مثلث م ن س، ونبيّن بمثل البرهان الأوّل أن مساحتها أعظم من مساحة مربع د هـ ز ح.

وكذلك نقيسها إلى مخمس متساوي الأضلاع والزوايا جملة أضلاعه مساوية لمحيطها، وإلى شكلٍ شكلٍ من الأشكال المتساوية الأضلاع والزوايا بعد المخمس بالغةً ما بلغت ليتبيّن أن الدائرة أعظمُ الأشكال ذوات الأضلاع المستقيمة المتساوية الإحاطة.

وقد يمكن أن نبيّن ما بينّا بشكلين مختلفي الأضلاع بعد أن يكونا متشابهين بمثل ما دبرنا سواءً، وذلك أن نجعل بدل مثلثي ا ب جـ م ن س شكلين من ذوات الأضلاع الأربعة أو من ذوات الأضلاع الكثيرة، مختلفي الأضلاع متشابهين. إلّا أنّا آثرنا بيان ذلك بشكلين متساويي الأضلاع والزوايا، لأن كل واحد منها أعظم من نظيره الذي تختلف أضلاعه ويساويه في الإحاطة، كما بينّا فيما تقدم./

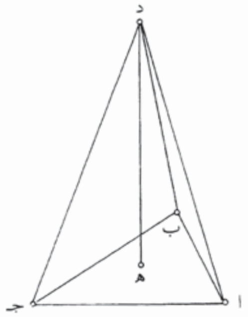
ومن بعد ذلك، فإنا نبيّن أن الكرة أعظم الأشكال المجسمة المتساوية الإحاطات، كانت ٥٤ - ظ
إحاطاتها سطوحًا مستوية كالمكعب والمنشور والمخروط الذي قاعدته مستقيمة الأضلاع، أو كانت سطوحًا مقوسة كالكرة والأسطوانة ومخروط الأسطوانة.

⟨يا⟩ ونبتدئ بالمخروط الذي قاعدته مثلثة ذات أضلاع مستقيمة متساوية. فإن المخروط مبدأ هذه الأشكال، كما أن المثلث مبدأ الأشكال المسطحة ذوات الأضلاع. ونرسمه على هذه الصورة، ونتوهم قاعدته وهي مثلث ا ب جـ المتساوي الأضلاع، موضوعةً في سطح موازٍ للأفق، ونقطة د وهي رأسه في الهواء، مع مثلثات ا ب د ا د جـ ب د جـ، وكل واحد منها متساوي الساقين، وخط د هـ عمود على سطح القاعدة. فإن كانت أضلاع كل واحد منها متساوية ومساوية لأضلاع قاعدة ا ب جـ، كان المخروط أوّل الأشكال الخمسة المذكورة في آخر كتاب الأصول، ويسمّى الشكل الناري لشبهه بشكل لهيب النار مثل ضوء السراج، وما أشبهه من أضواء النيران، غير أن انخراطه مائل إلى / التدوير، وإن كانت قاعدته مستقيمة الأضلاع، وذلك أن ٥٥ - و
هذا الاسم يقع على كل مخروط تكون قاعدته ذات أضلاع مستقيمة متساوية، ثلاثةً كانت الأضلاع أو أربعة أو أكثر من ذلك بالغةً ما بلغت، وسائر سطوحه مثلثات متساوية السوق. والحكم في هذا النوع من المخروطات ما نذكره في هذا المخروط: وهو أن مساحة سطحه دون مساحة سطح قاعدته، أن نضرب العمود الذي يلقى من نقطة د إلى ضلع من أضلاع ا ب ب جـ

2 بعد المخمس: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها – 16 ومساوية: ومساوية.

اج – وهو يقسمه بنصفين – في نصف جملة الأضلاع، لأن ضرب هذا العمود في نصف الضلع مساحةُ المثلث الواحد، وفي ثلاثة أنصاف الأضلاع مساحة جملة المثلثات الثلاث التي هي ظاهر سُمك المخروط. ولأن نصف قطر الدائرة التي يحيط بها مثلث اب ج في نصف جملة أضلاعه هو مساحة المثلث، يكون ضرب مجموع العمود ونصف قطر الدائرة في نصف جملة أضلاع اب ب ج اج هو مساحة سطح كل مخروط.

〈يب〉 ولأن المنشور الذي قاعدته مثلث اب ج وعموده هـ د / ينقسم بثلاثة مخروطات متساويات، كما بيّن في الشكل السادس من القول الثاني عشر من كتاب الأصول، يكون مخروط اب ج د ثلث المنشور. ولكن ضرب عمود د هـ في سطح اب ج جسم المنشور، فضربه في ثلث سطح اب ج جسم المخروط. ظ – ٥٥



ويتبيّن من ذلك أن نسبة سطح المخروط، الذي قاعدته شكل مستقيم الأضلاع، إلى سطح القاعدة كنسبة العمود الواقع على ضلع من أضلاعه إلى نصف قطر القاعدة، لأن ضرب نصف جملة أضلاع القاعدة في هذا العمود سطحُ المخروط، وضربَه في نصف قطر القاعدة سطحُ القاعدة.

ومن أجل ذلك يكون ضرب نصف قطر الكرة التي يحيط بها المخروط ذو القواعد المسطوحة في

4 ونصف: كتبها «في نصف» ثم صححها فوقها / في نصف: كتبها «ونصف» وصححها فوقها – 6 بثلاثة: بثلث – 7 متساويات: الأفصح «متساوية» فالجمع من غير العاقل يعامل معاملة المفرد المؤنث – هذا الشكل ليس في المخطوطة.

ثلث قواعده جسمَه، لأنه ينقسم إلى مخروطات تجتمع رؤوسها عند مركز الكرة، وتكون قواعدها قواعد المخروط. والكرة تماس كل / واحدة من القواعد ويقوم نصف قطرها عمودًا ⟨على القواعد⟩ على موضع التماس، ويكون ضربه في ثلث كل قاعدة مخروط من تلك المخروطات، لأنه ثلث المنشور الذي قاعدته قاعدته وارتفاعه ارتفاعه. وضرب الارتفاع في القاعدة هو جسم المنشور، تساوت أضلاع القاعدة أو اختلفت. وكما بيّنا أيضـًا أن ضرب نصف قطر الدائرة التي يحيط بها الشكل ذو الأضلاع في نصف جملة أضلاعه، تساوت أو اختلفت، هو سطح الشكل، كذلك ضرب نصف قطر الكرة التي يحيط بها هذا المخروط في ثلث جملة قواعده، تساوت أو اختلفت، هو جسم المخروط. ٥٦ - و

⟨يجـ⟩ الأسطوانة المستديرة شكل مجسم تحيط به دائرتان متوازيتان وسطح يقوم بينهما ذو تقويس؛ وكل واحدة من الدائرتين تسمّى قاعدة الأسطوانة. وكل خط مستقيم يصل ما بين محيطي القاعدتين ويقوم عليهما على زوايا قائمة يسمّى ضلع الأسطوانة. والخط الذي يصل ما بين مركزي القاعدتين يسمّى سهم الأسطوانة. فإن كان قيام / السهم على سطحي القاعدتين على غير زوايا قائمة، سمّيت الأسطوانة مائلة، وإن كان قيامه عليهما على زوايا قائمة سمّيت قائمة؛ وحدوثها من سطح متوازي الأضلاع يُثبّت أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة، ويُدار السطح حتى يعود إلى حيث منه بدأ. ٥٦ - ظ

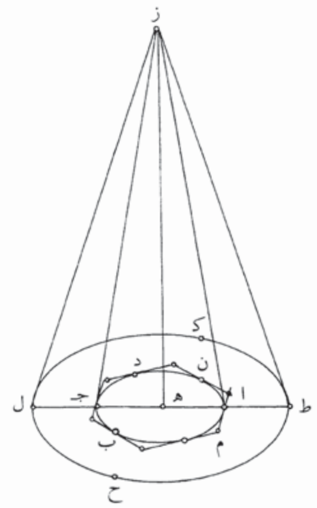
ومخروط الأسطوانة القائمة شكل مجسم يأخذ في الانخراط من محيط إحدى قاعدتي الأسطوانة حتى يفنى عند مركز القاعدة الأخرى، وذلك المركز هو رأس المخروط، ويسمّى أيضـًا الشكل الصنوبري لشبهه بثمرة الصنوبر. وسهم الأسطوانة هو عمود، ويسمى أيضـًا الارتفاع. وكل خط مستقيم يخرج من رأسه إلى محيط قاعدته على زوايا قائمة يُسمى ضلع المخروط.

ونُصوره على هذا المثال، ونتوهم قاعدته، وهي دائرة ا ب جـ د ومركزها نقطة هـ، موضوعةً على سطح موازٍ للأفق، ونقطة ز في الهواء بحيث إذا وُصِل بينها وبين هـ بخط مستقيم قام على سطح الدائرة على زوايا قائمة. ونخرج قطر ا جـ، ونصل خطي ز ا ز جـ.

1 قواعده: قواعد – 13 عليها: عليها – 18 لشبهه: كتبها لشكله، وصححها في الهامش.

ونقول: إن ضرب ا ز في قوس ا ب جـ، التي هي نصف / دائرة ا ب جـ د سطحُ مخروط ا ب جـ د ز دون سطح قاعدته. ٥٧ - و

برهان ذلك: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فليكن ضرب ا ز في قوس أعظم من قوس ا ب جـ سطحَ مخروط ا ب جـ د ز. ونجعلها قوس ط ك ل، التي هي نصف محيط دائرة ط ك ل ح. ونعمل على محيط ا ب جـ د شكلاً ذا أضلاع مستقيمة متساوية يحيط بالدائرة وهو مسدس ا م جـ ن. ونتوهم خطوطًا مستقيمة تنزل من نقطة ز إلى أطراف المسدس، فتحدث مخروطًا قاعدته ذات أضلاع مستقيمة متساوية ويكون أعظم من مخروط ا ب جـ د ز لأنه محيط به. ونصل خطي ز ط ز ل فَيَحْدُث مخروط ط ك ل ح ز. ونضرب ا ز في قوس ط ك ل، فيخرج سطح مخروط ا ب جـ د ز، ونضربه في نصف جملة أضلاع المسدس، فيخرج سطح مخروط ا م جـ ن ز. فنسبة قوس ط ك ل إلى نصف جملة أضلاع المسدس كنسبة سطح مخروط ا ب جـ د ز إلى سطح مخروط ا م جـ ن ز. وقوس ط ك ل أعظم من نصف جملة أضلاع المسدس، فسطح مخروط ا ب جـ د ز أعظم من سطح مخروط ا م جـ ن ز،/ ولكنه أصغر منه، وهذا خلف. ٥٧ - ظ



وإن كان ضرب ا ز في أقل من قوس ا ب جـ سطحَ مخروط ا ب جـ د ز، فضربه في قوس ا ب جـ سطحُ مخروط هو أعظم من سطح مخروط ا ب جـ د ز، فليكن سطح مخروط

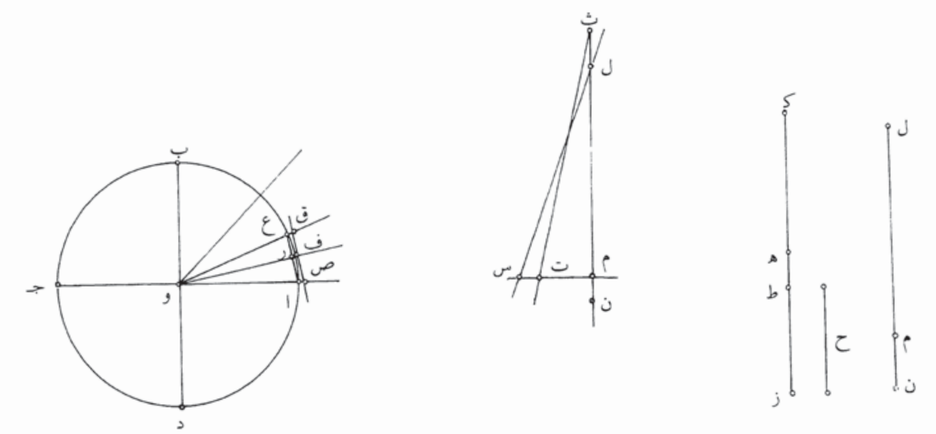
6 خطوطًا: خطوطه – 10 ا م جـ ن ز: كرر بعدها الجملة السابقة «ونضربه ... المسدس»، ثم ضرب عليها بالقلم. ليس هذا الشكل في المخطوطة.

ط ك ل ح ز. فيكون من ضرب ا ز في قوس ا ب جـ سطح مخروط ط ك ل ح ز، ومن ضربه في نصف جملة أضلاع المسدس سطح مخروط ا م جـ ن ز. فنسبة قوس ا ب جـ إلى نصف جملة أضلاع المسدس كنسبة سطح مخروط ط ك ل ح ز إلى سطح مخروط ا م جـ ن ز. وقوس ا ب جـ أصغر من نصف جماعة أضلاع الشكل المسدس، فسطح مخروط ط ك ل ح ز أصغر من سطح مخروط ا م جـ ن ز. ولكنه أعظم منه، وهذا خلف لا يمكن.

فليس ما يجتمع من ضرب ا ز في قوس أعظم من قوس ا ب جـ، ولا في قوس أصغر منها، سطح مخروط ا ب جـ د ز. فإذن ضربه في قوس ا ب جـ سطح مخروط ا ب جـ د ز.

ثم نخرج عمود هـ ز ونضربه في ثلث سطح قاعدة ا ب جـ د، فيجتمع جسم مخروط ا ب جـ د ز، لأن ضرب عمود / هـ ز في سطح قاعدة ا ب جـ د هو جسم الأسطوانة القائمة. ٥٨ - و
ومخروط الأسطوانة ثلثها كما بيّن أوقليدس في شكل ط من مقالة يب من كتاب الأصول. وأيضـًا، عمود هـ ز في ثلث سطح الشكل المسدس هو ⟨جسم⟩ مخروط ا م جـ ن ز، لأنه ثلث ⟨جسم⟩ الأسطوانة التي قاعدتها سطح الشكل المسدس وارتفاعها عمود هـ ز، كما ذكر في هذا الشكل من كتاب الأصول.

⟨**يد**⟩ دائرة ا ب جـ د وقدرا هـ ز ح مفروضان، وهـ ز أعظم من ح؛ نريد أن نعمل في الدائرة وعليها شكلين كثيري الزوايا متشابهين تكون نسبة المعمول منها على الدائرة إلى / المعمول ٥٨ - ظ
فيها أقل من نسبة هـ ز إلى ح.



4 أصغر (الثانية): أعظم – 5 ا م جـ ن ز: ا م ن جـ ز – 9 هـ ز: هـ ن.

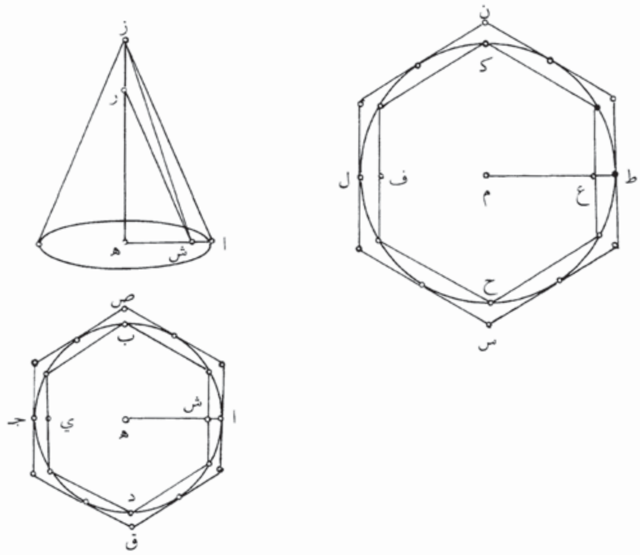
فنفرض خطين مستقيمين مختلفين تكون نسبة الأعظم منها إلى الأصغر أقل من نسبة هـ ز إلى ح. ووجود ذلك: أن نأخذ ز ط مثل ح، ونضعف هـ ط حتى تزيد أمثاله على ح، وليكن هـ ک. ونفرض ل م، كيف اتفق، ونقسمه بعدة ما في هـ ک من أمثال هـ ط؛ وليكن م ن مثل أحد أقسام ل م؛ فيكون نسبة م ن إلى ل م كنسبة هـ ط إلى هـ ک. وهـ ک أعظم من ح، أعني من ز ط؛ فنسبة هـ ط إلى هـ ک أقل من نسبة هـ ط إلى ز ط. ونسبة هـ ط إلى هـ ک كنسبة م ن إلى ل م؛ فنسبة م ن إلى ل م أقل من نسبة هـ ط إلى ز ط. وفي التركيب نسبة ل ن إلى ل م أقل من نسبة هـ ز إلى ح. وإن كان قدرا هـ ز و ح سطحين أو جسمين، فقد يمكن أن نستخرج خطي ل ن ل م حتى تكون نسبة هـ ز إلى ح أقل من نسبة ل ن إلى ل م، لأن العمل بالأضعاف وبالقسمة مفرد بما في جنس جنس. وبعد وجود ل ن ل م نضعهما مفردين على هذا الوضع، ونخرج خط م س على زاوية قائمة من خط ل م إخراجًا إذا وصلنا خط / ل س كان مثل ل ن، وذلك ٥٩ – و ممكن لأن ل ن أعظم من ل م. ونخرج في الدائرة قطري ا جـ ب د يتقاطعان على زوايا قائمة، ونقسم زاوية ا و ب بنصفين ونصفها بنصفين، ولا نزال نفعل ذلك حتى يبقى زاوية أصغر من ضعف زاوية م ل س، وهي زاوية ا و ع. ونصل خط ا ع، فيكون أحد أضلاع الشكل المعمول في الدائرة، وننصف زاوية ا و ع بخط و ف، ونجيز على ف خط ص ق يماس الدائرة، ونخرج و ا و ع إلى نقطتي ص ق؛ فيكون ص ق أحد أضلاع الشكل المعمول على الدائرة الشبيه بالمعمول فيها. فزاوية ا و ع، وهي ضعف زاوية ا و ر، أقل من ضعف زاوية م ل س؛ فزاوية ا و ر أقل من زاوية م ل س. وزاوية م قائمة مثل زاوية ر، فزاوية س أصغر من زاوية ا. وإذا أخرج من خط م س خطٌّ مستقيم على مثل زاوية ا – يساوي ل س ويلاقي ل م – لاقاه فوق نقطة ل؛ فليكن مثل ت ث. فتكون نسبته إلى ث م أصغر من نسبة ل س إلى ل م، ونسبة ت ث إلى ث م كنسبة ا و، أعني ف و إلى ر و، فنسبة ف و إلى ر و أصغر من نسبة ل س إلى ل م. ونسبة ف و إلى ر و كنسبة ص و إلى ا و وكنسبة ص ق إلى ا ع؛ فنسبة ص ق إلى ا ع / أقل من نسبة هـ ز إلى ح ٥٩ – ظ بكثير.

ونتمم الشكلين بسائر الأضلاع، وتبيّن من ذلك أنّا إذا أردنا أن يكون نسبة الشكل إلى الشكل أقل من نسبة ل ن إلى ل م، استخرجنا خطًا يتوسطها في النسبة، ثم نعمل بخط ل ن وبه في استخراج ضلعي الشكل ما عملنا بخطي ل ن ل م، فيصير نسبة الضلع إلى الضلع أقل

I منها: منها – 5 هـ ک (الثانية): كتب بعدها «أقل من نسبة هـ ط إلى ز ط»، ثم ضرب عليها بالقلم – 20 ا و: ا ر.

من نسبة ل ن إلى الخط المتوسط. ولكن نسبة الضلع إلى الضلع، مثناة بالتكرير، أقل من نسبة ل ن إلى الخط المتوسط مثناة بالتكرير، ونسبة الضلع إلى الضلع، مثناة بالتكرير، كنسبة الشكل إلى الشكل، كما بيّن في يط من قول و من كتاب الأصول، ونسبة ل ن إلى الخط المتوسط، مثناة بالتكرير، كنسبة ل ن إلى ل م، فنسبة الشكل إلى الشكل أقل من نسبة ل ن إلى ل م./

〈يه〉 شكل ا ب جـ د ز مخروط أسطوانة قائمة، ونصف قطر دائرة ط ك ل ح، وهو ط م، ٦٠ - و وسطٌ في النسبة بين ضلع المخروط، وهو ا ز، وبين نصف قطر قاعدته، وهو ا هـ.



أقول: إن دائرة ط ك ل ح، أعني سطحها، مثل سطح المخروط سوى قاعدته.

فإن لم يكن كذلك، فليكن أصغر منه؛ فيكون سطح المخروط ودائرة ط ك ل ح قدرين مختلفين، وأعظمها بسيط المخروط. فنعمل في الدائرة وعليها شكلين كثيري الزوايا متساويي الأضلاع متشابهين تكون نسبة المعمول عليها إلى المعمول فيها أقل من نسبة سطح المخروط إلى

3 في: مكررة – 5 ا ب جـ د ز مخروط: ا ب جـ د ومخروط.

دائرة ط ك ل ح، وذلك بما قدمناه سهل، وليكونا مسدسي ط ن ل س ع ك ف ح. فتكون نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ف ك ح أقل من نسبة سطح المخروط إلى الدائرة.

ولتعلم أنّا إذا نسبنا شكلاً إلى شكل من دائرة أو من أضلاع، فإنما يعني ذلك سطحي الشكلين.

ونعمل على دائرة ا ب جـ د مسدس ا ص جـ ق، فتكون نسبته إلى مسدس ط ن ل س كنسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م، كما بيّن في قول يب من كتاب الأصول. ونسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م كنسبة ا هـ إلى ا ز، ونسبة ا هـ إلى ا ز كنسبة مسدس ا ص جـ ق إلى سطح مخروط / ا ص جـ ق ز كما بينّا في شكل يا من هذه الأشكال. فنسبة مسدس ا ص جـ ق إلى مسدس ٦٠ - ظ ط ن ل س كنسبة مسدس ا ص جـ ق إلى سطح مخروط ا ص جـ ق ز. فسطح المخروط مثل مسدس ط ن ل س. ولكن نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة سطح مخروط ا ب جـ د ز إلى دائرة ط ك ل ح. وإذا بدلنا تكون نسبة سطح مخروط ا ص جـ ق ز إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة سطح مخروط ا ب جـ د ز إلى دائرة ط ك ل ح. وإذا بدلنا تكون نسبة سطح مخروط ا ص جـ ق ز إلى سطح مخروط ا ب جـ د ز أقل من نسبة مسدس ع ك ف ح إلى دائرة ط ك ل ح، وهذا خلف، لأن سطح مخروط ا ص جـ ق ز أعظم من سطح مخروط ا ب جـ د ز، ومسدس ع ك ف ح أصغر من دائرة ط ك ل ح. فليست دائرة ط ك ل ح بأصغر من سطح مخروط ا ب جـ د ز.

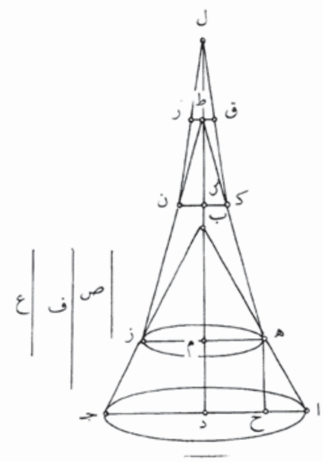
وأقول: إنها ليست بأعظم منه.

وإن أمكن ذلك، فليكن نسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح أقل من نسبة دائرة ط ك ل ح إلى سطح مخروط ا ب جـ د ز. ونعمل في دائرة ا ب جـ د مسدس ش ب ي د يشبه مسدس ع ك ف ح، [ونصل ر ح ر ص]، فيكون نسبة مسدس ش ب ي د إلى مسدس ع ك ف ح كنسبة مربع ش هـ إلى مربع ع م./ ونسبة مربع ش هـ إلى مربع ع م كنسبة مربع ا هـ ٦١ - و إلى مربع ط م ونسبة مربع ا هـ إلى مربع ط م كنسبة ا هـ إلى ا ز. ونسبة ا هـ إلى ا ز أعظم من نسبة ش هـ إلى ش ز، لأنّا نخرج ش ر يوازي ا ز، فيكون نسبة ش هـ إلى ش ز أصغر من نسبة ش هـ إلى ش ر. ولكن نسبة ش هـ إلى ش ر كنسبة ا هـ إلى ا ز، فنسبة ش هـ إلى ش ز أصغر

3 شكلاً: شكل – 14 نسبة: أثبتها فوق السطر – 17 منه: كتب بعدها «فأقول» ثم ضرب عليها بالقلم – 19 ا ب جـ د: ا ب جـ د ز – 21 ش هـ (الأولى): ع م س د – 24 ش هـ (الأولى): ش د.

من نسبة اه إلى از. وفي العكس نسبة اه إلى از أعظم من نسبة ش ه إلى ش ز. ونسبة ش ه إلى ش ز كنسبة مسدس ش ب ي د إلى سطح مخروط ش ب ي د ز؛ فنسبة اه إلى از أعظم من نسبة مسدس ش ب ي د إلى سطح مخروط ش ب ي د ز، فنسبة مسدس ش ب ي د إلى سطح مخروط ش ب ي د ز ⟨أصغر من نسبة مسدس ش ب ي د إلى مسدس ع ك ف ح⟩ فسطح مخروط ش ب ي د ز أعظم من مسدس ع ك ف ح. ونسبة مسدس ط ن ل س إلى مسدس ع ك ف ح، كما فرضنا، أقل من نسبة دائرة ط ك ل ح إلى مسطح مخروط ا ب جـ د ز. فنسبة مسدس ط ن ل س إلى سطح مخروط ش ب ي د ز أقل كثيرًا من نسبة دائرة ط ك ل ح إلى سطح مخروط ا ب جـ د ز؛ وهذا خلف، لأن مسدس ط ن ل س أعظم من دائرة ط ك ل ح، وسطح مخروط ش ب ي د ز أقل من سطح مخروط ا ب جـ د ز. وقد تبيّن أنها ليست بأصغر منه، فهي مثله./

ظ – ٦١ ⟨يو⟩ مثلث ا ب جـ سطح قاطع لمخروط أسطوانة قائمة على سهمه، وهو ب د، ومثلثا هـ ط ز ك ل ن سطحان قاطعان لمخروطي أسطوانتين قائمتين على سهميها، وهما ط م ل س، والسهام



الثلاثة متصلة على استقامة، وأقطار قواعد المخروطات، وهي خطوط ا جـ هـ ز ك ن، متوازية. ومن قِبَل توازيها تصير قاعدتا المخروطين الأعليين دائرتين مثل قاعدة المخروط الأسفل، لأنه إذا أثبت خط د ل وأديرت مثلثات ا ب جـ هـ ط ز ك ل ن حتى تعود إلى مواضعها الأول لزم خط

7 ش ب ي د ز: ا ش ب ي د ز – 15 ك ل ن: ك ل ر / الأول: الأفصح «الأولى»، فجمع التكسير «مواضع» يُعامل معاملة المفرد المؤنث.

ا جـ في دورانه محيط القاعدة، ورُسم لذلك مركزا دائرتين على سطحي المخروطين الأسفل والأوسط؛ ويُخرج أيضًا خط ق ر يوازي ك ن، فتكون قاعدة / المخروط الذي عليه مثلث ٦٢ – و ق ل ر.

وأقول: إن الخط الذي يتوسط في النسبة بين ا هـ وبين مجموع ا د هـ م نصفُ قطر الدائرة المساوية لسطح القطعة التي عليها ا هـ ز جـ من المخروط الأسفل.

برهان ذلك: أنّا نخرج هـ ح يوازي ب د، ونفرض خط ع يقوى على ضرب ا هـ في مجموع ا د هـ م، وخط ف يقوى على ضرب ب ا في ا د، وخط ص يقوى على ضرب ب هـ في هـ م، فيكون خط ف نصف قطر الدائرة المساوية لسطح المخروط الأسفل، وخط ص نصفَ قطر الدائرة المساوية لسطح المخروط الذي عليه مثلث هـ ب ز، كما بُيّن فيما تقدم. وضرب ب ا في ا د مثل ضرب ب هـ في ا د وهـ ا في ا د. ولكن ضرب ب هـ في ا د مثل ضربه في هـ م وفي ا ح، وضربه في ا ح مثل ضرب هـ ا في هـ م، لأن مثلثي ب هـ م ا هـ ح متشابهان. فضرب ب ا في ا د مثل ضرب ب هـ في هـ م، وهـ ا في هـ م وفي ا د، وينقص منه ما يجتمع من ضرب ب هـ في هـ م الذي يقوى عليه خط ص، فيبقى ما يجتمع من ضرب هـ ا في هـ م وفي ا د الذي يقوى عليه خط ع.

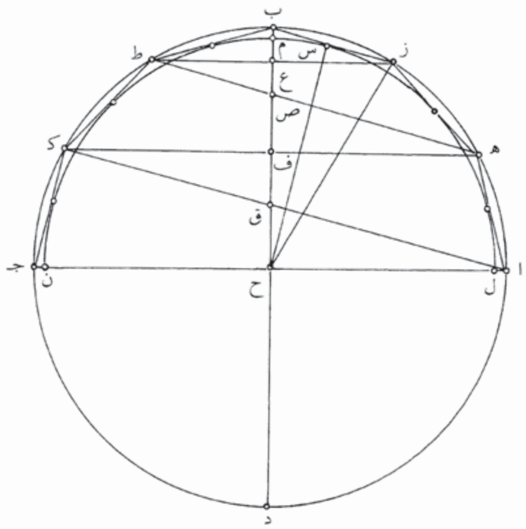
وبمثل ذلك نبيّن أن الخط الذي يقوى على ضرب ك هـ في مجموع ك س هـ م نصف قطر الدائرة المساوية لسطح قطعة المخروط التي عليها / منحرف هـ ك ن ز، وأن الخط الذي يقوى على ٦٢ – ظ ضرب ق ك في مجموع ق ط ك س نصف قطر الدائرة المساوية لسطح القطعة التي عليها ك ق ر ن.

وتبيّن من ذلك أن كل مجسم مركب من قِطع مخروطات الأساطين القائمة تتوازى قواعدها وتتصل كل قطعتين منها على قاعدة مشتركة بينها، والخطوط المستقيمة التي تمر في سطوحها وتصل بين أطراف قواعدها مثل ا هـ هـ ك ك ق متساوية، فإن ضرب أحدها في نصف قطر القاعدة السفلى وفي قطر كل قاعدة مشتركة ⟨و⟩في نصف قطر القاعدة العليا هو مربع نصف قطر الدائرة المساوية لسطح المجسم دون قاعدته. وإن كان رأس المجسم مخروطًا، كما في هذا المثال، فإن ضرب أحدها في نصف قطر القاعدة السفلى وفي أقطار سائر القواعد هو مربع نصف قطر الدائرة

1 مركزا: مركز / دائرتين: دائرتي – 9 كما: وكما – 10 ا د (الأولى): ا هـ – 11 ا د: ا هـ – 15 ك س: ب س – 16 التي: الذي.

المساوية لسطح المجسم دون قاعدته. والحكم في مخروط واحد، إذا قطع بمثل هذه القِطَع وفي المجسم المركب منها كما في المثال، واحد./

⟨يز⟩ دائرة ا ب جـ د أعظم دائرة تقع على كرة. وأعظم دائرة تقع على الكرة هي التي تقطعها ٦٣ - و
بنصفين. وقد تقاطع قطرا ا جـ ب د على زوايا قائمة، وفيه شكل كثير الزوايا متساوي الأضلاع



يعدّ أضلاعه عددٌ زوج، وليكن نصف شكل ا ه ز ب ط ك جـ. وسواء يعدّ أضلاعَه عددٌ زوج أو يعدها عددٌ فرد، إلّا أن العمل بما يعدّ أضلاعَه عددٌ زوج أسهل. ثم إذا ظهر فيه ما يرام من البرهان، أمكن أن يجري في غيره من الأشكال الكثيرة الأضلاع التي يعدّها عددٌ فرد كالمخمس والمسبع وما عداها إلى ما لا ينتهي. ونصل خطي ه ك ز ط فيتوازيان وتوازي ا جـ. ونرسم دائرة ل م ن يحيط بها الشكل، ونتوهم نقطتي ب د قطبي الكرة، فيكون محورها قطر ب د. فإذا دارت الكرة حتى تعود إلى موضعها الأول، رسم ضلعا ا ه ه ز قطعتي مخروطي أسطوانتين قائمتين قطرا قاعدتيها ا جـ ه ك، ورسم ضلع ز ب مخروط أسطوانة قائمة قطر قاعدته ز ط. والقواعد متوازية لأن أقطارها متوازية.

5 وليكن ... زوج: أثبتها في الهامش – 8 وتوازي: وهذا جائز – 9 د: جـ.

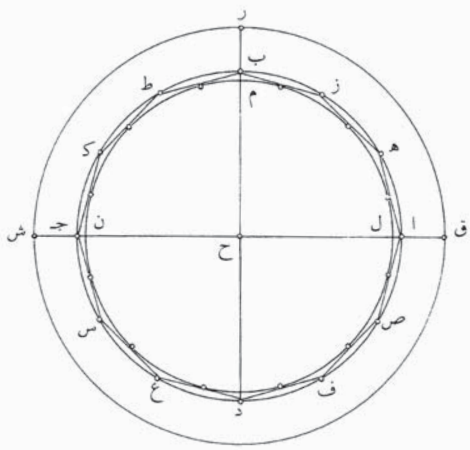
فأقول: إن سطح الجسم المركّب من قطع مخروطات الأساطين دون قاعدته أقلُّ من ضعف سطح 〈الدائرة العظمى التي تحيط〉 بنصف الكرة / التي تحيط بالجسم وأعظمُ من ضعف سطح ظ – ٦٣ 〈الدائرة العظمى التي تحيط〉 بنصف الكرة الذي يحدث من دوران نصف دائرة ل م ن ويحيط به الجسم.

برهان ذلك: أن نضع نقطة س على تماس ضلع ز ب ودائرة ل م ن، وهي أيضًا تنصف ضلع ز ب، ونصل خطوط س ح ط ه ك ا فتتوازى ط ه ك ا ويوازيان ز ب، وتتشابه مثلثات ز ب ع ط ص ع ه ف ص ك ق ف ا ق ح، ويكون نسبة ز ع إلى ع ب كنسبة ط ع إلى ع ص وكنسبة ه ف إلى ف ص وكنسبة ك ف إلى ف ق وكنسبة ا ح إلى ق ح. ونسبة واحد من المقدمات إلى واحد من التوالي كنسبة الجميع إلى الجميع؛ فنسبة ز ع إلى ع ب كنسبة مجموع ز ط ه ك ا ح إلى ب ح. ونسبة ز ع إلى ع ب كنسبة س ح إلى س ب لتشابه المثلثين، فنسبة س ح إلى س ب كنسبة مجموع ز ط ه ك ا ح إلى ب ح، فضرب س ب في مجموع ز ط ه ك ا ح مثل ضرب س ح في ب ح. وضرب س ح في ب ح أقل من ضرب ب ح في نفسه وأعظم من ضرب س ح في نفسه. ولكن ضرب ز ب، وهو ضعف س ب، في مجموع ز ط ه ك ا ح – كما قدمناه – مربع نصف قطر الدائرة المساوية / لسطح الجسم المركب. ونسبة مربع نصف قطر كل و – ٦٤ دائرة إلى مربع نصف قطر دائرة أخرى كنسبة الدائرة إلى الدائرة. فسطح الجسم أقل من مثلي دائرة ا ب ج د، وهي أعظم دائرة تقع على الكرة التي تحيط بالجسم، وأعظم من مثْليْ دائرة ل م ن، التي هي أعظم دائرة تقع على الكرة التي يُحيط بها الجسم.

〈**يح**〉 ونعيد رسم الشكل إلا خطوط ز ط ه ط ه ك ا ك س ح، ونتمم أضلاع الشكل الكثير الزوايا.

ونقول: إن أربعة أمثال دائرة ا ب ج د، أعني سطح الدائرة، مثل سطح الكرة التي هذه الدائرة أعظم دائرة تقع عليها.

2 بنصف: نصف – 3 بنصف: نصف – 6 ك ا (الأولى): ك ل – 16 مثلي: مثلثي – 21 عليها: عليه.



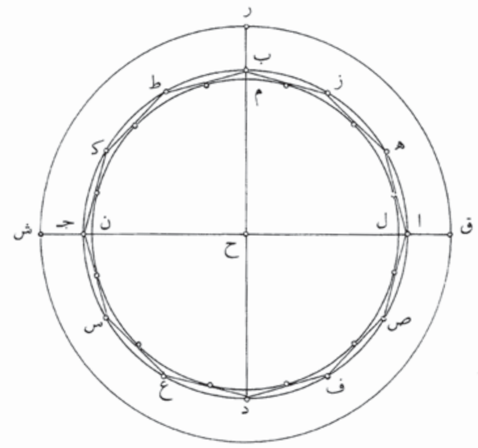
فإن لم يكن كذلك، فلتكن أصغر منه، ولتساو سطح كرة أصغر من الكرة التي عليها دائرة ا ب جـ د، وهي الكرة التي عليها دائرة / ل م ن، ودائرة ل م ن أعظم دائرة تقع على هذه الكرة. ٦٤ – ظ فسطح هذه الكرة أصغر من سطح المجسم المركب من قطع مخروطات شبيهة بالمجسم الأول مماسة للكرة التي عليها دائرة ل م ن، لأنه محيط بها. وقد تبيّن أن سطح المجسم أصغر من أربعة أضعاف دائرة ا ب جـ د، فسطح الكرة التي عليها دائرة ل م ن أصغر من أربعة أمثال دائرة ا ب جـ د بكثير. وقد فرض مثله، وهذا خلف.

ثم لتكن أربعة أمثال دائرة ا ب جـ د أعظم من سطح الكرة التي عليها دائرة ا ب جـ د، ولتساو سطح الكرة التي عليها دائرة ق ر ش. وهذه الدائرة أعظم دائرة تقع على هذه الكرة. ونتوهم الكرة تحيط بمجسم مركب من قطع مخروطات الأساطين، فيكون سطحه أعظم من أربعة أمثال دائرة ا ب جـ د. ولكن سطح الكرة التي عليها دائرة ق ر ش أعظم من سطح هذا المجسم، لأنها محيطة به. فإذن سطح هذه الكرة أعظم من أربعة / أمثال دائرة ا ب جـ د. وقد فرض مثله، ٦٥ – و وهذا خلف.

1 ولتساو: ولتساوى – 4 ل م ن: ا ب جـ د – 5 أمثال: أثبت في الهامش «أضعاف» / ا ب جـ د: كتب بعدها «فسطح»، ثم ضرب عليها بالقلم – 11 سطح: كتب بعدها «كل كرة أربعة أضعاف أعظم دائرة تقع عليها»، ثم ضرب عليها بالقلم.

فإذن سطح كل كرة أربعة أضعاف أعظم دائرة تقع عليها. ولأن الدائرة هي من ضرب قطرها في جميع محيطها، يكون سطح الكرة من ضرب قطر أعظم دائرة تقع عليها في محيطها.

〈يط〉 ونعيد الشكل كما هو.



ونقول: إن ضرب ب ح، وهو نصف قطر دائرة ا ب ج د، في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د جسمُ الكرة.

〈برهان ذلك〉: وإلا فليكن جسم كرة أصغر منها وهي الكرة التي عليها دائرة ل م ن. ونتوهم دائرة تمر بنقطتي ب د وتقاطع دائرة ا ب ج د على زوايا قائمات، ودائرةَ تجوز عليها على زوايا قائمة وتمر بنقطتي ا ج حتى تقسمها الأرباع، / ودائرتين فيما بين كل ربعين من الدائرة الثانية تمران ٦٥ – ظ بنقطتي ب د، فنقسم كل ربع من أرباع الدائرة بثلاثة أثلاث. ونتوهم كل دائرة من الدوائر الخمس تحيط بشكل كثير الزوايا مثل الشكل الذي في دائرة ا ب ج د، ونصل طرفي كل ضلعين نظيرين من كل شكلين فيما بين دائرتين متواليتين، فيحدث مجسم ذو قواعد مسطوحة. أما

11 مسطوحة: اسم مفعول من سطح، والاشتقاق صحيح لكنه غير مألوف.

قواعده التي تلي كل واحد من قطبي ب د فمثلثات. وأما ما سواها فمنحرفات، وهي قواعد لمخروطات ينقسم إليها المجسم وتجتمع رؤوسها على مركز الكرة، وهو نقطة ح. والكرة التي عليها دائرة ل م ن تماس كل واحدة من القواعد، ونصف قطرها يكون عمودًا على موضع التماس؛ فضربه في ثلث جملةِ قواعدها جملةُ المخروطات، التي هي جملة المجسم، وجملة قواعدها سطح المجسم. فضرب م ح، وهو نصف قطر الكرة التي عليها دائرة ل م ن، في ثلث سطح المجسم كمية المجسم. ولكن ضربه في ثلث سطح المجسم أعظم من ضربه في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة ل م ن، لأنه محيط بها. فضرب ب ح في ثلث سطح الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د أعظم من جسم الكرة التي عليها دائرة ل م ن / بكثير. وقد فرض مثلها، هذا خلف. ٦٦ – و

ثم لنفرض ضرب ب ح في ثلث سطح كرة أعظم من الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د جسمَ الكرة، ولتكن الكرة التي دائرة ق ر ش أعظم دائرة تقع عليها. ونتوهمها تحيط بمجسم ذي قواعد شبيه بالمجسم الأول مماس للكرة التي عليها دائرة ا ب ج د؛ فيكون ضرب ب ح في ثلث سطح المجسم أعظم من الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د. وليكن ضرب ب ح – كما فُرِض – في ثلث سطح هذه الكرة هو جسم الكرة التي عليها دائرة ق ر ش. وهذه الكرة أعظم من المجسم لأنها محيطة به، فثلث سطحها أعظم من ثلث سطحه، فضرب ب ح في ثلث سطحها أعظم من جسم الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د بكثير. وقد فُرِض مثلها، وهذا خلف.

فليس ضرب نصف قطر الكرة التي عليها دائرة ا ب ج د في ثلث سطح كرة أصغر ولا أعظم منها بجسمها؛ فإذن ضربه في ثلث سطحها هو جسمها.

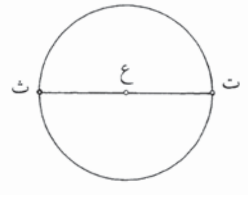
وقد تبيّن أن سطح أعظم دائرة تقع على الكرة ربعُ سطح الكرة، وسطح الدائرة مع ثلثه ثلث سطح الكرة، فضرب نصف قطر الكرة في مثل وثلث سطح أعظم دائرة تقع / عليها هو جسم ٦٦ – ظ الكرة. فضرب نصف قطر الكرة في مثلي أعظم دائرة تقع عليها مثل ونصف الكرة.

2 المجسم: الجسم – 3 عمودًا: عمود – 4 قواعدها: قاعدة / وجملة: أثبتها فوق السطر – 9 كرة: الكرة / أعظم من الكرة: أثبتها في الهامش – 10 ولتكن: وللكن.

ولكن الأسطوانة التي تحيط بالكرة ضربُ سهمها – وهو قطر الكرة – في قاعدتها – وهي أعظم دائرة تقع على الكرة – هو ⟨جسم⟩ الأسطوانة؛ وكذلك ضرب نصف قطر الكرة في مثلي أعظم دائرة تقع عليها. فالأسطوانة التي تحيط بالكرة مثل ونصف الكرة.

ولأن مخروط الأسطوانة ثلثها، يكون المخروط الذي قاعدته مثل أعظم دائرة تقع على الكرة وسهمُه مثل نصف قطر الكرة ربعَ الكرة، فالكرة أربعة أمثال المخروط. ولكن نسبة مخروط أسطوانة إلى مخروط أسطوانة أخرى كنسبة القاعدة إلى القاعدة إذا كانا في ارتفاع واحد، كما تبيّن في شكل يا من قول يب من كتاب الأصول. فالمخروط الذي قاعدته مثل أربعة أمثال أعظم دائرة تقع على الكرة، وسهمه مثل نصف قطر الكرة، أربعة أمثال المخروط الذي قاعدته مثل أعظم دائرة تقع على الكرة وسهمه مثل نصف قطر الكرة. فهذا المخروط مثل الكرة./

⟨ك⟩ ثم لنرسم دائرة ت ث على مركز ع، ولتكن أعظم دائرة تقع على الكرة، ونخرج قطر ت ث. وليساو سطح هذه الكرة سطح المجسم المحيط بالكرة التي عليها دائرة ل م ن، فتكون الكرة أعظم من المجسم، لأن م ح، وهو نصف قطر الكرة التي عليها دائرة ل م ن، إن كان مثل ت ع، كانت الكرة مثل الكرة. ولكن سطح الكرة، التي عليها دائرة ل م ن، أصغر من سطح المجسم، وسطح المجسم مثل سطح الكرة التي عليها دائرة ت ث، فسطح الكرة التي عليها دائرة ل م ن أصغر من سطح الكرة التي عليها دائرة ت ث، فالكرة التي عليها دائرة ل م ن أصغر من الكرة الأخرى؛ ونصف قطرها وهو م ح، أقصر من ت ع. ولكن ضرب م ح في ثلث سطح ⟨المجسم هو جسم المجسم وضرب ت ع في ثلث سطح⟩ الكرة جسم الكرة التي عليها دائرة ت ث، أعظم من المجسم. فإذن الكرة أعظم المجسمات المتساوية الإحاطة. ٦٧-و



1 وهي: وهو – 5 قطر: أثبتها في الهامش مع بيان موضعها / فالكرة: أثبتها فوق السطر – 9 فهذا: فهذ – 16 ونصف: فنصف.

٦٨ – و

٤-٣-١ مقالة

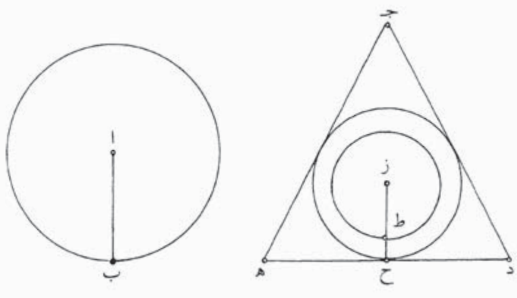
في أن سطح كل دائرة أوسع من كل سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها

نريد أن نبين أن سطح كل دائرة أوسع من كل سطح مستقيم الأضلاع متساويها متساوي الزوايا مساوية إحاطته لإحاطتها.

فلتكن دائرة مركزها آ، ونصف قطرها آ ب، وإحاطتها مساوية لإحاطة شكل جـ د هـ المتساوي الأضلاع والزوايا.

فأقول: إن سطح دائرة آ ب أوسع من سطح جـ د هـ.

برهان ذلك: أنّا ندير في سطح جـ د هـ دائرة يحيط بها، وليكن مركزها ز، ونخرج نصف قطرها إلى ح وهو موضع التماس. فإن كان ز ح مثل آ ب، فدائرة آ ب مساوية لدائرة ز ح، ومسطح ز ح في نصف محيط دائرة ز ح هو سطح دائرة ز ح. ومسطح ز ح في نصف إحاطة شكل جـ د هـ هو مساحة سطح جـ د هـ، فدائرة ز ح إذن مساوية لسطح جـ د هـ، الأصغر للأعظم، هذا خلف.



10 زَ: دَ.

وليس آب أيضًا ناقصًا من زح. لأنه إن كان كذلك، فصلنا من زح مثل آب، وليكن زط، فدائرة زط مساوية لدائرة آب، فمحيط دائرة زح أطول من محيط دائرة زط، ومحيط شكل جـ د هـ / أعظم من محيط دائرة زح، فمحيط شكل جـ د هـ أعظم كثيرًا من محيط دائرة ٦٨ - ظ آب، وقد كان فرض مساويًا له هذا خلف. فليس زح بمساوٍ آب ولا أطول منه، فهو أقصر منه. وزح في نصف محيط شكل جـ د هـ هو مساحة سطح جـ د هـ، وآب الأطول في نصف محيط دائرة آب، المساوي لمحيط شكل جـ د هـ، أعظم من زح الأقصر في نصف محيط شكل جـ د هـ المساوي لمحيط دائرة آب، فدائرة آب أعظم من شكل جـ د هـ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

آخر المقالة ولله الحمد.

3 زح: زط – 4 بمساوٍ: بمساوي – 6 آب: كتب بعدها «الأقصر»، ثم ضرب عليها بالقلم.

الفصل الخامس

القوهي، نقد ثابت بن قرّة:

كتاب المجسّم المكافئ الدوراني

٥ـ١ مقدّمة

٥ـ١ـ١ أبو سهل القوهي: الرياضي والحرفيّ

أبو سهل (ويجن) بن رستم القوهي (أو الكوهي) هو أحد أبرز علماء الفلك والرياضيّات في مدرسة بغداد، وفي البلاط البويهي بشكلٍ خاص. يمكننا قياس أهميّة أعماله من خلال الإسنادات التي قام بها معاصروه إليها ، مثل السِجزي وابن سهل، والتي قام بها خلفاؤه مثل ابن الهيثم والبيروني. ولقد عُرِف القوهي في عصره، وفقاً للأقوال التي نقلها الأديب أبو حيّان التوحيدي، ، كعالمٍ بارع لم يهتمّ بالفقه ولا بمسائل ما بعد الطبيعة[١]. لقد حسَّن هذا الرياضيّ إلى أبعد حدّ السِّمات المعرفيّة التي تـُميّز هذا التقليد الرياضيّ منذ تأسيسه قبل القوهي بقرن من الزمن على أيدي بني موسى، وطوال تحوُّلاته المتتابعة بدءاً من ثابت بن قرّة وحفيده. فقد اهتم القوهي بتطبيق الرياضيّات على علم الفلك وعلى ميكانيكا السكون، وفي دراسة الآلات الرياضيّة مثل البركار التام. ومن ناحية أخرى، أسهم القوهي بشكل فعّال في توسيع البحث في التحويلات الهندسيّة؛ ويكفي في هذا المجال التذكيرُ بمؤلَّفه "كتاب صنعة الأسطرلاب بالبرهان"[٢]. ركَّب القوهي بين تقليدَي الهندسة الإغريقيّة – هندسة أرشميدس وهندسة أبلونيوس– لكي يتقدّم في حقل غير هلّينيستيّ في الحقيقة، وهو حقل التحويلات الهندسيّة. ولقد استفاد أيضاً من النتائج التي توصَّل إليها معاصروه، ومن ثمار التراكمِ المهمّ للأعمال السابقة المحقّقة منذ بني موسى وثابت بن قرّة.

لا تتحدّث المصادر التاريخيّة أو كُتُب السِّيَر عن هويّة القوهي أو عن هويّة أساتذته؛ إلاّ أنّ اسمه يدلّ على أنّه فارسيّ أو أنّه، على الأقل، ينحدر من عائلة أصلها فارسي. يذكّر معاصره

---

[١] في مؤلّفه "كتاب الإمتاع والمؤانسة"، تحقيق أحمد أمين وأحمد الزين (إعادة الطباعة: بولاق، بدون تاريخ)، ينوّه التوحيدي، بعد ذكره الفيلسوف يحيى بن عدي، بجماعة يوجد ضمنها القوهي، الصاغاني، الصوفي، السامرّي، وآخرون غيرهم، ليؤكّد أنَّ لا أحد من هؤلاء يلفظ كلمة واحدة فيما يخص الروح، الفكر أو اللـه، كما لو أنّ ذلك ممنوع عليهم أو مكروه، الجزء الأوّل، ص. ٣٨.

[٢] حقّق ر. راشد وحلّل نصٌّ هذا الكتاب (بما فيه شرح ابن سهل لهذا النصّ) ، ضمن:
Géométrie et dioptrique au Xᵉ siècle (Paris, 1993).

كاتبُ السِّيَر، النديم، أنّ القوهي ينحدر من طبرستان، وهي منطقة جبليّة تقع إلى الجنوب من بحر قزوين[٣]. إلى هذه المعلومة المقتضبة، لا يزيد باقي كتّاب السِّيَر شيئاً ذا أهميّة، باستثناء القفطي كما سنرى بعد قليل[٤]. أمّا الخبر المؤكَّد الوحيد، فقد قدَّمه البيروني، لاحقاً[٥]؛ فهو يذكر أنّ القوهي كان عام ٣٥٩هـ/٩٦٩م، برفقة أعلامٍ من عصره. فقد كان إلى جانب السِجزي، ونظيف بن يُمن، وغلام زُحَل (الملقّب بأبي القاسم عبيد الله بن الحسن) وذلك عند حضوره لعمليّات الرصد الفلكيّة التي أمر بها شخصيّاً، سيّد مقاطعة فارْس المدعوّ عضد الدولة، والتي قام بها الفلكيّ الشهير عبد الرحمن الصوفي، من يوم الأربعاء الواقع في ٢ صَفَر حتى يوم الجمعة الواقع في ٤ صَفَر عام ٩٦٩/٣٥٩.

كان القوهي إذن، في ذلك التاريخ، رياضيّاً معروفاً ومستشهَداً به. ولنضف حجّة إضافيّة على هذا، فنذكّر بأنّ المخطوطة ٢/٢٤٥٧ في المكتبة الوطنيّة في باريس، تشير إلى أنّ السِجزي نسخ، خلال العام المذكور نفسه، كتابه حول "مراكز الدوائر المتماسّة"[٦]، الذي سبق أن ألّفه القوهي قبل ذلك بوقت طويل. وفي حدود ذلك
التاريخ أيضاً كتب رسالته في "عمل المسبّع المتساوي الأضلاع"[٧].

ويذكر البيروني القوهي مرّة ثانية عندما يروي أمراً حدث بعد تسعة عشر عاماً، في بغداد، تحت حُكم شرف الدولة، نجل عضد الدولة. فقد كلّف شرف الدولة القوهي برصد حركة

---

[٣] انظر: النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدّد (طهران، ١٩٧١)، ص. ٣٤١-٣٤٢. حول سيرة القوهي ومراجعه، انظر أيضاً مقال ي. دولد-سامبلونيوس (*Y. Dold-Samplonius*)، في

Dictionary of Scientific Biography (1975), vol. XI, pp. 239-241;

انظر أيضاً: ك. بروكلمان (*C. Brockelman*)،

Geschichte der arabischen Litteratur, B. I (Leiden, 1937), pp. 339-340;

وانظر: ف. سيزكين (F. Sezgin)،

Geschichte des arabischen Schrifttums, B. V (Leiden, 1974), pp. 314-321, et B. VI (Leiden, 1978), pp. 218-219.

[٤] من بين المفهرسين القدماء، وضع البيهقي [١٠٧٠\٤٦٢ – ١١٠٥\٤٩٩] وصفاً زاهياً بالألوان للقوهي ["تاريخ حكماء الإسلام"، تحقيق م. كرد علي (دمشق، ١٩٤٦)، الصفحة ٨٨]. إذا ما صدّقناه في ذلك، فإنّ هذا الأخير يبدو كبهلوان؛ فهو يقول: " كان في ابتداء أمره ممن يلعب في الأسواق بالقوارير، فأدركته عناية أزلية، فبرز في علم الحيل والأثقال والأكر المتحركة و(كان) في تلك الصنائع عديم المثيل مشاراً إليه.". وكما هي الحال دائماً، اقتبس الشهرزوري هذا الوصف في كتابه، لينشره فيما بعد ["تاريخ الحكماء، نزهة الأرواح وروضة الأفراح"، تحقيق عبد الكريم أبو شويرب (طرابلس، ١٩٨٨)، ص. ٣١٣]. انظر التعليقات الإضافيّة.

[٥] البيروني، "كتاب تحديد نهايات الأماكن لتسطيح مسافات المساكن"، حقّقه ب. بولغاكوف (P.Bulgakov) وراجعه إمام إبراهيم أحمد،

Revue de l'Instiut des manuscripts arabes, 8, fasc. 1-2 (novembre (تشرين الثاني) 1962), pp. 99-100.

انظر الترجمة الإنكليزيّة لهذا الكتاب التي قام بها جميل علي،

The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities (Beyrouth (بيروت), 1967), p. 68-69.

[٦] "مراكز الدوائر المتماسّة"، الأوراق ١٩-٢١.

[٧] انظر ج. دولد-سامبلونيوس (*J. Dold-Samplonius*)،

"*Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks*", *Janus*, 50, 4 (1963), p. 227-249.

الكواكب السبعة وتنقلاتها داخل أبراجها. ولهذه الغاية، بنى القوهي مرصداً، وقام بصناعة آلة فلكيّة وقام بالرصد أمام شهود. وقد أكّدت هذا الخبر مصادرُ متنوّعة ولكنّها ليست كلّها مستقلّة. من هذه المصادر نكتفي بشهادة عالم الفلك البيروني، وكاتب السِّيَر القفطي، والمؤرّخ ابن تغري بَردي. يقول البيروني

" وأمر شرف الدولة أبا سهل الكوهي بتجديد الرصد. فعمل ببغداد بيتا، قراره قطعة كرة قطرها خمس وعشرون ذراعاً، ومركزها ثقبة على سماء البيت، يدخل منها شعاع الشمس ويرسم المدارات اليومية."[٨]

ارتكز القفطي على وثيقتين أساسيّتين في تاريخ العلوم لتأكيد شهادته: يتعلّق الأمر بمَحْضَرَيْن مُوثّقَيْن، مُخصَّصين لتدوين نتائج علميّة تقنيّة. حضَّر هذين المحضرَيْن قاضيان، ووقّعهما القاضيان وكذلك الشهود الحاضرون، وهم علماء الفلك: أبو إسحاق إبراهيم بن هلال الصابئ، أبو سعد بن بولس النصراني، القوهي نفسه، أبو الوفاء البوزجاني، أبو حامد الصاغاني، أبو الحسن السامَرِّي وأبو الحسن المغربي. بيد أنّ القوهي بنى هذا المرصد في حديقة القصر الملكي وقام بسلسلتين من الأرصاد خلال شهر صَفَر عام ٩٨٨/٣٧٨[٩]، وذلك بفضل آلته التي أثبتت دقّتها وكمالها بإجماع الحاضرين.

المصدر الثالث هو المؤرّخ ابن تغري بردي[١٠]، الذي يروي ما حصل في هذه السنة نفسها ٩٨٨/٣٧٨، قائلاً إنَّ شرف الدولة قد أمَرَ ، في سنة ثمان وسبعين وثلاثمائة، مثلما كان المأمون قد فعله في أيّامه، خلال شهر محرّم من هذه السنة نفسها برصد الكواكب السبعة في مسيرها وتنقّلها في بروجها. وعَوَّل على ابن رستم الكوهيّ في القيام بذلك، وكان حسن المعرفة بالهندسة وعلم الهيئة متقدِّماً بهما إلى الغاية المتناهية. فبنى بيتاً في دار المملكة في آخر البستان، وقام بالرصد لليلتين بقيتا من صَفَر.

---

[٨] البيروني، "تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق بولغاكوف (Bulgakov)، الصفحتان ١٠٠-١٠١. انظر ترجمة جميل علي،
The Determination of the Coordinates of Positions, p. 69.

[٩] القفطي، "تاريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبّرت (Julius Lippert) (لايبزغ (Leipzig)، ١٩٠٣)، ص. ٣٥١-٣٥٤. وكالعادة، ولكن هذه المرّة بشكلٍ مختصر، يقتبس ابن العبري بعض المعلومات من القفطي. انظر "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالحاني، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠)؛ وإعادة الطباعة عام ١٩٥٨، ص. ١٧٦. عن وصف القفطي لهذا المرصد الذي بناه القوهي، انظر أيدين سايِلي (*Aydin Sayili*)،
The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory, second edition (Ankara, 1988), pp. 112-117.

لِنُلاحظ أنّنا نجد هذا التاريخ نفسه: الثامن والعشرون من صَفَر ٩٨٨/٣٧٨ مذكوراً في مكان آخر. وذلك أنَّ البيروني يورد هذه الشهادة نفسها، مع الأرقام نفسها والأسماء نفسها، في مؤلّفه "القانون المسعودي"، مكتب المنشورات العثمانيّة الشرقيّة (حيدر أباد، ١٩٥٥)، المجلّد الثاني، المقالة السادسة، ص. ٦٤٢-٦٤٣.

[١٠] ابن تغري بردي، "النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة"، قدّمه وعلّق عليه محمّد حسين شمس الدين، المجلّد الرابع، (بيروت، ١٩٩٢)، الصفحة ١٥٦. من الواضح أنّ ابن تغري بردي يقتبس هنا، حرفيّاً، نصّ القفطي.

وحتى لو بدا هنا أنّ المؤرّخ ابن تغري بردي قد اقتبس عن القفطي، فإنَّ المعلومات التي قدَّمها القفطي وكذلك شهادة البيروني مأخوذة مباشرة عن مصادرها، إذ كان لدى المؤرّخ ابن تغري بردي رسالة من نظيف بن يُمن تعرض إحدى نتائج هذه الأرصاد[١١].

تشير كل الدلائل، إذا، إلى أنّ القوهي ، خلال هذه الفترة أي في ثمانينيّات القرن العاشر، كان في عِداد الرياضيّين الأكثر شهرة في بغداد وكان يتنقّل في هذا الوسط حيث كان يقابل العلماء المذكورين أعلاه، كما كان يقابل غيرهم مثل ابن سهل. ويُمكننا أن نقول، دون أن نتعرَّض للوقوع في الخطأ، إنّ القوهي كان يحتل الصفَّ الأوَّل منذ عقدين من الزمن على الأقل. لنلاحظ أنّه بدءاً من هذا التاريخ أخذ رفاقه القدامى يتوارون: توفِّيَ الصاغاني بعد سنة، عام ٩٨٩/٣٧٩، والصابئ بعد ست سنوات، عام ٩٩٤/٣٨٤ عن عمر يناهز السبعين عاماً. ولكن من كان القوهي نفسه؟

نحن لا نعرف شيئاً عن أخباره بعد سنة ٩٨٨/٣٧٨، بل نعرف أنّه كان كاتباً مشهوراً قبل عشرين عاماً على الأقل من هذا التاريخ. وتوجَد لدينا، بالإضافة إلى ذلك، معلومة لم ينتبه إليها أحد حتى الآن، تُظهره لنا ناشطاً من الناحية العلميّة في الخمسينيّات من القرن العاشر. فإذا كان الوضع كذلك حقّا، فإنّه يكون من جيل زملائه، مثل الصابئ، ويكون من نفس العمر؛ فتكون نهاية حياته العلمية أو وفاته قد حصلت مع نهاية القرن. ولقد نسب القفطي، وتبعَه بذلك ابن أبي أصيبعة، في مقالته المكرّسة لسنان بن ثابت بن قرّة –والد إبراهيم بن سنان وثابت بن سنان- "إصلاحَه لعبارة أبي سهل القوهي في جميع كتبه وكان أبو سهل سأله ذلك"[١٢]. لكن، ودائماً حسب القفطي وابن أبي أصيبعة، فإنّ سنان بن ثابت قد توفِّيَ سنة ٣٣١هـ/٩٤٣م. فضلاً عن ذلك، فإنّ ابن أبي أصيبعة يحدّد يوم وشهر وفاته، وهو يوم الجمعة من بداية ذي القعدة. غير أنّ صيغة الجمع المستخدَمة، تدل حقّاً على عدّة كتب، ثلاثة على الأقل، قد يكون القوهي قد كتبها قبل سنة ٩٤٣، ممّا قد يُرجِع تاريخ ميلاده إلى نهاية العقد الأوّل أو العقد الثاني من القرن العاشر. وهذه المعلومة في غاية الأهميّة إذ إنّها تُخبرنا بأنَّ القوهي كان على علاقة مباشرة مع سنان بن ثابت بن قرّة، والد إبراهيم، الذي لم يفته

[١١] يكتب البيروني في "تحديد نهايات الأماكن"، تحقيق بولغاكوف (Bulgakov)، الصفحة ١٠١: " وكتبني نظيف بن يمن مخبرا أنّ المنقلب الصيفيّ وُجد في آخر الساعة الأولى من الليلة التي صبيحتها يوم السبت الثامن والعشرين من صفر سنة ثمان وسبعين وثلاثمائة للهجرة". انظر ترجمة جميل علي، ص. ٦٩-٧٠: *The Determination of the Coordinates of Positions* .

[١٢] انظر: القفطي، "تاريخ الحكماء"، ص. ١٩٥؛ ابن أبي أصيبعة، تحقيق مولّر (Müller)، المجلّد الأوّل، ص. ٣٢٤.

التعرّف عليه. ويجب، لأجل تأكيد هذه المعلومة الصادرة عن كاتبين قديمين للسِّيَر، أن نواجهها بمعلومات من مصادر أخرى. غير أنّها، وحتى الساعة، لا تتضمّن شيئاً مستبعَداً: فهي لا تؤدِّي سوى إلى وضع القوهي في المكان الذي دلَّ التحليل الرياضي على أنّه بالفعل المكان العائد له ضمن تقليد "سلالة" بني قرّة.

٥. ١. ٢ كتابات "مساحة المجسّم المكافئ"

لا يُشكّل كتابُ "مساحة المجسّم المكافئ" الإسهامَ الوحيد للقوهي في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر. إنَّ القوهي يعتبر هذا المؤلَّفَ قسماً ضرورياً من مشروعٍ واسع، يهدف إلى دراسة مراكز الأثقال. ولقد ألحِقت بهذا المشروع أيضاً مذكّرة متواضعة في "نسبة القطر إلى المحيط" سنبحثها في مكان آخر حين نصل إلى الشروح العربيّة لكتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس. يعرض القوهي، في مقدّمة الكتاب، تاريخ بحوثه، وخاصّة حول هذا المشروع. كان على القوهي أن يعرف مُسَبَّقاً حجم المجسّم المكافئ، إذ إنّه كان يقوم بتحرير كتاب حول مراكز الأثقال، كبير في أهمِّيّته كما تشير كلُّ الدلائل. وهكذا استخدم كتاب ثابت بن قرّة، المؤلّف الوحيد الذي كان مطَّلعاً عليه حول هذا الموضوع. لكن، وكما رأينا في الفصل الثاني، بدأ ابن قرّة ببرهنة خمسٍ وثلاثين قضيّة تمهيديّة قبل الوصول إلى هدفه. لقد وجد القوهي هذا الطريق طويلاً وصعباً وأراد استبداله بآخر "قريب" وأقصر، أي بحيث لا يتطلَّب هذا العدد الكبير من المقدّمات. وهذا الطريق الجديد لا يتطلّب إلّا مقدّمتين.

لقد قام القوهي بدراسة حجم المجسّم المكافئ حسب أقواله، لتلبية حاجات في بحثه حول مراكز الثقل. وإن سبقت دراسة حجم المجسّم المكافئ منطقيّاً البحث حول مراكز الثقل، فإنّهما متتابعان. ومن جهة أخرى، لقد أراد القوهي، الذي كان كتاب ثابت بن قرّة بين يديه، البدء بالبحث من جديد متسلّحاً بمعايير فعّالة، سبق وعمل بها حفيد هذا الأخير، إبراهيم بن سنان، ومنها الاقتصاد والأناقة. وهكذا أهمل، كما فعل ابن سنان، المقدّمات الحسابيّة ليركّب بين الطرائق الهندسية، كما سنرى بعد قليل، وبين طريقة المجاميع التكامليّة التي تمّت إعادة

اكتشافها. لقد ألّف القوهي كتابه في المجسّم المكافئ إمّا في نفس الوقت الذي حرّر فيه كتابه في مراكز الأثقال – وهذا ما قد تطلَّب منه بعض الوقت، إذا أخذنا بعين الاعتبار عدد الفصول التي ذكرها الكاتب[١٣] - وإمّا بعد ذلك بوقت قليل. لقد ضاع هذا الكتاب الأخير، للأسف، والدلائل الوحيدة حول تاريخ كتابته تأتينا من المراسلة بين القوهي وأبي إسحق إبراهيم بن هلال الصابئ. بيد أنّ تواريخ هذه المراسلة هي، نفسها، بعيدة عن الدقّة. فلا يبقى لدينا سوى التخمين بأنَّ هذه الكتابة قد تمّت بين بداية الثمانينيّات وبداية التسعينيّات من القرن العاشر[١٤].

وصل إلينا مؤلَّفُ القوهي حول مساحة المجسّم المكافئ في عدّة مخطوطات سنتفحّصها على التوالي، وهي تنقسم إلى ثلاث مجموعات. المجموعة الأولى تقتصر على مخطوطة وحيدة لا تعطينا نصَّ القوهي بل "إعادة كتابة" له. تساعدنا المجموعة الثانية ليس فقط على الحصول على المؤلّف وإنّما أيضاً على الوصول قريباً من مصدره الأصليّ. وتقتصر المجموعة الثالثة على مخطوطة واحدة وهي قريبة من الثانية ولكنّها تحمل آثار إعادة كتابة المقدّمة وحدها. وصلت إلينا النسخة الأولى ضمن مخطوطة رياضة ٢/٤١، على الأوراق ١٣٥و-١٣٧ظ، في دار الكتب في القاهرة. خُطَّت هذه المخطوطة بيد النسَّاخ الشهير مصطفى صدقي الذي سبق لنا ذكره عدّة مرّات. تمّ النسخ سنة ١١٥٣/١٧٤٠-٤١. يُظهر تفحُّص النصّ بسهولة أنّه "إعادة كتابة"، أو "تحرير" وليس النّصَّ الأصليَّ للقوهي[١٥]. ونجد هنا

---

[١٣] من المراسلة بين القوهي والصابئ، نعلم أنّ هذا المؤلّف كان يحتوي ستّ مقالات وأنّ الكاتب كان ينوي إضافة أربع أو خمس مقالات إليها. انظر الحاشية التالية.

[١٤] نُشِرت هذه المراسلة من قِبَل ج. ل. بِرغـَغرين (J. L. Berggren)،

"*The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥāq al-Ṣābi': A translation with commentaries", Journal for the History of Arabic Science, vol. 7, n° 1 et 2 (1938), pp. 39-124.*

لِنلاحظ أنّه لا يمكن أن نجد، في مقدّمة القوهي لكتابه في "عمل المسبّع المتساوي الأضلاع" أيّ صدىً لبحثه في مراكز الثقل. وذلك أنَّ الأمر يتعلّق بتعدادٍ عام: علم الفلك، أعداد، أوزان وغيرها، ومن بينها مراكز الثقل. إذا أردنا أن نقرأ، في عبارات غامضة إلى هذا الحد، إشارة إلى أبحاثه الخاصة، فعلينا أن نتوقّع وجود كتاباتٍ من النوع نفسه حول نظريّات الأعداد وهذا ما ليس موجوداً.

[انظر ع. أنبوبا

"*Construction of the Regular Heptagon by Middle eastern Geometers of the Fourth (Hijra) Century*", *Journal for the History of Arabic Science*, 1.2 (1977),

ص. ٣٥٢-٣٨٤، انظر خاصّة ص. ٣٦٨-٣٦٩؛

"*Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4^e^ siècle de 'hégire*", *Journal for the History of Arabic Science*, 2.2 (1978), pp. 264-269.

"رسالة في استخراج ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع"، مخطوطة باريس ٤٨٢١، الأوراق ١-٨؛ إسطنبول، آيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٤٥و-١٤٧و؛ لندن، المكتب الهندي ٤٦١، الأوراق ١٨٢-١٨٩.]

[١٥] وصف هـ. سوتر (H. Suter) هذه النسخة بالـ"قصيرة"، لكي يميّزها عن النسخة التي نقلها مصطفى صدقي عام ١١٥٩ [انظر المخطوطة Q]، ويتساءل:

"*ob beide von Abû Sahl verfasst worden seien (es Kam bei arabischen Gelehrten öfters vors, dass sie eine weiter ausgeführte und eine gekürzte Abhandlung über denselben Gegenstand veröffentlichten), oder ob die kürzere spatter von einem andern Gelehrten als Auszug aus der ersten verfasst worden sei, ist nicht zu*

نفس أسلوب الكتابة الذي وجدناه في الفصل الأوّل في تحرير كتاب بني موسى الذي قام به الطوسي. وهذا هو أيضاً أسلوب ابن أبي جرّادة عندما يعيد كتابة كتاب ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة"، ويجعل منه شكلاً للكتابة سنلاقيه حتّى زمن متأخِّر في القرن الثالث عشر. هنا أيضاً، بتَرَ التحريرُ المقدّمة التاريخيّة والنظريّة للنصّ كما بتر المقطع الأخير حيث يعود القوهي إلى النقاش حول القضيّة الأولى من المقالة العاشرة من "أصول" أقليدس وحول تعديلها؛ أي أنّ الكاتب شذّب ما اعتبره غير رياضي تماماً. هنا أيضاً أبعد الكاتب من النصّ ما بدا له حشواً، وكذلك أحياناً المراحل الوسطيّة في البرهان اتّكالاً منه على حِدَّة ذهن القارئ لإعادة إقامتها. وهو باختصار، كان يحذف أو يختصر تبعاً لقواعد الاقتصاد، والتي كانت بالنسبة إليه أكثر فعاليّة تعليميّاً، بدون أن تمسَّ جوهر النصّ. ولقد استخدم كاتب هذا النصّ، أحياناً، في كلماته الخاصّة تعابير القوهي. هذا الاختلاف اللغوي يكفي للدلالة على أنّه لا يمكن للقوهي أن يكون هو نفسه مؤلِّف هذا النصّ. لنأخذ بعض الأمثلة.

تعابير الكاتب	تعابير القوهي
قطعة قطع مكافئ	قطع مخروط مكافئ
قوس القطع	———
دور	إدارة
المجسم الحادث	المجسم الذي يحدث
جميع الأساطين والمدورات	سائر الأساطين والمدورات
وننصف أبدًا	وكذلك نقسم أبدًا بنصفين
أسطحة	سطوح
أعظم بكثير	أعظم كثيرًا

entscheiden, doch ist das erstere wahrscheinlicher." ["Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide", Sitzungsberichte der phys.- med. Soz. in Erlangen, 49 (1917), pp. 186-227, à la p. 213].

لقد رتّب هذا المؤرِّخ البارز حجَّة مناسبة قائلاً إنّ العلماء العرب كانوا يكتبون في أغلب الأحيان تحريراً مختصَراً، استناداً إلى كتابة أكثر طولاً. ولكنَّ هذا غير صحيح؛ واحتمال نسبة هذا النصّ إلى القوهي لا يرتكز في هذه الحالة على شيء مؤكّد.

لا نعرف شيئاً أكيداً عن هويّة الكاتب. لذا نجد أنفسنا مضطرّين إلى إعادة كتابة هذا النصّ حتى يستطيع القارئ مقارنته بكتاب القوهي. سمحنا لأنفسنا فقط بأن نقترح، على سبيل التخمين، أن يكون كاتب هذا النصّ ابن أبي جرّادة؛ وهذا احتمال واقعيّ، بدا لنا لسببين: من جهة، يبدو أنَّ أسلوب الكتابة هو أسلوب تحرير ابن أبي جرّادة لكتاب ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة"[١٦]، وهذا التحرير موجود ضمن هذه المجموعة نفسها المنسوخة من قِبَل مصطفى صدقي؛ ومن جهة أخرى، كان ابن أبي جرّادة نفسه مهتمّاً بالمؤلَّفات في رياضيّات اللامتناهيات في الصغر، كما تشير إليها ملاحظاته في "مساحة الدائرة" و"الكرة والأسطوانة"[١٧] لأرشميدس. لا يمكن التدقيق في صحَّة أو خطأ هذا التخمين إلّا في اليوم الذي قد نجد فيه تقليداً مخطوطياً آخر لنفس النصّ.

لننتقل الآن إلى الكتابة الثانية، أي إلى نفس مؤلَّف القوهي . وصل إلينا هذا الكتاب في أربع مخطوطات من نفس العائلة، كما سنرى. تنتمي المخطوطة الأولى إلى المجموعة ٤٨٣٢ من آيا صوفيا، الأوراق ١٢٥و-١٢٩ظ، كما أسلفنا أكثر من مرّة[١٨]. من المحتمل جدّاً أن تكون هذه النسخة من القرن الخامس الهجري (الحادي عشر للميلاد) وسنرمز إليها هنا بـِ A.

تنتمي المخطوطة الثانية إلى مجموعة لا تقلُّ شهرة، وهي ٤٨٣٠ من آيا صوفيا. إنّها تحتل الأوراق ١٦١و-١٦٥ظ، ويعود تاريخ هذه النسخة إلى عام ٦٢٦\١٢٢٨-١٢٢٩. سنسمّيها U. تحتوي هذه المخطوطة على تعليقات هامشيّة[١٩].

---

[١٦] مخطوطة القاهرة، رياضة ٤١، الأوراق ٣٦و-٦٤و.

[١٧] مخطوطة إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، "كتاب في مساحة الدائرة"، الأوراق ٢و-٦و؛ "كتاب الكرة والأسطوانة"، الأوراق ٩و-٤٩ظ.

[١٨] انظر وصف المخطوطة، الفصل الثاني، الفقرة 2.1.3.

[١٩] خُطَّت هذه الحواشي الهامشيّة بيد المدعو محمّد سرتاق المراغي، رياضي مجهول من القرن الثامن للهجرة. بالفعل، لقد كتب هذا الأخير في حاشية كتاب القوهي، الورقة ١٦٥ظ، ما يلي: "طالع هذه الرسالة الشريفة واستفاد منها وكتب حواشيها الفقير إلى اللـه تعالى محمد سرتاق المراغي أول صفر ثمانٍ وعشرين وسبعمائة بنكيسار المحروسة في المدرسة النظامية الملكية".

على طول هذه الرسالة وكما بالنسبة إلى باقي رسائل القوهي التابعة للمجموعة آيا صوفيا ٤٨٣٠ هذه، يذكر المراغي، في الحاشية، المراحل الوسيطة وغالباً الأساسيّة للبرهان وذلك استناداً إلى كتابه الخاص "الإكمال"، والذي هو تحرير لكتاب "الاستكمال" لابن هود. هكذا، وعلى حاشية الورقة ١٦٢و، يكتب: "هذا مبين في استبانة شكل و من فصل ا من صنف جـ من نوع د من جنس ا من جنسي التعاليم الرياضية من كتابي الإكمال، تحرير كتاب الاستكمال في الرياضي".

بيد أنّ هذا الكتاب مذكورٌ على طول هذه الملاحظات الهامشيّة، مثلاً الأوراق ١٦٩ظ، ١٧١ظ، ١٧٨و،... . انظر أيضاً ج.ب. هوجِنديجك (*J.P. Hogendijk*)، "*The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (11th century)*", *Archives internationals d'histoire des sciencs*, vol. 41, n° 127, pp. 207-281, à la p. 219.

وهذا الأخير قرأ بغداد بدل ناكيسار (الصفحة ٢١٩). فيما يتعلّق بهذه المدينة، انظر د. كراولسكي (*D. Krawulsky*)، *Īrān – Das Reich der Īlhāne. Eine topographisch-historische Studie* (Wiesbaden, 1978), p. 407.

تنتمي المخطوطة الثالثة إلى مجموعة رياضة ٤٠ من دار الكتب، في القاهرة، الأوراق ١٨٧و-١٩٠و. ولقد نُسِخت بيد مصطفى صدقي عام ١١٥٩/١٧٤٦. سنسمّيها هنا Q.

وأخيراً تنتمي المخطوطة الرابعة إلى المجموعة ٥٦٤٨ من الزاهريّة، بدمشق، الأوراق ١٦٦ظ-١٧١ظ. وسنسمّيها D. وهي ليست إلّا نسخة عن السابقة، وعنها فقط. لذا لن نأخذها بعين الاعتبار عند تحقيق النصّ.

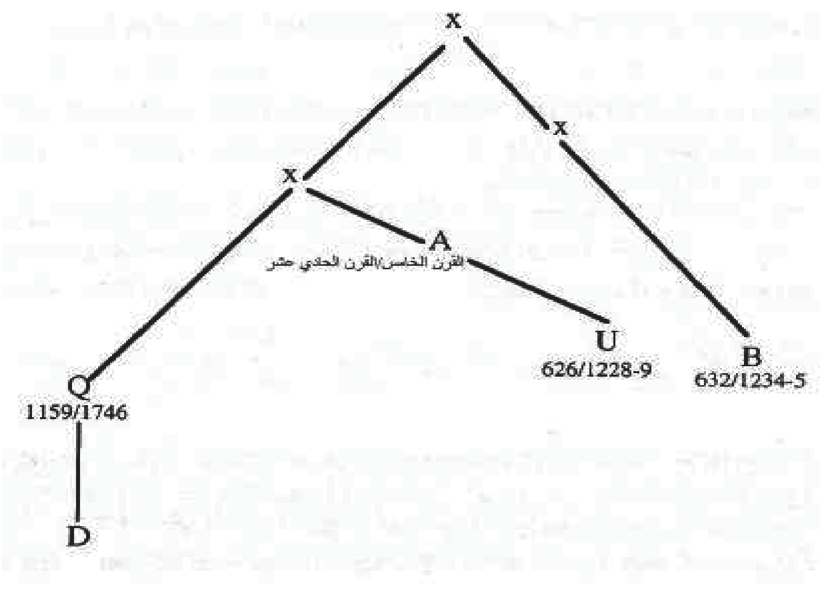
يسمح تفحُّص الحوادث –السهوات، الزيادات، الأخطاء، الخ.- في هذه المخطوطات، المأخوذة ثناءً، ببرهان النتائج التالية:

المخطوطة U هي نسخة عن A وعنها فقط. بالفعل، تتضمّن المخطوطة U سهواً لجملةٍ من سبع كلمات [٨٦٣، ٦-٧]، وسهواً آخر من ستّ كلمات [٨٦٧، ٦]، وكذلك تسع سهواتٍ من كلمة [٨٥٣، ٤، ١٦؛ ٨٥٥، ٧، ٩، ١٧؛ ٨٥٧، ٣؛ ٨٥٩، ٥؛ ٨٦١، ١٩؛ ٨٦٧، ١٤]. بالمقابل وبالنسبة إلى المخطوطة U، لا ينقصها شيءٌ من A، سوى اسم القوهي واسم أبيه (ويجان بن رستم)، اللذين كان يمكن للنسّاخ إضافتهما. ومقابلة الأنواع المختلفة للأخطاء النسخيّة تؤكّد هذه النتيجة.

إذا قارنّا الآن بين A و Q، نتوصّل إلى نتيجة أقلّ وضوحاً. فالمخطوطة Q لا تحتوي إلاّ على سهوين من كلمة واحدة: [٨٥٥، ١٤: المكافئ] و [٨٥٩، ٨: سطح]. من جهةٍ أخرى، فالأخطاء الخاصّة بالمخطوطة Q، هي مع بعض الاستثناءات، أخطاءٌ في وضع النقاط على الحروف. مع ذلك، تنقصنا حجّة لا يمكن دحضها لنؤكّد أنّ Q تنبثق مباشرةً من A. على كلِّ حال يمكننا الاستنتاج أنّ لهما نفس الأصل.

إذا أخذنا A، U و Q معاً، نلاحظ سهواً مشتركاً من ست كلمات [٨٦٧، ١١]، وسهواً آخر من ثلاث كلمات [٨٥٥، ٩-١٠]، وكذلك تسعة سهوات من كلمة أو كلمتين لكلٍّ منها [٨٥٥، ١٦، ١٨؛ ٨٦٣، ٤؛ ٨٦٧، ٦، ١٣، ١٦؛ ٨٦٩، ٣ (مرّتان)، ١٥]. وكذلك نلاحظ ثلاثة أخطاء مشتركة بين A و Q، لكن النسّاخ قد صحّحها في U كما يُظهر الفحص [٨٥٣، ٧؛ ٨٥٩، ٨؛ ٨٦١، ١٦]. هذه المقابلات لا تترك أدنى شك حول انتساب A، U و Q إلى نفس العائلة، القريبة من الأصل.

وصلت الكتابة الثالثة إلينا ضمن مخطوطة منسوخة في الموصل عام ٦٣٢/١٢٣٤-٥، وهي تنتمي إلى المجموعة ٢٥١٩ في مكتبة خودابخش، في باتنا (بانكيبور ٢٤٦٨، الأوراق ١٩١ظ-١٩٣ظ). تختلف هذه الكتابة التي سنرمز إليها بـB ، عن الكتابة السابقة في نقطة واحدة، مع أنها مطابقة لها، فلقد كُتِبت مقدّمة القوهي فيها بطريقة مختلفة. نجد فيها نفس العبارات ونفس الأفكار، لكنّها مصاغة بشكل آخر. والاختلاف الحقيقي الوحيد يكمن في مقدّمة هذه الكتابة، إذ قيل فيها إنّ القوهي حدّد مركز الثقل لقطعة من مجسّم زائد. أما باقي النصّ فهو مطابق لباقي النصّ في الكتابة الثانية مع ملاحظة أنّ B تحمل عدداً من السهوات والأخطاء كبيراً بالنسبة لنصٍّ بهذا القِصَر. وذلك أنّه تنقص في B ستّ جمل، بينها واحدة من ستٍّ وعشرين كلمة [٨٥٥، ٤-٦]، والثانية من ثماني عشرة كلمة [٨٥٩، ١٠-١١]، والثالثة من أربع عشرة كلمة [٨٥٩، ١٨-١٩]، والرابعة من تسع كلمات [٨٦١، ٢١]، والخامسة من ثماني كلمات [٨٥٩، ٥]، والسادسة، أخيراً، من سبع كلمات [٨٥٣، ١٧؛ ٨٥٥، ١]. وينقصها أيضاً ثلاث جمل كلٌّ منها من ثلاث كلمات [٨٦٧، ١٧؛ ٨٦٩، ٦، ٩-١٠]. وعلينا أن نزيد على ذلك أربعة عشر سهواً من كلمة أو كلمتين، وكذلك عدداً ضخماً من الأخطاء. كلُّ هذا لا يوحي بتحرير ثانٍ لكتاب القوهي، بل بنسخة خاصَّة حيث بدأ النسّاخ بإعادة كتابة مقدِّمة القوهي قبل البدء بإعادة نسخ النصّ الرياضي، لكن بدون اهتمام. وهكذا أخذنا النصَّ الرياضي بعين الاعتبار، بالرغم من نواقصه، خلال التحقيق النقديّ للنصّ. ولكنّنا مع ذلك حقّقنا المقدّمة بشكل منفصل. إنَّ تفحّص هذه المخطوطات الأخيرة يؤدّي في النهاية إلى التسلسلي المخطوطي التالي:



لم تكن رسالة القوهي هذه، على حدٍّ علمي، موضوعاً لأيِّ تحقيقٍ نقدي. فقط تمَّ نشر المخطوطة B ثلاث مرّات؛ الأولى عام ١٩٤٧[٢٠]، والثانية عام ١٩٦٦[٢١]، والثالثة بواسطة عبد المجيد نصير عام ١٩٨٥[٢٢]. هـ. سوتر[٢٣] (*H. Suter*) ترجم إلى الألمانيّة وبتصرّف، المقدّمة والمقطع الأخير من المخطوطة Q، لإعطاء فكرة عن الكتابة الأولى التي ليست من عمل القوهي كما برهنّا.

٥- ٢ الشرح الرياضي

لنأتِ الآن إلى المحتوى الرياضيّ في مؤلَّف القوهي. يتألّف هذا المؤلَّف، كما قلنا، من ثلاث قضايا. من البدء، يميّز القوهي بين ثلاث حالات من الشكل. في الحالة الأولى، تكون الأجسام الأسطوانيّة المحاطة والمحيطة أسطوانات دورانيّة، وفي الحالتين الثانية والثالثة، تتولَّد هذه الأجسام الأسطوانيّة من متوازيات أضلاع وهي مكافئة لأسطوانات دورانيّة، كما يشرح القوهي في القضيّة الأولى. ومن أجل تبسيط التعبير، سوف نُسَمّيها أسطوانات في الحالات الثلاث. والفائض من الأسطوانة المحيطة على مثيلتها المحاطة يكون حلقة أسطوانيّة.

القضيّة ١ - ليكن لدينا مجسّم مكافئ محوره XF [الشكل الموجود إلى جهة اليسار في أعلى الصفحة ٦١٠] وتقسيم اختياريّ لهذا المحور في نقاط إحداثيّاتها الأولى $(b_i)_{0\le i\le n}$ مع $b_0=0$ و $b_n=XF$. ولتكن $(I_i)_{2\le i\le n}$ أحجام الأسطوانات المحاطة و $(C_i)_{0\le i\le n}$ أحجام الأسطوانات المحيطة المرفقة بهذا التقسيم. وليكن V حجم الأسطوانة المرفقة بالمجسّم المكافئ، يكون لدينا: $\sum C_i > \frac{1}{2}V > \sum I_i$، لكلِّ n مع $n\in\mathbb{N}^*$.

---

[٢٠] نُشِرت في "الرسائل المتفرّقة في الهيئة للمتقدّمين ومعاصرَيْ البيروني"، تحقيق "مكتب المنشورات الشرقيّة العثمانيّة" (Osmania Oriental Publications Bureau) (حيدرأباد، ١٩٤٧)، المقالة السادسة.

[٢١] أ. س. الدمرداش، "ويجان رستم القوهي وحجم المجسّم المكافئ"، "رسالة العلم"، ٤ (١٩٦٦)، ص. ١٨٢-١٩٥.

[٢٢] "رسالة في مساحة المجسّم المكافئ"، "مجلّة معهد المخطوطات العربيّة" (*Revue de l'Institut des manuscrits arabes*)، ٢٩، ١ (١٩٨٥)، ص. ١٨٧-٢٠٨.

[٢٣] "*Die Abhandlung Thâbit b. Qurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide*"، *Sitzungsberichte der phys. – med. Soz. in Erlangen*, 49 (1917), pp. 186-227.

البرهان

(أ) لتكن Z نقطة من المحور و EZ خط الترتيب الموافق لها. يكون لدينا، وفق الخاصيّة الأساسيّة للقطع المكافئ، $\frac{XF}{XZ}=\frac{AF^2}{EZ^2}$، فيكون في الحالات الثلاث للشكل:

$$\frac{XF}{XZ}=\frac{AD^2}{EI^2}.$$

إذا كانت S_1 مساحة الدائرة ذات القطر AD و σ_1 مساحة الدائرة ذات القطر EI، يكون لدينا: $XF\cdot\sigma_1=XZ\cdot S_1$، فيكون، في الحالات الثلاث للشكل:

(1) $$v(QGHR)=v(SBCO).$$

وستكون النتيجة مماثلة لكلِّ زوج من الأسطوانات مبنيّة بهذه الطريقة؛ فيكون لدينا، على سبيل المثال: $v(JLMT)=v(PRHU)$.

(ب) لتكن $y=f(x)$ معادلة نصف القطع المكافئ الذي يولّد المجسّم المكافئ. تُرفق كلَّ نقطة لها إحداثيّة أولى b_i، مع $i\geq 1$، بخط ترتيب وبمتوازي أضلاع أبعاده b_i و $f(b_i)$. ليكن u_i حجم الأسطوانة المولّدة من هذا المتوازي؛ إذا وضعنا $u_0=0$، يكون لدينا:

(2) $$u_i-u_{i-1}<2C_i \qquad (1\leq i\leq n).$$

يأخذ القوهي في البداية $i=n$: $u_n=v(ABCD)$ و $u_{n-1}=v(IERH)$،

يكون لدينا:

$$\begin{aligned} v(ABCD)-v(IERH)&=v(SBCO)-v(IERH)+v(ASOD)\\ &=v(QGHR)-v(IERH)+v(ASOD) \end{aligned}$$

ووفق (1)، يكون لدينا

(3) $$v(ABCD)-v(IERH)=v(QEIG)+v(ASOD);$$

لكن: $v(QEIG)<v(ASOD)$، فيكون: $v(ABCD)-v(IERH)<2v(ASOD)$؛

ولـِ $i=n-1$، لدينا: $u_i=v(IERH)$، $u_{i-1}=v(KLMN)$،

ويكون لدينا: $v(IERH)-v(KLMN)<2v(EPUI)$.

(ج) يبقى الاستدلال نفسه لكلِّ i مع $1 \le i \le n$، ونستنتج من (2): $\sum_{i=1}^{n} C_i > \frac{V}{2}$.

في الواقع، من (2) نستنتج: $\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_{i-1} < 2\sum_{i=1}^{n} C_i$، لكن $u_n = V$، فيكون

$$\frac{V}{2} < \sum_{i=1}^{n} C_i . \qquad (4)$$

(د) لنبرهن كذلك أنَّ: $\sum_{i=1}^{n} I_i > \frac{V}{2}$، مع $I_0 = 0$.

يكون لدينا في البداية:

$$u_i - u_{i-1} > 2I_i \qquad 2 \le i \le n . \qquad (2')$$

لنأخذ أيضاً $u_n = v(ABCD)$ و $u_{n-1} = v(IERH)$ و $I_n = v(QEIG)$،

يكون لدينا وفق (3): $v(ABCD) - v(IERH) = v(QEIG) + v(ASOD)$، لكنَّ $v(QEIG) < v(ASOD)$، فيكون $v(ABCD) - v(IERH) > 2v(QEIG)$.

ونبرهن كذلك أنَّ: $v(IERH) - v(KLMN) > 2v(JKNT)$.

ويبقى الاستدلال نفسه لكلِّ i مع $1 \le i \le n$، فيكون:

$$u_i - u_{i-1} > 2I_i \qquad 2 \le i \le n . \qquad (2')$$

ونستنتج من ذلك أنَّ: $\sum_{i=1}^{n} u_i - \sum_{i=1}^{n} u_{i-1} > 2\sum_{i=1}^{n} I_i$ و $u_n > 2\sum_{i=2}^{n} I_i$، لكنَّ لدينا $V = u_n$

$$\frac{V}{2} > \sum_{i=1}^{n} I_i ; \qquad (5)$$

فنحصل على النتيجة من (4) و (5).

القضيّة ٢ـ لتكن قطعة من المجسّم المكافئ بين سطحين اختياريّين من سطوح الترتيب، وليكن I و C حجميْ الأسطوانة المحاطة والمحيطة الموافقتين لهما. إذا قطعنا هذه القطعة بسطح من سطوح الترتيب على مسافة متساوية من السطحين السابقين، فإنّنا نحدّد أسطوانتين

محاطتين حجمهما I_1 و I_2 وأسطوانتين محيطتين حجمهما C_1 و C_2 على التوالي؛ يكون لدينا: $(C_1 - I_1) + (C_2 - I_2) = \frac{1}{2}(C - I)$.

حجم الحلقة $(HGEC) = C$ ، حجم الحلقة $(NLMC) = C_1 - V_1$

[الشكل الموجود إلى جهة اليسار في أعلى الصفحة ٦١٣]

لكنَّ $HGEC$ متوازيَ أضلاع و KM يمرُّ بالنقطة L منتصف NS، فيكون إذاً:

حجم الحلقة $(NLMC)$ + حجم الحلقة $(LKGC)$ =

$v(NSEC)\frac{1}{2}$ + حجم الحلقة $(NHSC)\frac{1}{2}$ = حجم الحلقة $(H)\frac{1}{2}$. فنحصل على النتيجة.

ملاحظة - في ذهن القوهي، هذا البرهان يعني ما يلي: إذا انطلقنا من تقسيم للمحور XF بنقاط إحداثيّاتها الأولى $(b_i)_{0\le i\le n}$ مع $(I_i)_{1\le i\le n}$، $(C_i)_{1\le i\le n}$ و $I_1 = 0$ أحجام الأسطوانات المثيلة، وإذا تناولنا بعد ذلك المتتالية $(c_j)_{0\le j\le 2n}$ مع $b_0 = c_0$، $b_n = c_{2n}$، $c_{2i+1} = \frac{b_i + b_{i+1}}{2}$ و $(I'_j)_{1\le j\le 2n}$ و $(C'_j)_{1\le j\le 2n}$ أحجام الأسطوانات المثيلة المرفقة بهذا التقسيم، يكون لدينا: $\sum_{j=1}^{2n}(C_j - I_j) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(C_i - I_i)$.

القضيّة ٣- إذا كان P حجم قطعة من المجسّم المكافئ و V حجم الأسطوانة المرفقة بها، يكون لدينا: $P = \frac{V}{2}$.

<u>البرهان</u>- لنفترض $P \ne \frac{V}{2}$، يكون لدينا إذاً: $P = \frac{V}{2} + \varepsilon$ أو $P = \frac{V}{2} - \varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$.

لنبرهن أنّنا نقع في التناقض في كلتا الحالتين، مهما كان التقسيم الأوَّليّ $(b_i)_{0\le i\le n}$ للمحور XF. لنبنِ على التوالي، وفقاً لطريقة القضيّة السابقة، التقاسيم المحدّدة بـِ: $(b_i^1)_{0\le i\le 2n}$، $(b_i^2)_{0\le i\le n.2^2}$، ...، $(b_i^q)_{0\le i\le n.2^q}$ ...

إذا كانت $\left(I_i^q\right)_{1\le i\le n.2^q}$ و $\left(C_i^q\right)_{1\le i\le n.2^q}$ أحجام الأسطوانات المرفقة بالتقسيم $\left(b_i^q\right)_{1\le i\le n.2^q}$، فإنّنا نعرف، وفقاً للقضيّة السابقة أنّ: $\sum_{i=1}^{n.2^q}\left(C_i^q-I_i^q\right)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n.2^{q-1}}\left(C_i^{q-1}-I_i^{q-1}\right)$، لكلّ عدد n معلوم، ولكلّ عدد q اختياريّ في $\mathbb{N}^*$.

هذه النتيجة تسمح للقوهي، بفضل توسيع القضيّة الأولى من المقالة العاشرة لأقليدس، بأن يؤكّد أنّه انطلاقاً من عددٍ ما من العمليّات، يكون لدينا:

$$\sum_{i=1}^{n.2^q}\left(C_i^q-I_i^q\right)<\varepsilon. \qquad (6)$$

يُبرهن القوهي، بلغة أخرى، أنّ لكلّ ε مع $0<\varepsilon$، يوجد N بحيث يكون لدينا المتباينة (6) لكلّ q مع $q>N$.

لكنَّ لدينا: $\sum_{i=1}^{n.2^q}\left(C_i^q-I_i^q\right)<P-\sum_{i=1}^{n.2^q}I_i^q$، فيكون : $P-\sum_{i=1}^{n.2^q}I_i^q<\varepsilon$.

غير أنّه، إذا كان $P=\frac{V}{2}+\varepsilon$، يكون لدينا $\sum_{i=1}^{n.2^q}I_i^q>\frac{V}{2}$، وهذا شيء مستحيل وفقاً للقضيّة ١؛ وإذا كان $P=\frac{V}{2}-\varepsilon$، فإنّنا نستدلُّ بالطريقة نفسها لأنّ:

$$\sum_{i=1}^{n.2^q}\left(C_i^q-I_i^q\right)<\varepsilon \text{ ، فيكون } \sum_{i=1}^{n.2^q}C_i^q-P<\varepsilon \text{ ، فيكون: } \sum_{i=1}^{n.2^q}C_i^q-\left(\frac{V}{2}-\varepsilon\right)<\varepsilon \text{ ، فيكون: } \sum_{i=1}^{n.2^q}C_i^q<\frac{V}{2}$$

وهذا شيء مستحيل وفقاً للقضيّة ١. يكون لدينا إذاً $P=\frac{V}{2}$.

برهان القوهي سريع جدّاً بفضل القضيّة ١ التي قارنت بشكل مباشر مجاميع الأسطوانات المحاطة والمحيطة بحجم الأسطوانة الكبرى، دون أن يكون ضروريّاً تقييم هذه المجاميع، كما يفعل أرشيمدس، وذلك بالعودة إلى مجموع مقادير من متتالية حسابيّة. يرتكز برهان هذه القضيّة على المتباينتين (2) و (2′) الناتجتين من تناول أسطوانات متساوية مثل $QGHR$ و $SBCO$ وهذه الأسطوانات غير محاطة وغير محيطة، وبالتالي فهي لا تدخل مبدئيّاً في البرهان.

تبرهن القضيّة ٢ أنّنا عندما نزيد في دقّة التقسيم، بقسمة كلِّ فسحة إلى اثنتين، فإنَّ فائض الأسطوانات المحيطة إلى الأسطوانات المحاطة سيُقسَم إلى اثنين. وهذه القضيّة تلعب الدور نفسه الذي لعبته القضيّة ١٩ من كتاب أرشيمدس في "المخروطيّات والكرويّات".

إنّ طريقة القوهي، باستخدام المجاميع التكامليّة، تَمُتُّ بصلة القربى إلى طريقة أرشميدس، لكنّها تختلف عنها عند التطبيق. كلُّ شيء يجري كما لو أنّ القوهي أعاد اكتشاف استخدام المجاميع التكامليّة.

٥-٣ نصّا أبي سهل القوهي

" في استخراج مساحة المجسّم المكافئ"

" في مساحة المجسّم المكافئ"

ا – ١٢٥ – ظ
ب – ١٩١ – و
ص – ١٦١ – ظ
ق – ١٨٧ – ظ

٥-٣-١ رسالة لأبي سهل ويجن بن رستم القوهي
في استخراج مساحة المجسم المكافئ

لما كان العلم بمساحة الأجسام والأشكال والمقادير ⟨و⟩بنسب بعضها إلى بعض قبل العلم بمراكز أثقالها، وكان ذلك كالمقدمة لها، إذ لا يجوز وجود مراكز الأثقال إلا بعد معرفة المساحة، احتجنا إلى علم المساحة أوّلاً من كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة وغيره من الكتب المؤلفة في هذا المعنى. فبعد فراغنا من النظر في ذلك بدأنا بتأليف كتابنا في مراكز الأثقال، ودققنا الفكر فيه بغاية الوسع والطاقة حتى وجدنا مراكز أثقال عدّة أشياء من ذوات الثقل لم يجدها قبلنا أحد من القدماء المبرّزين في الهندسة، فضلاً عمن دونهم من المتأخرين، ولا سمعنا أيضًا بوجودها إلى وقتنا هذا، كوجود مركز ثقل قطعة من كرة مفروضة أو من مجسم قطع ناقص. فلما وجدناه طمعنا في وجود مراكز أثقال أجسام أخر لم توجد مراكز أثقالها فيما قبل، كمركز ثقل المجسم المكافئ. ولم يكن بدّ في وجود مركز ثقله من معرفة مساحته حسب ما قدمنا.

فقلنا: وليس يوجد كتاب أُلف في هذا الباب غير كتاب أبي الحسن ثابت بن قرة، وهو كتاب معروف مشهور عند المهندسين، لكنه كبير طويل تبلغ أشكاله إلى قريب من أربعين شكلاً،

1 بعد البسملة نجد في [ا] «وما توفيقي إلا بالله» وفي [ص] «استعنت بالله سبحانه» – 2 لأبي: للشيخ [ب] / ويجن بن رستم: ناقصة [ا] / رستم القوهي: وستم القوهي رحمه الله [ص] وستم القوهي رحمهم الله [ق] – 2-3 رسالة ... المكافئ: رسالة في استخراج مساحة المجسم المكافئ لأبي ... القوهي [ق] – 3 استخراج: ناقصة [ب] – 4 لما: قال لما [ق] / والمقادير: المقادير [ص] / بنسب: ينسب [ق] – 10 كوجود: كوجودنا [ا، ق] – 4-14 يختلف تحرير مقدمة رسالة القوهي في مخطوطة [ب] عنه في المخطوطات الأخرى اختلافًا كبيرًا، ولهذا رأينا نقل النص كما هو دون تجزئته: «لما كان العلم بمساحة الأجسام والأشكال والمقادير ⟨و⟩ بنسبة بعضها إلى بعض قبل العلم بمعرفة مراكز أثقالها لأنه المقدمة لها، إذ لا يجوز وجود مراكز الأثقال إلا بعد العلم بمساحتها، فلهذا لما استقصينا النظر في علم المساحة وفرغنا منه، كالذي في كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة وغير ذلك من الكتب، فبدأنا بتأليف كتاب مراكز الأثقال واستقصينا النظر فيه غاية الاستقصاء، حتى وجدنا مراكز أثقال عدة أشكال لم يجدها أحد من القدماء المبرّزين في هذا العلم فضلاً [من] ⟨عمن⟩ دونهم من المتأخرين، ولا سمعنا بذكر وجودها. وهو أيضًا مثل وجود مركز ثقل قطعة من كرة أو ⟨من⟩ مجسم قطع ناقص أو ⟨من⟩ قطع زائد، الذي لم يكن [موجوده] ⟨موجودًا⟩ إلى وقتنا هذا. فلما وجدنا ذلك طمعنا في أن نجد مراكز أثقال أشكال أخر، لم توجد ⟨مراكز⟩ أثقالها فيما قبل، كمركز ثقل المجسم المكافئ. ولم يكن بد في وجود مركز ثقله من معرفة مساحته أولا كما قلنا آنفًا. ولم يكن كتاب موجودًا [موجود] في مساحة المجسم المكافئ إلا ما ألفه أبو الحسن ثابت بن قرة. وهو موجود مع أكثر أصحابنا، لكنه كبير الحجم كثير الأشكال عدديا وخطوطيا وغيرهما، تبلغ أشكاله إلى قريب من أربعين شكلا» – 11 أخر: آخر [ق] / توجد: يوجد [ق] – 12 قدمنا: تقدمنا [ا، ص، ق] – 13 فقلنا: فعلنا [ق] / يوجد: يجد [ص] – 14 تبلغ: يبلغ [ق].

عدديات وخطوطيات وغير ذلك، وجميعها مقدمات لشكل واحد، وهو كيف نعلم مساحة مجسم القطع المكافئ.

ولما نظرنا فيه استصعب/ فهمه علينا جدًا، وكان كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة مع صعوبته وكثرة أغراضه أسهل علينا منه، مع أن الغرض فيه واحد. وظننا أن حال كل ناظر نظر في هذا الكتاب منذ الوقت الذي ألفه ثابت بن قرة فيه وإلى الآن كحالنا في تعذر فهمه علينا؛ فاقتضانا ذلك أن جددنا ⟨النظر في⟩ استخراج مساحة هذا المجسم، أعني المكافئ – ابتداءً. وتهيأ لنا ذلك بطريق قريب مستغن عن تلك المقدمات كلها، وغير محتاج إلى شيء منها. ومن نظر في ذلك الكتاب وفي كتابنا هذا علم أن الأمر فيها كما قلنا. ا – ١٢٦ – و

ولو كنا، لما اضطررنا في تأليف كتابنا/ في مراكز الأثقال إلى معرفة مساحة المجسم المكافئ أو عرفنا ذلك وفهمناه من كتاب ثابت، لما اشتغلنا باستئناف/ استخراج ما قد سبق غيرنا إلى استخراجه، بأيّ وجه كان استخراجه إيّاه، ولا تكلمنا في طريق استخراج من تقدمنا، طويلاً كان أو قصيرًا، صعبًا كان أو سهلاً، مستغنيًا كان عن المقدمات أو محتاجًا إليها، لأن ذلك ليس من عادتنا، لاسيّما ومسالك هذا العلم كثيرة واسعة. ق – ١٨٨ – و ص – ١٦٢ – و

فنقول: إذا دار قطع مخروط مكافئ مع السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر ذلك القطع ونصفُ قاعدته ومع خطوط الترتيب لذلك القطر ومع الخطوط المارّة بأطراف خطوط الترتيب حول هذا القطر بعينه وعلى موازاة له حتى ترجع الإدارة إلى حيث بدأت منه، فإن المجسّم الذي يحدث من إدارة سطح ذلك القطع هو المجسم المكافئ. والمجسم الذي يحدث من إدارة

13-1 ولنتابع نقل نص مقدمة مخطوطة [ب]: «وكلها مقدمات لشكل واحد، هو معرفة مساحة المجسم المكافئ. ولما نظرنا فيه كان كتاب أرشميدس في الكرة والأسطوانة مع صعوبته ومع أن فيه أغراضا كثيرة من المساحة أسهل من قراءة ذلك الكتاب، وهو غرض واحد، أعني مساحة المجسم المكافئ. فلهذا ما وقفنا على شيء منه بعد رغبتنا فيه، وظننا أن حال كل راغب في قراءته كحالنا فيه، من الوقت الذي ألفه ثابت إلى وقتنا هذا، أعني أنه لم يقف عليه أحد /كما لم نقف نحن عليه. فلأجل ذلك جددنا النظر في استخراج مساحة هذا الشكل ابتداءً، ووجدنا مساحته بطريق مستغنية عن تلك المقدمات كلها وغير محتاجة إلى شيء منها. وكل من نظر في هذا وكان من أصحابنا علم أن الأمر كما قلنا. ولولا أن تأليف كتاب مراكز الأثقال اضطرنا إلى معرفة مساحة هذا الشكل الذي استخرجه ثابت بطريقه، أو لو كنا وقفنا عليه من كتابه ما اشتغلنا (قد تقرأ «او شغلنا» في المخطوطة) باستخراج شيء قد استخرجه غيرنا، بأي وجه كان، ولا تكلمنا في طريق استخراج من تقدمنا، طويلا كان أو قصيرا، سهلا كان أو صعبا، مستغنيا عن المقدمات أو محتاجا إليها، لأن ذلك ليس من عادتنا، ولا سيما ...» – 1 وهو: هو [ص] – 4 نظر: ناقصة [ص] – 6 جددنا: حددنا [ا] – 7 ذلك: ذاك [ا، ق] / وغير: غير [ص] – 10 وفهمناه: وفهمنا [ص] / اشتغلنا: استعملنا [ق] – 13 العلم: العلوم [ب] – 14 فنقول: فنبتدئ الآن ونقول [ب] / قطع: قطح [ص] / مخروط: ناقصة [ب] / مكافئ: مكاف [ا، ب، ق] / الذي: التي [ق] الى [ا] – 15 خطوط (الأولى): الخطوط [ب] – 15-16 الخطوط ... له: خطوط ذلك القطر [ب] – 16 هذا: ناقصة [ص] / ترجع: يرجع [ق] بعينه [ب] – 17 من إدارة: ناقصة [ب]. ب – ١٩١ – ظ

السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر القطع ونصف قاعدته هو أسطوانة المجسم المكافئ؛ وذلك القطر هو أيضًا قطر المجسم المكافئ. والسطوح التي تحدث من إدارة خطوط الترتيب، نسمّيها سطوح الترتيب للمجسم المكافئ. والمجسمات التي تحدث فيما بين سطوح الترتيب نسمّيها مدورات المجسم المكافئ. وما كان منها حادثًا من السطح المتوازي الأضلاع الذي يقع فيه جميعه في القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطه نسمّيه المدوّر الذي في المجسم المكافئ. وما كان منها حادثًا من السطح المتوازي الأضلاع الذي يقع بعضه خارجًا من القطع ويكون زاوية من زواياه على محيطه نسمّيه المدوّر الذي على المجسّم المكافئ. ونسمّي كل مدورين يكون أحدهما واقعًا في المجسم المكافئ والآخر واقعًا عليه نظيرين، إذا كان الذي وقع فيه منفصلاً من الذي يقع عليه، أعني بذلك أن يشتركا في ارتفاع واحد. وكل مجسم يحدث من إدارة أحد السطوح التي على ذلك القطع حول قطر ذلك القطع أيّ سطح كان، نسميه مجسم ذلك السطح، أو المجسم الكائن من ذلك السطح، كان شبيهًا بالطوق أو بالأسطوانة أو بغيرهما.

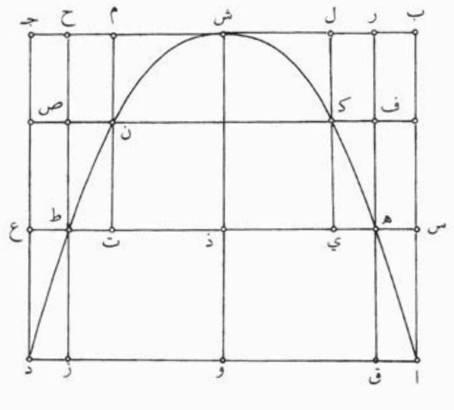
– آ – كل أسطوانة مجسم مكافئ فإن نصفها أصغر من جميع المدورات الحادثات على المجسم المكافئ كم كانت، وأعظم من جميع المدورات الحادثات فيه كم كانت.

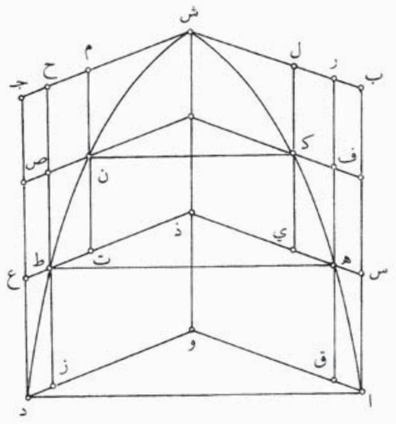
ا – ١٢٦ – ظ مثال ذلك: أن / أسطوانة المجسم المكافئ ا ب ج د والمجسم المكافئ ا ش د، والمدورات التي

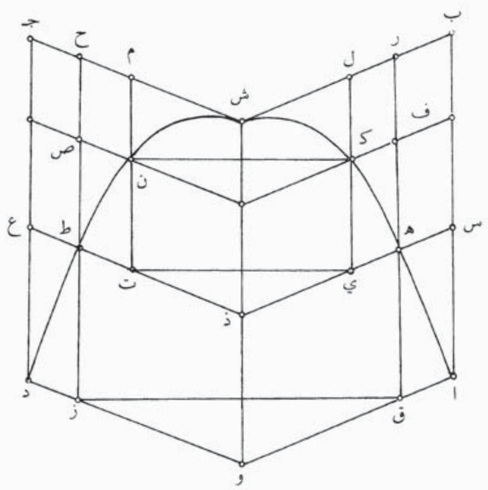
ق – ١٨٨ – ظ عليه ا س ع د ه ف ص ط ك ل م ن، والمدورات التي فيه ق ه ط ز ي ك ن ت./

ص – ١٦٢ – ظ فأقول: إن نصف أسطوانة ا ب ج د أصغر من جميع مدورات/ ا س ع د ه ف ص ط ك ل م ن التي على المجسم المكافئ ومن جميع أمثالها كم كانت، وأعظم من جميع مدورات ق ه ط ز ي ك ن ت التي فيه ومن جميع أمثالها كم كانت.

1 السطح ... يحيط : ناقصة [ب] / أسطوانة المجسم : الأسطوانة للمجسم [ب] – 2 وذلك : وفي ذلك [ب] / تحدث : يحدث [ق] – 3 تحدث : يحدث [ق] – 5 زاوية من: في الهامش مع بيان موضعها [ا] – 4-6 فيه ... يقع : ناقصة [ب] – 6 زاوية من: في هامش [ا] – 7 كل ... واقعًا: المدورين اللذي أحدهما واقع [ب] / يكون: ناقصة [ص] – 8 واقعًا: واقع [ب] / يقع : وقع [ب] – 9 ذلك: ناقصة [ص] – 9-10 على ذلك القطع : ناقصة [ا، ص، ق] – 10 قطر ذلك القطع : ذلك القطر [ب] – 11 كان شبيهًا: شبيهًا كان [ب] – 12 مكافئ: مكاف [ب] – 14 المكافئ (الثانية): ناقصة [ق] – 15 ا س ع د: ا ش ع د [ص] ا س ع د ه [ب] / ق ه ط ز: ق ه ط ر [ا، ب، ص] – 16 جميع : ناقصة [ا، ص، ق] – 17 جميع (الثانية): ناقصة [ص] – 18 ق ه ط ز: ق ه ط ر [ا، ب، ص] / التي فيه: ناقصة [ا، ص، ق].







برهان ذلك: أن كلَّ واحد من خطي ا و هـ ذ هو من خطوط الترتيب لقطر ش ذ و، فنسبة خط و ش إلى خط ش ذ كنسبة مربع ا و إلى مربع هـ ذ، وذلك لأن قطع ا ش د قطع مكافئ. ونسبة مربع ا و إلى مربع هـ ذ هي كنسبة مربع ا د إلى مربع هـ ط، ولكن نسبة مربع ا د إلى مربع هـ ط كنسبة الدائرة التي قطرها ا د إلى الدائرة التي قطرها هـ ط، فنسبة الدائرة التي قطرها ا د

1 هـ ذ: هـ د [ا، ب] / هو: ناقصة [ب] / ش ذ و: س د و [ب] س ذ و [ا] – 2 خط (الثانية): ناقصة [ب] / ش ذ: ش د [ب، ص] / مربع (الأولى والثانية): مربع خط [ب] / هـ ذ: هـ د [ب، ص] / مكافئ: مكاف [ا، ب، ق] – 3 مربع (الثانية): مربع خط [ب] / هـ ذ: هـ د [ب، ص] / هي: ناقصة [ص] / مربع (الأولى والثانية والثالثة والرابعة): مربع خط [ب] – 4 قطرها (الأولى والثانية): قطرها خط [ب].

إلى الدائرة التي قطرها هـ ط كنسبة خط وش إلى خط ش ذ. فضرب خط وش في الدائرة التي قطرها هـ ط مساوٍ لضرب خط ش ذ في الدائرة / التي قطرها ا د. ولكن ضرب خط وش في ب – ١٩٢ – و الدائرة التي قطرها هـ ط مساوٍ لأسطوانة ق رح ز التي حدثت من إدارة سطح رق وش المتوازي الأضلاع حول قطر ش و، كان خط الترتيب على القطر على زاوية قائمة أو على زاوية غير قائمة. وذلك أنه إن كان على زاوية غير قائمة فكأنه قد أخذ من أحد رأسي الأسطوانة مخروط ما وزيد بعينه على الرأس الآخر.

وكذلك ضرب خط ش ذ في الدائرة التي قطرها ا د مساوٍ لأسطوانة س ب ج ع التي حدثت من إدارة سطح س ب ش ذ المتوازي الأضلاع. فأسطوانة ق رح ز مساوية لأسطوانة س ب ج ع. فإذا ألقينا أسطوانة هـ رح ط المشتركة، بقي المجسم الذي يحدث من إدارة أحد سطحي س ب رهـ ط ح ج ع مساويًا لمدور ق هـ ط ز. ومدور ق هـ ط ز أصغر من مدور ا س ع د. فالمجسم الذي يحدث من إدارة أحد سطحي س ب رهـ ط ح ج ع أصغر من مدور ا س ع د.

فإذا ركبنا كان مجموع هذا المجسم وهذا المدور أصغر من ضعف مدور ا س ع د. ولكن المجسم والمدور جميعًا هما فضل أسطوانة ا ب ج د على أسطوانة هـ رح ط. ففضل أسطوانة ا ب ج د على أسطوانة هـ رح ط أصغر من ضعف مدور ا س ع د الذي على المجسم المكافئ. وكذلك فضل أسطوانة/ هـ رح ط على أسطوانة ک ل م ن أصغر من ضعف مدور هـ ف ص ط الذي عليه؛ ق – ١٨٩ – و وكذلك جميع الأساطين والمدورات الحادثة عليه حتى يُنتهى إلى البقية التي تبقى من آخر أسطوانة ا ب ج د المفروضة؛ وليكن تلك البقية / مجسم ک ل م ن. ففضل أسطوانة ا ب ج د على مجسم ص – ١٦٣ – و ک ل م ن أصغر من ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ سوى مجسم ک ل م ن. وإن جعلنا مجسم ک ل م ن مشتركًا، يكون أسطوانة ا ب ج د أصغر من ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ كم كانت؛ فالنصف منها أصغر من جميع المدورات التي عليه كم كانت.

1 هـ ط: ط هـ [ص] / ش ذ: ش د [ص] / وش: وس [ب] – 2 ش ذ: ش د [ب، ص] / وش: وس [ب] – 3 ق رح ز: ق زح ز [ص] ق زح ر [ا] / رق وش: رق ش و [ا، ص، ق] – 4 ش و: س و [ب] / زاوية قائمة: الزاوية القائمة [ب] – 5 وذلك ... قائمة: ناقصة [ب] / زاوية: ناقصة [ص] / وزيد: ونديو [ب] – 7 س ب ج ع: س ج ب ع [ا، ب، ص] – 8 سطح: ناقصة [ق] / س ب ش ذ: س ب س د [ا] / فأسطوانة: وأسطوانة [ا، ق]/ ق رح ز: ق زح ر [ا] – 9 س ب ج ع: س ج ب ع [ب] / هـ رح ط: هـ زح ط [ا] – 10 س ب رهـ: س ب زهـ [ا] / ط ح ج ع: طحمع [ب] / ق هـ ط ز (الأولى): ق هـ ط ر [ا، ب] / ق هـ ط ز: ق ط هـ ر [ا، ب] – 10-11 مساويًا ... ط ح ج ع: ناقصة [ب] – 11 س ب رهـ: س ب زهـ [ا] – 14 جميعًا هما: جميعها [ب] / هـ رح ط: هـ زح ط [ا] – 15 هـ رح ط: هـ زح ط [ا] – 16 هـ رح ط: هـ زح ط [ا] / هـ ف ص ط: فصطر [ب] / الذي: التي [ب] – 17 التي: ناقصة [ب] / تبقى: يبقى [ق] / آخر: أجزاء [ب، ق]، وهو أيضًا صحيح، إلا أنا أخذنا بالمخطوطة [ا] – 18-19 ففضل ... المجسم: ناقصة [ب].

وأيضـًا، لأن المجسم / الذي يدور على سطحي ا ب رق زح جـ د أعظم من المجسم الذي يدور على سطحي س ب ره ط ح جـ ع، وهذا المجسم مساوٍ لمدور ق هـ ط ز كما بينا قبل، فيكون المجسم الذي يدور على سطحي ا ب رق زح جـ د أعظم من مدور ق هـ ط ز. وإذا ركبنا كانا جميعًا أعظم من ضعف مدور ق هـ ط ز. ولكن الجميع هو فضل أسطوانة ا ب جـ د على أسطوانة هـ رح ط. ففضل أسطوانة ا ب جـ د على أسطوانة هـ رح ط أعظم من ضعف مدور ق هـ ط ز؛ وكذلك فضل أسطوانة هـ رح ط على مجسم ک ل م ن أعظم من ضعف مدور ي ک ن ت كما بينا. وكذلك سائر الأساطين والمدورات التي في المجسم المكافئ حتى يُنتهى إلى آخر ما يبقى من الأسطوانة المفروضة، وليكن ذلك مجسم ک ل م ن. ففضل أسطوانة ا ب جـ د على مجسم ک ل م ن أعظم من ضعف المدورات التي في المجسم المكافئ كلها كم كانت. وإن زدنا مجسم ک ل م ن على فضل أسطوانة ا ب جـ د عليه، يكون / جميع أسطوانة ا ب جـ د أعظم كثيرًا من ضعف المدورات التي في المجسم المكافئ كلها كم كانت. فالنصف من أسطوانة ا ب جـ د أعظم من جميع المدورات التي في المجسم المكافئ كم كانت، وأصغر من جميع المدورات التي عليه كم / كانت؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

ا – ١٢٧ – و
ا – ١٢٧ – ظ
ص – ١٦٣ – ظ
ب – ١٩٢ – ظ

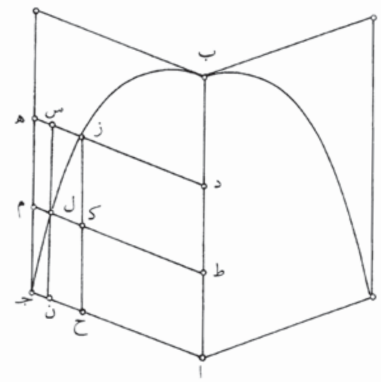
– بَ – إذا قُسم أحد المدورات التي فيما بين سطحين من سطوح الترتيب في مجسم مكافئ بنصفين بسطح آخر من سطوح الترتيب حتى يحدث عن قسمته مدوران على المجسم المكافئ ومدوران نظيران لهما فيه، فإن فضل المدورين الحادثين عليه على نظيريهما الحادثين فيه نصف فضل المدور الأول – الذي كان عليه – على نظيره الذي كان فيه / قبل القسمة.

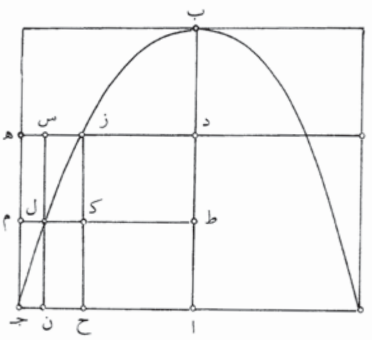
ق – ١٨٩ – ظ

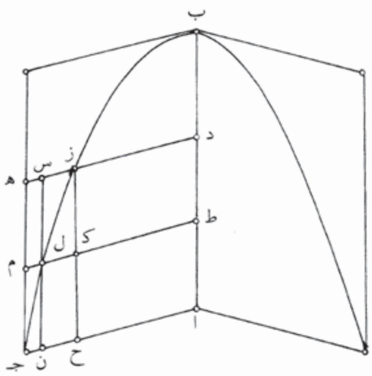
مثال ذلك: أن مدورًا من المدورات التي على مجسم ا ب جـ المكافئ – حدوثه عن إدارة سطح ا د هـ جـ – ونظيره من المدورات التي فيه، حدوثه عن إدارة سطح ا د زح. وقد أخرج خط ط ک ل م قاسمًا لخطي ا د هـ جـ وللخطوط التي تقع بينها على موازاة لها بنصفين نصفين، ولذلك ما يكون خط ط ک ل م موازيًا لخطي ا جـ د هـ، وجعل خط ن ل س موازيًا لقطر ا ب.

2 س ب ره: سس [ب] س ب زه [ا] / ط ح جـ ع: طحح [ب] / ق هـ ط ز: ق هـ ط ر [ا، ب، ص] – 3 فيكون: يكون [ا، ص، ق] / ا ب رق: ا ب زق [ا] / زح جـ د: رح جـ د [ا] / أعظم: في الهامش [ب] / ق هـ ط ز: ق هـ ط ر [ا، ب، ص] – 3-4 من مدور ... الجميع: في الهامش [ب] – 4 ق هـ ط ز: ق هـ ط ر [ا، ب، ص] – 5 هـ رح ط: هـ زح ط [ا] / هـ رح ط: هـ زح ط [ا] – 6 ق هـ ط ز: ق هـ ط ر [ا، ب، ص] / ق هـ ط ز ... مدور: في الهامش [ا] / هـ رح ط: هـ زح ط [ا] – 12-13 عليه كم كانت: في الهامش [ص] – 14 مكافئ: مكاف [ا، ق] – 15 مدوران: مدورات [ق] – 16 فإن: مطموسة [ب] / فضل: فضلا [ب] / عليه: ناقصة [ب] / نظيريهما: نظيرتها [ا، ق] – 18 ا ب جـ: ابجد [ب] – 19 ونظيره: ناقصة [ص] / ا د زح: ا د رح [ب، ص] – 20 تقع: يقع [ق] – 21 ولذلك: وكذلك [ا، ص، ق] / ولذلك ... د هـ: ناقصة [ب] / وجعل: ونصل [ص].

فأقول: إن فضل مدوري ط د س ل ا ط م جـ على مدوري ط د ز ک ا ط ل ن النظيرين لهما، أعني المجسمين اللذين يكونان من سطحي ک ز س ل ن ل م جـ، نصف فضل مدور ا د هـ جـ على مدور ا د ز ح النظير له، أعني المجسم الذي يكون من سطح ح ز هـ جـ.







برهان ذلك: لأن سطح ح ز س ن متوازي الأضلاع، وقد قسم ز ح بنصفين بخط ک ل الموازي لخطي ز س ح ن، يكون سطح ک ز س ل مثل سطح ح ک ل ن، فسطح ک ز س ل نصف سطح ح ز س ن. وبمثل ذلك نبيّن أن سطح ن ل م جـ نصف سطح ن س هـ جـ. فمدورا سطحي ک ز س ل ن ل م جـ جميعًا – اللذان هما فضل مدوري ط د س ل ا ط م جـ على

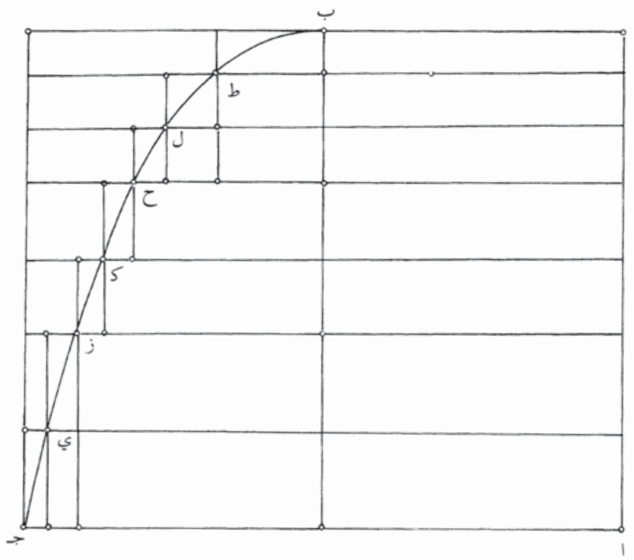
1 ط د س ل: ط د ن ل [ق] بدل النون والسين، وأيضًا في الشكل، ولن نشير إليها فيما بعد / ا ط م جـ: ا ط م ح [ب] / ط د ز ک: ط د ر ل [ب] – 2 مدور: مدوره [ب] – 3 ا د هـ جـ: ا ذ هـ جـ [ص] / مدور: مدورى [ص] / يكون: فوق السطر [ا] – 4 ز ح: ناقصة [ا، ص، ق] – 5 ک ز س ل: ح ک ل ن [ب] / ح ک ل ن: ک ز س ل [ب] – 6 نبين: يتبين [ص] – 6-7 نصف ... ن ل م جـ: ناقصة [ص] – 7 فضل: ناقصة [ب] / ا ط م جـ: ا د هـ جـ [ق] ا ط هـ جـ [ا، ص] ا ط م ح [ب].

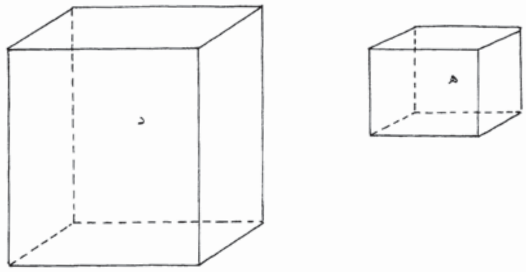
مدوري/ ط د ز ک ا ط ل ن – مساويان لنصف مدور سطح ح ز ه ج الذي هو فضل مدور ص - ١٦٤ - و
ا د ه ج على مدور ا د ز ح؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن./ ا - ١٢٨ - و

– جَ – كل مجسم مكافئ فإنه مساوٍ لنصف أسطوانته. ا - ١٢٨ - ظ

مثال ذلك: ليكن مجسم مكافئ عليه ا ب ج، وليكن جسم دَ مثل نصف أسطوانة مجسم ا ب ج المكافئ.

فأقول: إن مجسم ا ب ج مساوٍ لجسم دَ.





1 ط د ز ک: ط ذ ز ک [ق] / ا ط ل ن: ا د ن س [ق] – 3 مكافئ: مكاف [ا، ب، ق] / فإنه: ناقصة [ب] – 4-5 ليكن ... المكافئ: ان المجسم المكافئ ا ب ج ونصف أسطوانة مثل جسم دَ [ب] – 4 مكافئ: مكاف [ا، ق] – 6 لجسم: لمجسم [ص].

برهان ذلك: أنه إن لم يكن مجسم ا ب ج المكافئ مساويًا لجسم د، فهو أعظم أو أصغر منه.

فليكن أولاً أعظم من جسم د، إن أمكن ذلك؛ وليكن فضل مجسم ا ب ج على جسم د جسم ه. ونجعل مدورات على مجسم ا ب ج المكافئ كم كانت، ونفصل من كل مدور عليه مدورًا فيه، أعني نظيره. وليكن فضلات المدورات التي عليه على نظائرها التي فيه المجسمات التي تكون من إدارة سطوح ج ز ز ح ح ط. ونقسم كل واحد من هذه المدورات بنصفين بسطوح ق - ١٩٠ - و الترتيب/ حتى ترجع فضلات المدورات الحادثات التي على المجسم المكافئ على نظائرها الحادثات فيه إلى نصف الفضلات التي كانت قبل القسمة، كما بينا في الشكل الثاني. وكذلك نقسم أبدًا المدورات الحادثات بنصفين نصفين حتى تنتهي فضلات المدورات التي على المجسم المكافئ على نظائرها التي فيه إلى أصغر من جسم ه. فجسم ه أعظم من تلك الفضلات كلها. فلتكن الفضلات هي المجسمات التي تكون من سطوح ج ي ي ز ز ك ك ح ح ل ل ط، فجسم ه أعظم من هذه المجسمات كلها، فهو إذن أعظم كثيرًا من المجسمات الكائنة من المثلثات التي يحوزها المجسم المكافئ، لأنها بعض تلك الفضلات. فإن جعلنا جسم د مشتركًا، يكون جسما ه د جميعًا أعظم من مجموع المجسمات الكائنة من هذه المثلثات كلها مع جسم د. ولكن جسمي ه د مساويان لمجسم ا ب ج المكافئ،/ إذ كذلك كنا فرضنا. فمجسم ا ب ج المكافئ أعظم من جسم ب - ١٩٣ - و د مع المجسمات الكائنات من المثلثات التي في مجسم ا ب ج المكافئ. فإذا ألقينا المجسمات المشتركة الكائنة من المثلثات المشتركة، بقي جميع المدورات التي في مجسم ا ب ج المكافئ - كم كانت - أعظم من جسم د؛ وهذا محال، لأنّا قد بينا في الشكل الأول أنها أصغر من نصف أسطوانة المجسم المكافئ المساوي لجسم د. فليس المجسم المكافئ بأعظم من جسم د.

1 أنه ... مساويًا: أن مجسم ا ب ج إن لم يكن مساويًا [ب] / فهو: اما [ب] – 2 جسم (الأولى والثانية): مجسم [ص] – 3 جسم: مجسم [ص] / مدورات: نجدها بعد كلمة المكافئ [ب] / ونفصل: ونفضل [ق] / مدور عليه: واحد منها [ب] – 4 أعني نظيره: ناقصة [ب] / عليه: عليها [ب] / نظائرها: المدورات [ب] / فيه: فيه هي [ب] – 5 تكون: يكون [ق] / ج ز ز ح ح ط: رحطجر كلمن بيسل [ب] – 6 ترجع: يرجع [ق] / التي: ناقصة [ا، ص، ق] / على المجسم ... الحادثات: ناقصة [ص] – 6-7 الحادثات فيه: من المدورات الحادثات [ب] – 6-8 التي ... الحادثات: في الهامش [ب] – 8 تنتهي: ينتهي [ق] – 9 نظائرها: نظائرها من المدورات [ب] / جسم ه: جسمها [ص] جسمه [ب] / فجسم ه: فجسمها [ص] فجسم ه [ب] / فلتكن: فليكن [ق] – 10 من: على [ب] / ج ي ... ل ط: عح حف فر كن حب [ب] / فجسم ه: فجسمها [ص] – 11 أعظم ... فهو: ناقصة [ا، ص، ق] / إذن: إذا [ص] / الكائنة: التي تكون [ب] / من: مطموسة [ب] / يحوزها: في [ب] – 12 جميعًا: ناقصة [ب] – 13 مجموع ... هذه: مجسمات [ب] / كلها: ناقصة [ا، ص، ق] / ولكن: وليكن [ب] – 14 إذ كذلك كنا: كما [ب] / كنا: ناقصة [ص] / فرضنا: فرضناه [ص] / جسم: مجسم [ب] – 15 مجسم ا ب ج: المجسم [ب] – 16 بقي: تبقي [ب] / جميع: ناقصة [ب] / كم كانت: ناقصة [ا، ص، ق] – 17 محال: لا يمكن [ب] / في الشكل الأول: ناقصة [ب] – 17-18 نصف ... د: جسم د الذي هو [الذي هو] مساوٍ لنصف أسطوانة المجسم المكافئ [ب].

وإن أمكن أن يكون مجسم ا ب جـ المكافئ أصغر من جسم د، فليكن الفضل بينهما جسم هـ حتى يكون مجسم ا ب جـ مع جسم هـ مثل جسم د. ونقسم أيضًا المدورات التي على مجسم ا ب جـ بنصفين نصفين – كما قلنا – حتى تنتهي الفضلات إلى أصغر من جسم هـ كما بينا. فمجسمات المثلثات/ التي تقع خارج المجسم المكافئ تكون أصغر كثيرًا من جسم هـ، لأنها بعض ص – ١٦٤ – ظ تلك الفضلات. وإن جعلنا مجسم ا ب جـ المكافئ مشتركًا، تكون مجسمات المثلثات التي على المجسم المكافئ، أعني الخارجة عنه، مع مجسم ا ب جـ المكافئ أصغرَ من جسم هـ مع مجسم ا ب جـ المكافئ. ولكن جسم هـ مع مجسم ا ب جـ المكافئ مساويان لجسم د، إذ كذلك كنا/ فرضنا؛ ومجسمات المثلثات التي على المجسم المكافئ مع المجسم المكافئ هي المدورات التي على ق – ١٩٠ – ظ المجسم المكافئ. فالمدورات التي على المجسم المكافئ أصغر من جسم د؛ وهذا محال، لأنا قد بينا في الشكل الأول أنها أعظم من نصف أسطوانة مجسم ا ب جـ المكافئ المساوي / لجسم د. فمجسم ا – ١٢٩ – و ا ب جـ المكافئ ليس بأصغر من جسم د؛ وقد بينا أنه ليس بأعظم منه، فمجسم ا ب جـ المكافئ مساوٍ لجسم د الذي هو مثل نصف أسطوانته. فكل مجسم مكافئ فإنه مساوٍ لنصف أسطوانته؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

وقد استعملنا في هذا الشكل: أنه إذا كان مقداران مختلفان وفُصل من أعظمهما / نصفُه ص – ١٦٥ – و ومن نصفه الباقي نصفه وفعل ذلك دائمًا، فإنا سننتهي إلى مقدار ما أصغر من المقدار الأصغر. فالمقدار الأعظم هاهنا هو مجموع فضلات المدورات التي على المجسم المكافئ على نظائرها التي فيه، وهي التي قسمت بنصفين نصفين، والمقدار الأصغر هو جسم هـ. وقد بيّن أوقليدس أنه إذا فصل من الأعظم أكثر من نصفه ومما يبقى أكثر من نصفه وفعل ذلك دائمًا، فإنه سيُنتهى إلى مقدار أصغر من الأصغر. والبرهان على هذا وذاك واحد. وإذا كان الأمر على ما وصفنا، فكان الأوْلى أن يقول: إذا كان مقداران مختلفان وفصل من أعظمهما ما ليس بأقل من نصفه ومما يبقى ما ليس

2 مع ... د: المكافئ مساويًا لجسم د [ب] – 3 كما قلنا: ناقصة [ا، ص، ق] / تنتهي: ينتهي [ق] / كما بينا: ناقصة [ا، ص، ق] – 4 تقع: يقع [ق] / تقع خارج: على [ب] / تكون: يكون [ق] – 5 التي: ناقصة [ب] – 6 أعني الخارجة عنه: ناقصة [ب] / مجسم ا ب جـ: المجسم [ب] – 7 مجسم ا ب جـ: المجسم [ب] / مساويان: مساوٍ [ا، ص، ق] / إذ كذلك كنا: كما [ب] – 9 د: هـ [ب] – 10-9 في الشكل الأول: ناقصة [ب] – 10 أسطوانة: في الهامش مع خط آخر [ص] / المساوي: الذي هو مساوٍ [ب] – 12 فكل ... أسطوانته: المجسم المكافئ فكل مجسم مكافئ فهو نصف الأسطوانة التي لذلك المجسم المكافئ [ب] / مكافئ: مكاف [ا، ص، ق] – 13 أن نبين: ناقصة [ب] – 15 نصفه (الأولى): ناقصة [ب] / فإنا: فإنه [ب، ص] / سننتهي: ينتهى [ب] / ما: ناقصة [ا، ص، ق] – 16 نظائرها: المدورات [ب] / فيه: فيها [ق] – 17 بين: تبين [ب] / أوقليدس: أقليدس [ب] – 18 أكثر: ناقصة [ب] أكبر [ق] / أكثر: أكبر [ق] / سينتهى: ينتهي [ب] – 19 هذا وذاك: ذلك [ب] ذلك وهذا [ص] – 20 يبقى: يبقا [ا].

بأقل من نصفه وفعل ذلك دائمًا، فإنه سيُنتهى إلى مقدار أصغر من المقدار الأصغر حتى يكون البرهان / عامًا. والله ولي التوفيق. ب - ١٩٣ - ظ

تمت الرسالة لأبي سهل القوهي في مساحة المجسم المكافئ.

1 سينتهى: ينتهى [ب] - 2 ولي التوفيق: الموفق [ب] - 3 القوهي: الكوهي [ا] / تمت ... المكافئ: تمت الرسالة والحمد لله وحده [ب، ص] ونجد بعدها: «وصلواته على نبيه محمد وآله الطاهرين وفرغت من تعليقها بالموصل المحروسة في صفر من شهور سنة ٦٣٢» [ب]؛ «والحمد لله وحده والصلوة والسلام على من لا نبي بعده وعلى آله وأصحابه أجمعين، في ليلة يسفر صباحها عن نهار الاثنين خامس عشر ذي القعدة سنة تسع وخمسين ومائة وألف من هجرة من له العزّ والشرف، تم» [ق].

١٣٥ – ظ

٥-٣-٢ كتاب مساحة المجسم المكافئ

لأبي سهل ويجن بن رستم القوهي

وهو مقالة واحدة وثلاثة أشكال

صدر

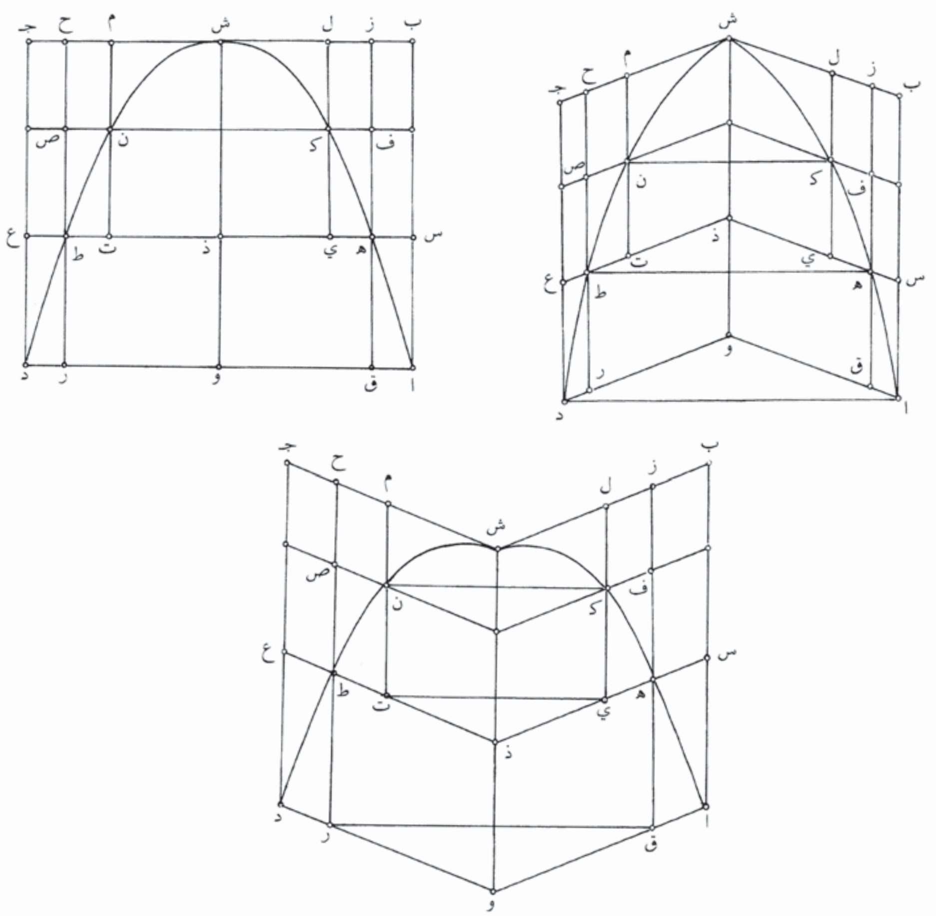
إذا دارت قطعة قطع مكافئ يحيط بها قوس القطعة وقطرها ونصف قاعدتها مع السطح المتوازي الأضلاع الذي يحيط به قطر القطعة ونصف قاعدتها مع خطوط ترتيب ذلك القطر ومع الخطوط الخارجة من أطرافها موازية لذلك القطر حول ذلك القطر حتى ترجع إلى حيث بدأت، فالمجسم الحادث من دور القطعة هو المجسم المكافئ، وذلك القطر قطره، والمجسم الحادث من دور السطح المتوازي الأضلاع المذكور هو أسطوانة المجسم المكافئ، والسطوح الحادثة من دور خطوط الترتيب هي سطوح ترتيب المجسم المكافئ، والمجسمات الحادثة بينها هي مدوّرات المجسم المكافئ: فما كان منها حادثًا من سطح متوازي الأضلاع جميعه داخل القطع وزاوية منه على محيطه هو المدور الذي في المجسم المكافئ، وما كان منها حادثًا من سطح متوازي الأضلاع يقع بعضه خارج القطع وزاوية منه على محيطه هو المدوّر الذي على المجسم المكافئ. فإن كان أحدهما منفصلاً من الآخر، فهما نظيران. والمجسم الحادث من دور أحد السطوح حول ذلك القطر هو مجسم ذلك السطح وهو الكائن من ذلك السطح سواء كان أسطوانة وطوقًا أو غير ذلك.

8 ترجع : يرجع.

– آ – كل نصف أسطوانة مجسم مكافئ، فهو أصغر من جملة المدورات التي عليه وأعظم من جملة المدوّرات التي فيه.

ليكن مجسم مكافئ عليه ا ش د وأسطوانته ا ب ج د والمدورات التي عليه ا س ع د ه ف ص ط ك ل م ن والمدورات التي فيه ق ه ط ر ي ك ن ت.

فأقول: إن نصف أسطوانة ا ب ج د أصغر من جميع مدوّرات ا س ع د ه ف ص ط ك ل م ن التي عليه كم كانت، وأعظم من جميع مدورات ق ه ط ر ي ك ن ت التي فيه كم كانت.



برهان ذلك: أن نجعل القطر ش ذ و، فنسبة و ش إلى ش ذ كنسبة مربع ا و إلى مربع هـ ذ خطي الترتيب، أعني نسبة مربع ا د إلى مربع هـ ط، أعني نسبة الدائرة التي قطرها ا د إلى الدائرة التي قطرها هـ ط. فأسطوانة ق ز ح ر المرسومة / بدور سطح ق ز ش و حول قطر ش و ١٣٦ – و مساوية لأسطوانة س ب جـ ع المرسومة بدور سطح س ب ش ذ حول قطر ش و، سواء كان ش و سهمًا أم لا، لأن زيادة ما يحدث على الأسطوانة في أحد طرفيها بقدر النقصان من الطرف الآخر. ويلقى أسطوانة هـ ز ح ط المشتركة، فيبقى المجسم الحادث بدوران أحد سطحي س ب ز هـ ط ح جـ ع كمدور ق هـ ط ر، فهو أصغر من مدور ا س ع د. فالمجسم المذكور ومدور ا س ع د، أعني فضل أسطوانة ا ب جـ د على أسطوانة هـ ز ح ط، أصغر من ضعف مدور ا س ع د الذي على المجسم المكافئ. وكذلك يتبيّن أن فضل أسطوانة هـ ز ح ط على أسطوانة ك ل م ن أصغر من ضعف مدور هـ ف ص ط. وكذلك جميع الأساطين والمدورات النظائر – لما ذكرنا – حتى ينتهى إلى البقية التي تبقى من آخر أسطوانة ا ب جـ د، وليكن تلك البقية مجسم ك ل م ن. ففضل أسطوانة ا ب جـ د على مجسم ك ل م ن أصغر من ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ سوى مجسم ك ل م ن. فجميع أسطوانة ا ب جـ د أصغر من مجسم ك ل م ن مع ضعف جميع المدورات التي على المجسم المكافئ، فنصف أسطوانة ا ب جـ د أصغر من جميع المدورات المذكورة مع نصف مجسم ك ل م ن، فهو أصغر بكثير من جميع المدورات المذكورة مع مجسم ك ل م ن.

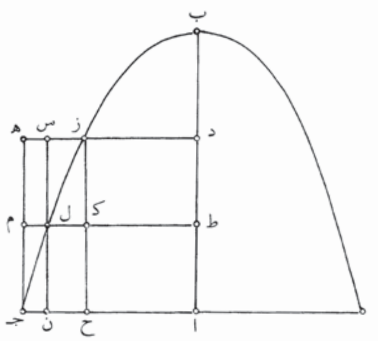
وأيضًا، فالمجسم المرسوم بدور أحد سطحي ا ب ز ق ر ح جـ د أعظم من المجسم المرسوم بدور أحد سطحي س ب ز هـ ط ح جـ ع، أعني مدور ق هـ ط ر. فالمجسم المرسوم بدور أحد سطحي ا ب ز ق ر ح جـ د مع مدور ق هـ ط ر، أعني فضل أسطوانة ا ب جـ د على أسطوانة هـ ز ح ط، أعظم من ضعف مدور ق هـ ط ر. وكذلك يتبين أن فضل أسطوانة هـ ز ح ط على مجسم ك ل م ن أعظم من ضعف مدور ي ك ن ت، وكذلك جميع الأساطين والمدورات النظائر – لما ذكرنا – حتى ينتهى إلى البقية التي تبقى من آخر أسطوانة ا ب جـ د، وليكن تلك البقية مجسم ك ل م ن. ففضل أسطوانة ا ب جـ د على مجسم ك ل م ن أعظم من ضعف المدورات التي في المجسم المكافئ جميعها. فأسطوانة ا ب جـ د كلها أعظم كثيرًا من ضعف المدورات التي في المجسم المكافئ جميعها. فنصف الأسطوانة أعظم من جميع المدورات التي في المجسم المكافئ، وكان / أصغر من جميع المدورات التي عليه؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ١٣٦ – ظ

1 ش ذ و: ش ذ – 11 تبقى: يبقى – 21 تبقى: يبقى.

– ب – إذا خرج في مدور من المدورات سطح من سطوح الترتيب على موازاة سطحي الترتيب اللذين يحدان المدور، فقسم المدور نصفين وحدث بذلك مدوران على المجسم المكافئ ⟨و⟩نظيران لهما فيه، ففضل المدورين الحادثين عليه على نظيريها الحادثين فيه كنصف فضل المدور المقسوم الذي على المجسم المكافئ على نظيره الذي هو في المجسم المكافئ.

ليكن مجسم مكافئ حدث عن دوران قطعة ب جـ من القطع المكافئ وخط ترتيب ا جـ حول قطر ا ب وحدث عليه مدور ا د هـ جـ عن دور سطح ا د هـ جـ المتوازي الأضلاع ونظيره مدور ا د ز ح عن دور سطح ا د ز ح. وخرج خط ترتيب ط ك ل م يوازي خطي د هـ ا جـ ويقسم خطي ا د هـ جـ نصفين. وخرج سطح على خط ط م من أسطحة الترتيب يوازي سطحي د هـ ا جـ اللذين هما على الترتيب، فقسم مدور ا د هـ جـ نصفين وحدث مدورا ا ط م جـ ط د س ل على المجسم ونظيران فيه عليها ا ط ل ن ط د ز ك.

فأقول: إن فضل مدوري ا ط م جـ ط د س ل على مدوري ا ط ل ن ط د ز ك كنصف فضل مدور ا د هـ جـ على مدور ا د ز ح.



برهان ذلك: أن نخرج من نقطة ل خط س ل ن يوازي خطي ا د هـ جـ. فلأن خط ط ك ل م يقسم ا د وموازياته أنصافًا، يكون سطح ك ل س ز نصف سطح ز س ن ح، ويكون سطح ن ل م جـ نصف سطح ن س هـ جـ، فالمجسمات الحادثة عن دورانها كذلك. فالمجسم

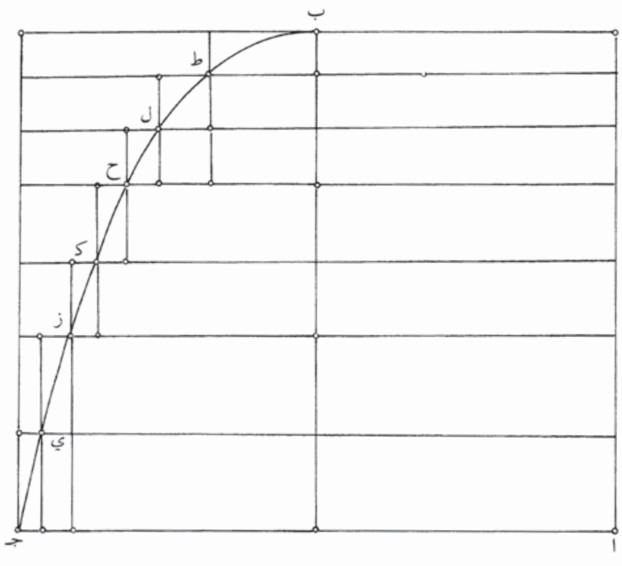
2 اللذين: الذين – 9 اللذين: الذين.

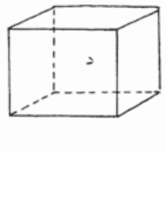
الحادث عن دوران سطح ك ل س ز نصف الحادث عن دوران سطح ز س ن ح، والحادث عن دوران ن ل م جـ نصف الحادث عن دوران ن س هـ جـ. فالحادثان عن دوران ك ل س ز ودوران ن ل م جـ، أعني فضل مدوري ط د س ل ا ط م جـ على مدوري ط د ز ك ا ط ل ن نصف الحادث عن دوران ح ز هـ جـ، أعني فضل مدورا د هـ جـ على مدورا د ز ح؛ وذلك ما أردناه.

– **جـ** – المجسم المكافئ كنصف أسطوانته.

ليكن مجسم مكافئ عليه ا ب جـ.

فأقول: إنه كنصف أسطوانته.





برهان ذلك: أنه إن لم يكن كذلك، فليكن مجسم اب ج أعظم من نصف أسطوانته بقدر مجسم د. ونعمل على مجسم اب ج مدورات كم كانت، ونفصل منها نظائرها التي في المجسم. وليكن فضلات ما بين المدورات التي عليه ونظائرها التي فيه / هي المجسمات الحادثة من دوران ١٣٧ – و أسطحة ج ز ز ح ح ط، ونقسم كل واحد من المدورات نصفين بأسطحة الترتيب، فيبقى فضلات المدورات على نظائرها نصف الفضلات التي كانت قبل القسمة، كما تبين في الشكل الثاني. ونفعل ذلك دائمًا حتى تبقى فضلات هي أصغر من مجسم د، فليكن تلك الفضلات هي المجسمات الحادثة عن دوران أسطحة ج ي ي ز ز ك ك ح ح ل ل ط، ⟨ف⟩مجسم د أعظم من هذه المجسمات، فهو أعظم بكثير من المجسمات التي في المجسم المكافئ الحادثة من دوران المثلثات التي في القطع المكافئ التي خطوطها من خطوط الترتيب ومن موازيات القطر ومن محيط القطع. ونصف الأسطوانة أعظم من المدورات التي في المجسم المكافئ، فنصف الأسطوانة مع مجسم د، أعني المجسم المكافئ، أعظم من المدورات التي في المجسم المكافئ ⟨مع المجسمات⟩ الحادثة من دوران المثلثات، أعني المجسم المكافئ. فالمجسم المكافئ أعظم من نفسه، خلف.

ثم ليكن مجسم اب ج المكافئ أصغر من نصف أسطوانته بقدر مجسم د، فيكون المجسم المكافئ ومجسم د كنصف الأسطوانة. وننصف المدورات التي على المجسم المكافئ أبدًا حتى يبقى فضلات أصغر من مجسم د، فيكون مجسمات المثلثات التي تقع خارج المجسم المكافئ أصغر بكثير من مجسم د. فهذه المجسمات الحادثة عن المثلثات مع مجسم اب ج المكافئ، أعني المدورات التي على المجسم المكافئ، أصغر من مجسم د مع مجسم اب ج، أعني نصف الأسطوانة. فالمدورات التي على المجسم المكافئ أصغر من نصف الأسطوانة، خلف. فالمجسم المكافئ كنصف أسطوانته.

تمّ في يوم السبت المبارك غرة شهر ربيع الأول
سنة ثلاث وخمسين ومائة وألف
بقلم الفقير الحاج مصطفى صدقي
عفي عنه./

15 تقع: يقع.

الفصل السادس

ابن السَّمْح

القطوع المُستَوية للأسطوانة وتحديد مساحاتها

٦ـ١ مقدِّمة

٦ـ١ـ١ ابن السَّمْح وابن قرّة وريثا الحسن بن موسى

تـُوفـِّيَ أبو القاسِم أصْبَغ بن مُحمَّد بن السَّمْح في غرناطة يوم الثلاثاء، في الليلة الثانية عشرة الباقية من رجب، سنة أربع مائة وستّاً وعشرين، وعمره ستّ وخمسون سنة شمسيّة[١]، أيْ يوم الثلاثاء في ٢٧ أيّار سنة ١٠٣٥[٢]، وهذا ما يجعل تاريخَ ولادته في سنة ٩٧٩ ميلاديّة. وكان أصله من قرطبة؛ ولقد انتقل، كما يبدو، إلى غرناطة بقرب الأمير حَبّوس بن ماكسَن [حوالى ١٠١٩-١٠٣٨]. ونحن نعلم أيضاً أنّه كان تلميذاً لعالم الفلك والريّاضيّ المشهور مسلمة المجريطي، المتوفّى سنة ١٠٠٧/٣٩٨-١٠٠٨. لقد ترك ابن السَّمْح، وهو المعاصر لرياضيّين مثل ابن الهيثم، هو أيضاً أعمالاً أساسيّة ومُهِمَّة في الرياضيّات والفلك. يظهر بوضوح من العناوين التي أوردها صاعِد الأندلسيّ[٣] أنّه اهتمَّ بنظريّة الأعداد والهندسة وهندسة الأسطرلاب، وما إليه. ونجد له شرحاً لكتاب "الأصول" لأقليدس، كما نجد "كتابه الكبير في الهندسة قَصَى منها أجزاءها من الخطّ المستقيم والمقوَّس والمنحني"[٤].

وهذا ما يُبيِّن أنَّ هذا الكتاب الكبير كان يتضمَّن فصولاً حول الأشكال المستقيمة والدوائر والأقواس والمنحنيات المخروطيّة؛ وربَّما تضمَّن، أيضاً، مواضيع أخرى. ولكنَّ هذا الكتاب

---

[١] لقد أعطى المؤرِّخُ ابن جمعة هذا التاريخ، وفقاً لما ذكره لسان الدين بن الخطيب في "الإحاطة في أخبار غرناطة"، نشر محمّد عبد الله عِنان(القاهرة ١٩٥٥)، ص. ٤٣٦. انظر أيضاً: صاعِد الأندلسي، طبقات الأمَم، نشر هـ. بوعلوان(بيروت ١٩٨٥)، ص. ١٧٠. انظر أيضاً الترجمة الفرنسية لهذا الكتاب: ر. بلاشير(*R. Blachère, Livre des catégories des Nations, Paris 1935*)، ص. ١٣٠-١٣١. انظر أيضاً : ابن الأبّار : التكملة لكتاب الصلة، نشر السيّد عزَّت العطّار الحسيني(القاهرة ١٩٣٥)، المجلّد الأوَّل، ص. ٢٠٦-٢٠٧؛ انظر أخيراً: ابن أبي أصيبعة، عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء، نشر أ. مولّر (*A. Müller*)، ثلاثة مجلّدات(القاهرة/ كونيغسبرغ،١٨٨٢-١٨٨٤)، المجلّد الثاني، ص. ٤٠، ٤-٦؛ وكذلك نشرة رضا(بيروت ١٩٦٥)، ص. ٤٨٣-، ٢٣-٢٥.

[٢] هذا يعني أنّه تبقى من شهر رجب سنة ٤٢٦ للهجرة اثنتا عشرة ليلة كاملة، فيكون هذا التاريخ موافقاً، وفقاً لطريقة الحساب، لـِ ٢٧ أو ٢٨ أيّار سنة ١٠٣٥؛ فيتوجَّب أن نختار تاريخ ٢٧ أيّار ١٠٣٥ لأنّه يوم الثلاثاء.

[٣] انظر الحاشية رقم ١.

[٤] هذا ما نقرأه في "طبقات الأمم" لصاعد الأندلسي، نشر بوعلوان، ص. ١٧٠.

هو الوحيد من بين الكتب التي ذكرها كُتّاب السِّيَر القدامى والمؤرِّخون، أو بشكل أبسط، من بين الكتب التي نعرفها والتي نتوقّع أن تحتوي على دراسة حول الأسطوانة وقطوعها. إلا إذا كان ابن السَّمح قد كتب كتاباً آخر في الهندسة في نفس مجال هذا الكتاب، فإنّ من الأرجح أنَّ يكون النصُّ العِبْريُّ قد اقتبُس من هذا "الكتاب الكبير". إنَّ لدينا حجَّة إضافية، مأخوذة من هذه الترجمة العِبْرِيّة، لدعم هذا التخمين.

وذلك أنَّ هذه النُسخة العِبْرِية تُظهِر لنا ابن السَّمْح يُعالِج مواضيع لا تلبث، بعد الإعلان عنها، أن تختفي. يبدأ النصُّ بتعريف الكرة، كما أورده أقليدس في كتاب "الأصول"؛ فيتوقّع المرء أن يجد دراسة للكرة؛ ويرجع ابن السَّمح، بالفعل، فيما بعد (في الفقرة التاسعة)، إلى هذا الموضوع ليَعِدَ بمعالجة "السطوح الكرويّة" و"أحجام هذه الأكر". ولكنّا نبحث بدون جدوى عن أثر لهذه المسائل في النصّ العبريّ الذي وصل إلينا. والمثل الآخر الذي نورده حول هذه السهوات يخصُّ المخروط. يبدأ ابن السَّمح بتقديم تعريف المخروط وفقاً لأقليدس، ثمَّ يعود بعد ذلك (في الفقرة الرابعة) ليُقدِّم "التعاريف الأولى" للمخروط القائم وللمخروط المائل وفقاً لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس. وهذه هي، من ناحية أخرى، الإشارة الوحيدة لأبلونيوس في هذا النصّ. ولكنَّ كلَّ هذه التعاريف لا تتوافق مع شيء في النصّ الذي نقله إلينا التقليد العِبريُّ. تشكّل هذه "النواقص" إشارات إلى المواضيع التي عولِجَت في "الكتاب الكبير في الهندسة"، إلى جانب دراسة الأسطوانة. وهكذا يكون قد وُجِد في هذا الكتاب فصلٌ حول الدائرة، وفصل آخر حول الكرة، وآخر حول المخروط؛ وهذه الفصول شبيهة بالفصل الذي كرَّسه ابن السَّمْح لدراسة الأسطوانة. يُلقي الضوءَ هذا التخمينُ، لو كان صحيحاً، على سمة لكتاب ابن السَّمْح هذا: وهي ميله إلى تحرير الأعمال الريّاضيّة التي هي تجميع لنتائج معلومة، دون أن يتنافى ذلك مع البحث الأصيل. نجد هذا المظهر لأعمال ابن السَّمْح عند ريّاضيّين آخرين في إسبانيا الإسلاميّة، مثل ابن هود (المتوفّى سنة ١٠٨٥/٤٧٤)، في سرقوسة. ويسمح هذا التخمين أيضاً، لو كان صحيحاً، بالتحقّق من وجود مُدَوَّنة قد يكون استُخرِج منها النصُّ الذي تُرجِم إلى العِبْرِيّة؛ وهذه المُدوَّنة ليست في هذه الحالة سوى هذا "الكتاب الكبير في الهندسة".

يُعالِج النصُّ المتـرجَم مسألة الأسطوانة والقطوع الناقصة، أيْ نفس الموضوع الذي كان قد دُرِس من قِبَل أحد الإخوان بني موسى الثلاثة، وهو الحسن، ثمَّ من قِبَل ثابت بن قرَّة في الكتاب الذي نـُحقّقه هنا "في قطوع الأسطوانة"...ولنذكّر بأنَّ ابن قرة قد استند إلى كتاب الحسن. والسؤال الذي يطرح نفسه، إذاً، هو الآتي: هل ينتمي ابن السَّمْح إلى هذا التقليد؟ وفي أيّ مكان يُمكننا أن نضعه؟

وإذا تفحَّصنا كتابه وقابلناه بكتاب ابن قرّة (إذ إنَّ كتاب الحسن بن موسى ما زال مفقوداً)، نميل إلى الاستنتاج أنَّ ابن السَّمْح لم يكن مطَّلعاً على كتاب بن قرّة وأنَّ النقاط المشتركة بينهما إذا كانت موجودة فإنّها صادرة عن كتاب الحسن. وذلك أنَّ كلَّ الدلائل تـُشير، كما سنبيِّن، إلى أنَّ ابن السَّمْح استند إلى هذا الكتاب الأخير، وبقي منه قريباً إلى حدّ يفوق ما فعله ثابت بن قرَّة نفسه.

لنذكّر، في أوَّل الأمر، بما يُفرِّق بين ابن السَّمْح وابن قرّة: لا يتطابق مشروعاهما كما تختلف مصطلحاتهما العلمية وطرائقهما. ينطلق ابن السَّمْح من التعريف الذي يستند إلى البؤرتين ليُثبت أنَّ الشكلَ الذي نحصل عليه بواسطة هذا التعريف، له نفس خواصّ القطع الناقص الذي نحصل عليه بالقطع المستوي للأسطوانة. أمّا ثابت بن قرَّة فإنّه يُعِدُّ نظريّة الأسطوانة وقطوعها المستوية مستوحياً من طريقة أبلونيوس في حالة المخروط والقطوع المخروطية. تتضمَّن مصطلحات ابن السَّمْح عبارات غير موجودة ضمن مصطلحات ثابت بن قرّة، مثل عبارة "الشكل الدائري المستطيل" للدلالة على التعريف الذي يستند إلى البؤرتين؛ وكذلك تتضمَّن مصطلحات ثابت بن قرّة عباراتٍ غيرَ موجودة ضمن مصطلحات ابن السَّمْح. وذلك أنَّ مصطلحات ثابت بن قرّة هي مصطلحات كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، وهذا ما هو إجمالاً غير صحيح عند ابن السَّمْح في هذا الفصل. يترافق هذا التقارب في المصطلحات مع كتاب "المخروطات" بتقارب في المفاهيم. وإذا اكتفينا بمثال وحيد، نـُذكّر بأنَّ ثابت بن قرّة درس حالة القطع المستوي لأسطوانة مائلة ذات قاعدة دائريّة بواسطة مُسْتـَوٍ مُخالِف في الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة، مثلما فعل أبلونيوس بخصوص المخروط؛ وذلك أنَّ هذه الفكرة والعبارة التي تـُعبِّر عنها غائبتان في كتاب ابن

السَّمْح. وتـُخبرنا هذه الاختلافات بمزيد من المعلومات؛ فهي تـُميِّز نصَّ ثابت بن قرّة عن نصّ زميله الأكبر وأستاذه الحسن بن موسى، وفقاً للوصف الذي قدَّمه أخوا الحسن والذي أوردناه أعلاه[٥]. يبدو كلُّ شيء واضحاً : لقد استند ابن السَّمْح، كما فعل ثابت بن قرّة قبله، إلى كتاب الحسن بن موسى، مع فارِق واحد ولكنّه أساسيّ : فبينما عدَّل ثابت بن قرَّة مشروعه على ضوء كتاب أبلونيوس "المخروطات"، تابع ابن السَّمْح تنفيذ مشروعه في نفس الميدان. ولنـُذَكِّر بأنَّ الحسن بن موسى، وفقاً لشهادة أخويه نفسيهما، قد قام بالبحث حول الأسطوانة وقطوعها "تحضيراً لعلم المخروطات"[٦].

لقد أراد ثابت بن قرّة، كما بيّنّا، أن يُطوِّر، بالمقابِل، نظريّة مستقلَّة للأسطوانة وقطوعها، على مثال نظريّة المخروط وقطوعه لأبلونيوس. أمّا ابن السَّمْح، فقد تابع البحث، في هذا الفصل الذي وصل إلينا، في الأسطوانة ليدرس القطوع الناقصة. وهكذا يكون هذا الأندلسيُّ الذي كان ما يزال على قيد الحياة في العقود الأولى من القرن الحادي عشر، وهو الأكثر بعداً والأكثر تأخـُّراً، أكثر قرباً إلى الحسن بن موسى، بالنسبة إلى ثابت بن قرّة الذي كان معاوناً ومواطناً للحسن بن موسى. ولكن يبقى، بين مؤلَّف ثابت بن قرّة وفصل ابن السَّمْح مسار ضيِّقٌ قد يسمح لنا بالتعرُّف عن بُعد على بعض المواضيع المدروسة في مؤلَّف الحسن ابن موسى هذا، الرئيسيّ والمفقود للأسف، كما قد يخبرنا عن كيفية اطلاع ابن السَّمْح على هذا المؤلّف.

٦-١-٢ سيرينوس أنطينوي، الحسن بن موسى، ثابت بن قرَّة وابن السَّمْح

نجدُ، من بين التعاريف التي يُعطيها ابن السَّمْح في بداية نصِّه، تعريفَ الأسطوانة المائلة ذات القاعدة الدائريّة. وهذا التعريف، كما يُمكن أن نتحقّق من ذلك، مشابِه لتعريف ثابت بن قرّة. ولكنَّ هذا التعريف موجودٌ أيضاً في كتاب سيرينوس أنطينوي "في قطع الأسطوانة"[٧].

---

[٥] انظر الفصل الأوَّل ص. ٣٠-٣١.

[٦] انظر : بنو موسى: مقدِّمات كتاب المخروطات، الفصل الأوَّل ص. ٣٠-٣١.

[٧] انظر : Sereni Antinoensis Opuscula. Edidit et latine interpretatus est J. L. Heiberg(Leipzig, 1896)؛ انظر أيضاً الترجمة الفرنسية لِـ فير إيك(باريس، ١٩٦٩):

SERENUS D'ANTINOË : Le Livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône P. Ver Eecke =

ما هي العلاقات بين هذه المؤلَّفات الثلاثة؟ وما هو الدور المُحتمَل الذي لعبه الحسن بن موسى في المقابلة بين بعضها البعض؟ يمكن أن نـُعطي بعض عناصر الإجابة عن هذه الأسئلة؛ نجد من بين هذه العناصر ما هو مؤكّد تماماً، بينما نجد البعض الآخر غير مؤكّد. وهكذا نعلم أنَّ ابن السَّمْح لم يكن مُطـّلعاً، دون شكٍ، على كتاب سيرينوس، كما أنَّ ثابت بن قرّة كان بشكل مؤكّد جيِّد الاطـّلاع عليه. أمّا بخصوص الحسن بن موسى، فإنّه لا يُمكننا بسبب فقدان نصِّه إلا أن نـُخمِّن أنّه كان مُطـَّلِعاً بشكل مباشر أو غير مباشر على كتاب سيرينوس، ولكنّه لم يستخدمه بشكل مُعمَّق. لم تـُطرَح هذه الأسئلة أبداً قبل الآن؛ وهي تستأهل أن نجازف ببعض الاستطرادات.

يبدأ كتاب سيرينوس، "في قطع الأسطوانة"، بالتعاريف الخاصَّة بالسطوح الأسطوانيّة وبالأسطوانة ذات القاعدة الدائريّة. توجد التعاريف الثلاثة الأولى[٨] ثانية في مقدّمة ثابت بن قرّة، مع بعض الاختلافات. يُعرِّف سيرينوس الخطَّ المولِّد بأنّه الخطُّ "الذي، لكونه مستقيماً وعلى سطح الأسطوانة، يمسُّ كلاً من القاعدتين"؛ ويُضيف، إلى ذلك، أنَّ الخطَّ المولِّد هو أيضاً الخطَّ المتحرِّك، أو وفقاً لعباراته، "هو أيضاً الخطَّ الذي يجري فيرسم، كما قلنا، السطحَ الأسطواني"[٩]. وهذه الجملة الأخيرة هي التي يستخدمها ثابت بن قرَّة كتعريف؛ ولكنّه يُبرهن بعد ذلك أنَّ الخطَّ المولّد موازٍ للمحور وأنَّ الخطوط الوحيدة الموجودة على السطح الأسطواني هي الخطوط المولّدة. ويطرح سيرينوس، في القضيّة السابعة، المسألة التالية: أخرِج الخطّ المولّد الذي يمرُّ بنقطة معلومة؛ ثم يُبيِّن، في القضيّة الثامنة، أنَّ الخطَّ الذي يصل بين نقطتين من الأسطوانة غير موجودتين على نفس الخطّ المولّد يقع داخل الأسطوانة، فلا يكون على سطحها. تتشابه هاتان القضيتان على التوالي مع القضيّتين الأولَيَيْن لثابت بن قرّة.

= ها هو فيما يلي تعريف الأسطوانة الذي نجده في ترجمة فير إيك، ص. ٢-٣: "إذا بقيت دائرتان متساويتان متوازيتين وثابتتين، وإذا كان قطران لهاتين الدائرتين متوازيين على أن يدور كلّ واحد منهما في مستوي كل من الدائرتين حول المركز الذي يبقى ثابتاً، في حين يدور معهما الخطّ الذي يصل بين طرفي القطرين الموجودين من نفس الجهة، إلى أن يرجع إلى نفس الوضع، فإنَّ السطح الذي يرسمه هذا الخطّ في دورته يُسمَّى السطح الأسطواني...".

[٨] انظر المرجع السابق.

[٩] انظر المرجع السابق، ص. ٣.

يقدِّم سيرينوس، أيضاً، أربعة تعاريف، وفقاً لأبلونيوس، للأقطار والأقطار المرافقة والمركز والقطوع الناقصة المتشابهة؛ وهذه التعاريف غير موجودة في مقدِّمة ثابت.

يدرس سيرينوس، في القضيّتين الثانية والثالثة، القطوع المستوية للأسطوانة القائمة والمائلة، باستخدام مستوٍ مارٍّ بالمحور أو موازٍ له؛ فتكون هذه القطوع متوازيات للأضلاع. يوضِّح ثابت بن قرّة، في نهاية القضيّة الرابعة، أنَّ الأسطوانة، إذا كانت قائمة، يكون القطع مستطيلاً؛ ثمَّ يُثبت، في القضيّتين الخامسة والسادسة، شرطاً لازماً وكافياً لكي يُصبح متوازي الأضلاع مستطيلاً، في حالة الأسطوانة المائلة. ولا نجد عند سيرينوس أية فكرة خاصَّة بالمستطيل.

يُعرِّف ثابت بن قرّة، كما رأينا الإسقاطَ الأسطواني (الانسحاب) لشكل في مستوٍ P على مستوٍ P' موازٍ للمستوي P، ثمَّ يستخرج من ذلك، في القضيّة الثامنة، القطعَ المستويَ الحاصلَ في مستوٍ موازٍ لقاعدة الأسطوانة، وهو القطع المستويُ الذي يدرسه سيرينوس، في القضيّة ٥، مستخدِماً قضيّته الثانية ومقدِّمة مبرهنة في القضيّة الرابعة يُثبت فيها "معادلة الدائرة".

لقد درس سيرينوس القطعَ المخالِف في الوضع لمستوي القاعدة، في القضيّة السادسة، كما درسه ثابت بن قرّة، بنفس الطريقة، في القضيّة التاسعة. وهما يقومان بذلك بواسطة "معادلة الدائرة".

يدرس ثابت القطع بواسطة مستوٍ يقطع المحورَ دون أن يكون موازياً لمستوي القاعدة ودون أن يكون مخالفاً في الوضع بالنسبة إلى مستوى القاعدة؛ وهو يُطبِّق الإسقاط الأسطوانيَّ ليبيِّن في القضيّة العاشرة أنَّ هذا القطع دائرة أو قطعٌ ناقصٌ، كما يُبيِّن في القضيّة الحادية عشرة أنَّ هذا القطع قطعٌ ناقصٌ بالضرورة. يقوم سيرينوس بنفس الدراسة في القضايا ذات الأرقام ٩ إلى ١٧؛ وهو يبيِّن في البداية أنَّ هذا القطع ليس دائرة ولا مُرَكّباً من خطوط؛ ثُمَّ يُظهِر القطرَ الرئيسيّ Δ (الذي يُصبح المحور الأعظم في حالتين) والقطر الثاني Δ' الذي هو القطر المرافِق للقطر Δ، كما يُبيِّن خواصّ نقاط القطع الناقص بالنسبة إلى Δ وبالنسبة إلى Δ'، إلى أن يصل، في القضيَّتين ١٧ وَ ١٨، إلى القضيّة ١٥ لأبلونيوس، بعد أن يُعرِّف الضلع القائم المُرفـَق بالقطر المُجانِب. فيكون القطع قطعاً ناقصاً.

ونلاحِظ هنا بداية الاختلاف بين المسارين بسبب تطبيق ثابت بن قرّة الواضح للإسقاطات الهندسيّة. إذ إنّنا نصل هنا إلى النقطة التي ينفصل فيها ثابت بن قرَّة عن سيرينوس؛ وذلك أنَّ هذا الأخير بعيدٌ جدّاً عن هذه الهندسة حيث تشكّل الإسقاطات والتحويلات أدواتٍ مُهِمَّة فيها، حتّى ولو أنّنا يُمكن أن نستشِفَّ بين السطور، في قضيّته الأولى، فكرة الانسحاب. وهكذا أصبح الافتراقُ، بدءاً من هذه النقطة، انقطاعاً، إذ لم يَعُد ثابت وسيرينوس يُعالجان نفس المسائل.

أمَّا ابن السَّمْح، فإنّه يضع نفسه، انطلاقاً من القضيّة السابعة، في حالة الأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائريّة، حيث يُصبح القطرُ الرئيسيُّ Δ المحورَ الأعظمَ، ويُصبِح القطر الثاني المحور الأصغر Δ'. ويستخدِم ابن السَّمْح، انطلاقاً من القضيّة السابعة، المحوريْن في كلّ القضايا. يُمكن، بشكل واضح، أن نضع قطعاً ناقصاً ذا محورين 2a وَ 2b (مع $a > b$) على أسطوانة قائمة ذات نصف القطر b، وهذا ما يستخدمه ابن السَّمْح في القضايا ٧ وَ ١٠ وَ ١٩. أمَّا سيرينوس فهو يُبيِّن في القضيّتين ٢٧ وَ ٢٨ أنّه يوجَد على أسطوانة قائمة ذات نصف القطر b، فصيلتان من القطوع الناقصة لها المحور الأعظم 2a (مع $a > b$).

تسمح هذه التشابهات بأن نبيِّن أنَّ ثابت بن قرّة كان يستخدِم كتاب سيرينوس في هذه الدراسة. وكان لمعرفته بكتاب "المخروطات" مفعولٌ مُزدَوِجٌ متناقض، إذا صحَّ التعبير؛ فقد استفاد، بفضل هذه المعرفة، من كتاب سيرينوس، ولكنّه جعل الإسهامَ النظريَّ والتقَنيَّ لهذا الكتاب غيرَ أساسيّ؛ وذلك أنَّ ثابت بن قرَّة كان على اطلاع مباشر على التعاريف وعلى النتائج، الخاصّة بالمخروطات، التي اقتبسها سيرينوس عن أبلونيوس؛ وكان يتبع، كما رأينا، الطريقَ التي رسمها الحسن بن موسى. أمَّا العلاقات بين ابن السَّمْح وسيرينوس فهي ضعيفة جدّاً، إذ إنّها تقتصِر على تعريف الأسطوانة وعلى نتيجة يتمُّ الحصول عليها بطريقتين مختلفتين. ولعلَّ هذه النتيجة مقتبسة، على أرجح الاحتمالات، من الحسن بن موسى. أمّا هذا الأخير، إذا أمكن أن يكون مُطَّلِعاً على كتاب سيرينوس، فإنّه لم يستفد منه إلّا قليلاً، إذا استندنا إلى العناصر المشتركة بين ابن السَّمْح وثابت بن قرَّة.

ولنقارِن باختصار، لكي نفهمَ الدورَ الذي لعبه كتابُ الحسن بن موسى، مقطع ابن السَّمْح مع مؤلَّف ثابت بن قرَّة على ضوء الفرضيّة التالية: يُمكن أن نعتبِرَ العناصر المُشترَكة، للطريقة المُتّبعة من قِبَل هذين المؤلّفيْن الأخيرين، إرثاً مشترَكاً تمَّ الحصول عليه من كتاب الحسن بن موسى. لنتفحَّص في البداية ما يُفرِّق بينهما حول القطع الناقص أي حول موضوع ابن السَّمْح.

يفترِض ابن السَّمْح أنَّ النتائجَ الخاصَّة بالقطع الناقص الذي يُحصَل عليه بقطع مستوٍ للأسطوانة القائمة، معلومة؛ وهذا القطع الناقص يُحدَّد بمحوريه، على أن يكون المحورُ الأصغر مساوياً لقطر الأسطوانة (انظر لاحقاً الخاصّة أ). يدرس ثابت بن قرّة، بعكس ذلك، القطوع المستوية للأسطوانة المائلة في القضايا ذات الأرقام ٣ إلى ١١ ضمن مؤلّفه. ويدرس في القضيّتين ١٠ وَ ١١ القطع الناقص، مستخدماً الإسقاط الأسطوانيّ والقضيّة ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات".

أمّا العناصر المشتركة بين هذين الريّاضيّين فهي التالية:

١- التآلفان العموديّان

يُعالِج ثابت بن قرَّة أوَّلاً التآلف الخاصّ بالمحور الأعظم، مُستخدِماً القضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، ويُشير إلى أنَّ الطريقة هي نفسها لمعالجة التآلف الخاصّ بالمحور الأصغر. ويدرس ابن السَّمْح، في القضيّة ٧، التآلف الخاصّ بالمحور الأصغر، مع استخدام الخاصّة ا والمثلّثات المتشابهة، ثمَّ يصف في القضيّة ٨ التآلف الخاصّ بالمحور الأعظم.

٢- مساحة القطع الناقص

يُثبِت ثابت بن قرَّة النتيجة في القضيّة ١٤ بطريقة الخُلْف، مستخدِماً القضيّة الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" والتآلف العموديَّ الخاصّ بالمحور الأعظم. يقوم ابن السَّمْح في دراسته على عدَّة مراحل (انظر القضايا ذات الأرقام من ١٢ إلى ١٧). والمرحلة الأكثر أهمِّيّة هي التي يُبيِّن فيها أنَّ نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة

ذات القطر 2b تساوي $\frac{b}{a}$، بواسطة استدلال بالخُلف مع استخدام القضيّة الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" والتآلف العموديّ الخاصّ بالمحور الأصغر. وكان الحسن بن موسى قد قام بتحديد هذه المساحة، وفقاً لأقوال ثابت بن قرّة نفسِه (انظر مقدّمة مؤلّفه).

وهكذا يَتّضِح تخميننا : لقد اقتبس ثابت بن قرّة، كما فعل ابن السَّمْح أيضاً، من الحسن بن موسى مفاهيم التآلف العموديّ مُرَكّبة مع تطبيق القضيّة الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول" وطريقة الاستدلال بالخُلْف. لقد تأثَّرت صياغة ثابت بن قرَّة باستخدام القضية ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، بينما بقيَت صياغة ابن السَّمْح أقرب إلى صياغة الحسن بن موسى.

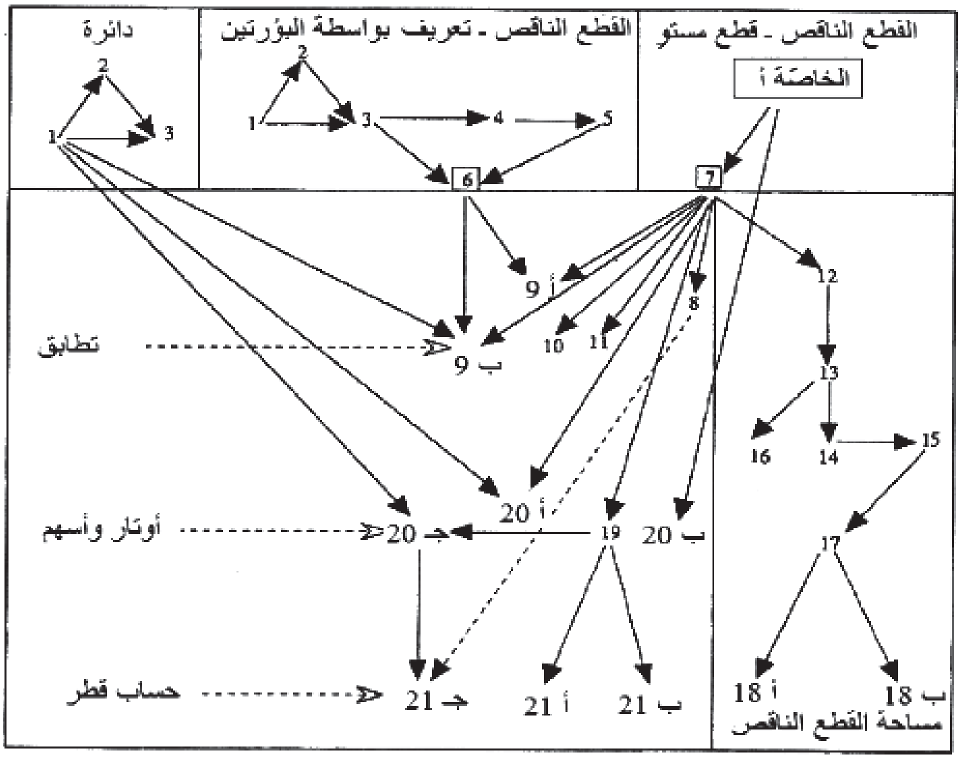
تجد هذه القرابة، بين مؤلَّف ثابت بن قرّة ومؤلَّف ابن السَّمْح، إثباتاً آخر.نحن نعرف من أخويْ الحسن بن موسى أنّه اهتمَّ بأقطار وأوتار وأسهم قطوع الأسطوانة: "فلقد بيّن معرفته (بالقطع الناقص) وبكلّ الخواصّ الموجودة فيه استناداً إلى الأقطار والأسهم والأوتار كما أعلن معرفته بمساحته "[١٠]. ولكنَّ ابن السَّمْح يُكرِّس، بالتحديد، القضايا ذات الأرقام ١٩، ٢٠ وَ ٢١ للأسهم وللأوتار.

٦-١-٣- بنية دراسة ابن السَّمْح

نصل أخيراً إلى دراسة مقطع ابن السَّمْح، كما وصل إلينا في ترجمته العبريّة. يُظهِر الخطُّ البيانيُّ للاستنتاجات تماسُك هيكَل القضايا ولا يثير أيَّ شكٍّ في نسبة غالبيّتها العظمى إلى المؤلِّف. أمّا الصعوبات الوحيدة فنجدها في بداية النصّ، وخاصّة في نهايته. وذلك أنّنا نلاحظ أنَّ القضيّتين الثانية والثالثة الخاصَّتين بالدائرة، ليس لهما أيُّ استخدام فعليّ في بنية المقطع، ولو أنّهما مُستَنتَجتان بشكل طبيعيّ من القضيّة الأولى. ولكنّنا، بالرغم من ذلك، لا نظنُّ أنّهما قد أضيفتا إلى نصّ ابن السَّمح. ولكنَّ من الأرجح، مقابل ذلك، أن تكون هناك عدَّة قضايا في مكان القضيّتين ٢٠ وَ ٢١: ربَّما فُقدت أقسامٌ من النصّ، ولـخِّصت البقية بلا نظام، مما أدّى إلى هاتين القضيّتين. ونحن لا نعلم شيئاً عمّا إذا كان هذا الفُقدان قد أصاب النصَّ

[١٠] انظر الحاشية ٦.

العربيَّ أو أنّه ناتج من تصرُّف المترجم نفسه، أو أنّه ناتج أيضاً من تصرُّف نسّاخ النصّ العبريّ. ولكنّه من الواضح أنَّ النصَّ قد أصيب بتغيير من قِبَل أحد المعلِّقين الذي أضاف إليه المقدِّمة الرابعة التي هي دون شكٍّ دخيلة على النصّ.



ـ لم تستخدَم القضيّتان ٢ وَ ٣ الخاصّتان بالدائرة   ـ القضيّة ٢٠ جـ هي برهان للقضيّة ٨.

٦ـ٢ الشرح الريّاضي

٦ـ٢ـ١ التعاريف والنتائج المسلَّم بها

يتماثل القسم الأوّل من نصّ ابن السَّمْح كأنّه مقدِّمة للمؤلّف، حيث تـُقدَّم التعاريف ويتمُّ التذَكيَر بالنتائج بدون برهان. ونحن لا نعلم إذا كان قد أثبت بنفسه هذه النتائج في قسم سابق من مؤلَّفه الذي كان أكثر تكاملاً من النصّ الذي وصل إلينا بالعبريّة، أو إذا كانت هذه النتائج معتـَبَرة كجزء من المعارف الريّاضيّة المشتركة بين الرياضيين في ذلك العصر. لقد قسمنا هذه المقدِّمة إلى فقرات وفقاً لما يتطلّبه الشرح. لنتناول هذه الفقرات الواحدة تلو الأخرى حسب تدرُّج العَرْض.

يبدأ ابن السَّمْح في الفقرة الأولى بتعريف الكرة – مجسَّمٌ دورانيّ مُوَلَّد من دوران نصف دائرة حول قطرها – وعناصرها : السطح ، القطر، المركز، القطبين والدائرة العظمى. ويُخبرنا لاحقاً (في الفقرة التاسعة) أنّه سيعالج المسائل الخاصَّة بالكرة: القطوع المستوية، المساحة والحجم. ولكن، لا يوجَد في النصّ أيُّ قسم مكرَّس للكرة. وهكذا يدلُّ هذا الغياب وحده لدراسة الكرة، على أنَّ النصَّ الذي وصل إلينا غير كامل.

يُعرِّف ابن السَّمْح، بعد ذلك، الأسطوانة الدورانيّة – مجسَّم مُوَلّد من دوران مستطيل حول أحد "أضلاعه" – وعناصرَها : السطحَ الجانبي وقاعدتيها. وهذا التعريف هو تعريف أقليدس – التعريف ١٤ من المقالة الحادية عشرة من كتاب الأصول – ويختلف عن تعريف سيرينوس [ص. ٢-٣] وعن تعريف ثابت بن قرّة الذي يعتبر الأسطوانة الدورانيّة كحالة خاصّة من الأسطوانة المائلة ذات القاعدتين الدائريَّتيْن. ويبقى أنَّ ابن السَّمْح يُشير في نهاية هذه الفقرة نفسها إلى الأسطوانة المائلة. ولنلاحظ أنّه لا يُمكن الحصول على الأسطوانة المائلة بواسطة الدوران، وهذا ما يُفسِّر لماذا تبنّى ابن السَّمْح لاحقاً تعريفاً أعمّ للأسطوانة.

ينتقل ابن السَّمْح إلى تعريف المخروط الدورانيّ. استُنتِج هذا التعريف من تعريف الأسطوانة، إذ إنَّ السطح الجانبي للمخروط مُوَلَّد بقطر الأسطوانة، والمجسَّم المخروطيّ مُوَلَّد بالمثلَّث الذي يدور حول الضلع الثابت. يرجع هذا التعريف إلى تعريف أقليدس.

إنَّ تعريف الأسطوانة، الذي قدَّمه ابن السَّمْح في هذه الفقرة، هو، بعبارة أخرى، نفس تعريف أقليدس. يُقدِّم هذا الأخير تعريف المخروط الدورانيّ قبل تعريف الأسطوانة الدورانيّة، بخلاف ما فعله ابن السَّمْح هنا. ولم يُشِر أقليدس، من جهة أخرى، إلا إلى الأسطوانة وإلى المخروط الدورانيّ، بينما وسَّع ابن السَّمْح تعاريفه ابتداءً من الفقرة الثانية.

يُعطي ابن السَّمْح، بالفعل، في الفقرة الثانية، تعريفاً أعمُّ للأسطوانة، استناداً إلى منحنيين مستديريْن بحيث يكون لكلّ منهما مركز ويكونان في مستويَين متوازيين. يجب، بوضوح، أن نفترض أنَّ كلَّ منحنٍ يُستخرَج من الآخر بواسطة انسحاب. يُوَلَّد السطح الجانبيُّ للأسطوانة

بواسطة خطٍّ متحرِّك يستند إلى المنحنيين ويبقى موازياً للخطّ الذي يصل بين المركزين. ويُمكن أن تكون هذه الأسطوانة قائمة أو مائلة. ولنلاحظ أنّه، إذا كان المنحنيان المعنيّان بالأمر دائرتين، فإنَّ هذا التعريف يتطابق مع تعريف ثابت بن قرَّة الوارد في كتابه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، كما يتطابق أيضاً مع تعريف سيرينوس. وهذه الحالة الخاصَّة هي، بالتحديد، تلك التي ستهمُّ ابن السَّمْح في النهاية.

يفترض ابن السَّمْح، بالفعل، ضمنياً في الفقرة الثالثة، بأنَّ المنحنييْن دائرتان أو قطعان ناقصان. ثمَّ يتناول المجسَّم الحاصل بقطع الأسطوانة وفقاً لمستويين متوازيين، ولكن دون أن يُحدِّد شكل قاعدة الأسطوانة. ولكن، يبدو أنَّ هذه القاعدة دائرية، كما توحي بذلك الجملة الأخيرة في هذه الفقرة نفسها. أمّا إذا كانت الأسطوانة قائمة وذات قاعدة دائريّة، فإنَّ القطع بمستويين متوازيين، يعطي قطعين ناقصين؛ ويفترض ابن السَّمْح أن هذين القطعين متساويين (انظر الملاحظة التالية)؛ وهما تحدِّدان أسطوانة قائمة قاعدتاها قطعان ناقصان.

الملاحظة ١- النتائج المعلنة صحيحة ولكنّها غير مُعلَّلة، هنا، في النصّ الذي وصل إلينا.

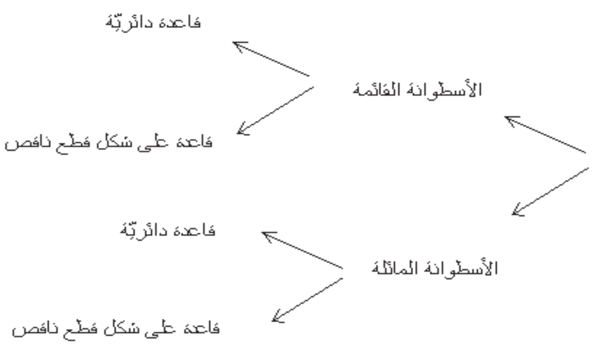
ولنلاحظ أنَّ ثابت بن قرّة قد برهن بشكل عامّ، في القضيّة الثامنة من مؤلَّفه "في قطوع الأسطوانة وبسيطها"، أنَّ قِطْعَ أسطوانة قائمة أو مائلة، ذات قاعدتين دائريَّتين، بمستوييْن متوازيين قاطعين للمحور، يعطي شكلين متساويين. ولقد برهن، في القضايا ذات الأرقام من ٨ إلى ١١، أنَّ هذين القطعين دائرتان أو قطعان ناقصان؛ وذلك باستخدام الخاصّة المميِّزة للدائرة والخاصّة المميِّزة للقطع الناقص اللتين وردتا في القضيّة ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات". ويدرس ثابت بن قرّة، في القضيَّة التاسعة الدوائرَ المخالفة في الوضع التي لم يُشِر إليها ابن السَّمْح.

الملاحظة ٢- الجملة الأخيرة من هذه الفقرة لابن السَّمْح هي التالية: "إذا انطلقنا من كلّ واحد من هذين النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن نولِّدَ النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل دائرة، إذا قمنا بالعملية بشكل معكوس". تَفرض هذه الجملة أنَّ دراسة القطوع المستوية، للأسطوانات التي لها قواعد على شكل قطوع ناقصة، معلومة ؛ كما تفرض أنّنا نعرف كيف نجد من بين هذه القطوع المستوية تلك التي لها قواعد دائريّة.

يُبيِّن ابن أبي جرّادة، وهو الذي شرح نصّ ثابت بن قرّة خلال القرن الثالث عشر الميلادي، بخصوص القضيّة العاشرة لثابت بن قرّة (انظر التعليقات الإضافيّة) أنّه يمكن إبدال القاعدة الدائرية بقاعدة على شكل قطع ناقص.

يتناول ابن السَّمْح ثانية، في الفقرة الرابعة، تعريف المخروط الذي نجده في كتاب "المخروطات" لأبلونيوس. لم يُستخدَم هذا التعريفُ، هنا، مثلما جرى في حالة الكرة، في أيّ قسم من أقسام هذا المؤلَّف، كما لم يتمّ عرض دراسة المخروط فيه؛ هذه هي، إذاً، إشارة إلى نقص آخر في هذا المؤلَّف؛ ولكنَّ من الصعب علينا أن نقدِّر مداه.

يُقدِّم ابن السَّمْح، في الفقرة الخامسة، تصنيفاً لأنواع الأسطوانات التي قد أشار إليها والتي يُمكِن أن نلخِّصها في المخطَّط التالي:



يلاحظ ابن السَّمْح أنَّ الأسطوانة ذات القاعدة الدائريّة كانت معروفة لدى الأقدمين. توحي هذه الملاحظة إلى أنّه لم يكن مطَّلِعاً، من بين الكتابات التي يوجَد فيها تعريف الأسطوانة، سوى على كتاب "الأصول" لأقليدس؛ وهذا ما قد يجعلنا نفترض أنّه لم يكن مطَّلِعاً على كتاب سيرينوس.

أمّا المخروط، فإنَّ ابن السَّمْح يتناول تعريفه العامّ مستنداً إلى دائرة وإلى نقطة خارِج مستوي الدائرة؛ ثمَّ يُميِّز بين المخروط القائم والمخروط المائل. وهذه هي "التعاريف الأولى" – ١، ٢، ٣ – لأبلونيوس. لنؤكّد أيضاً أنّه باستثناء هاتين الإشارتين إلى المخروط في المقدِّمة، لم يجرِ الكلام على المخروط في ما بقي لدينا من هذا المؤلَّف. نلاحظ، حتّى الآن،

أنّ ابن السَّمْح، قد اطلع كما يبدو على كتاب أبلونيوس، ولكنّه لم يستخدمه، بخلاف ما فعله ثابت بن قرّة.

٦-٢-٢ الأسطوانة

يدرس ابن السَّمْح، بعد ذلك، الأسطوانة بطريقة أكثر عموميّة. فهو ينطلق من مفهوم المنحني المُغلَق، فيُذكّر بأنَّ عدد المنحنيات المغلَقة غير محدود، وأنَّ من غير الممكن وضع جدول لها (الفقرة ٦). يُمكن أن نحصل على أسطوانة بعد أن نُحدِّد منحنيين "في وضعين متشابهين" (الفقرة ٧).

لتكن معنا قطعتان من مستويين متساويتان، ولهما نفس الشكل P_1 وَ P_2 ولتكونا محدَّدتين بمنحنيين مُغلَقين C_1 وَ C_2؛ ولنأخذ $M_1 \in P_1$ وَ $M_2 \in P_2$. نأخذ الخطوط التي تصل بين M_1 (M_2 على التوالي) وكلّ نقاط C_1 (C_2 على التوالي). إذا كان كلُّ خطٍّ خارِج من M_1 مساوياً لخطٍّ خارج من M_2، وإذا كانت الزاوية المحصورة بين خطَّين خارجين من M_1 مساوية للزاوية المحصورة بين خطَّين متساويين خارجين من M_2، نقول إنَّ المنحنيين C_1 وَ C_2 هما "في وضعين متشابهين". وهذا يعني، وفقاً للمصطلحات الحديثة، أنَّ معادلة المنحنيَ C_1 إذا استخدمنا الإحداثيّتين القطبيّتين في المَعْلَم ذي الأصل M_1، مطابقة لمعادلة المنحني C_2 إذا استخدمنا الإحداثيّتين القطبيّتين في المَعْلَم ذي الأصل M_2. لا يأخذ ابن السَّمْح الزاوية القطبية بالنسبة إلى محور أوَّليّ، بل يُقارن بين زاويتين مشكّلتين بين شعاعين متّجهيَّين.

وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ ابن السَّمْح حدَّد بهذه الطريقة خاصّيات النقاط المتماثلة في الانتقال من P_1 إلى P_2.

فإذا كان P_1 وَ P_2، الآن، في مستويين متوازيين، وإذا قطعَهما مستوٍ مارٌّ بالنقطتين M_1 وَ M_2 وفقاً لخطَّين متساويين، يكون المنحنيين المغلقين C_1 وَ C_2 "في وضعين متشابهين". يُستخرَج، في هذه الحالة، كلٌّ منحنٍ من المنحنيين C_1 وَ C_2، من الآخر بواسطة انسحاب. ويجب تقريب هذه الفكرة نفسها لمنحنيين C_1 وَ C_2 "في وضعين متشابهين" بحيث يُستخرَج

كلٌّ منهما من الآخر بواسطة انسحاب، من فكرة ثابت بن قرَّة، في القضيّة السابعة من مؤلّفه "في قطوع الأسطوانة..." التي هي نوع من قضيّة عكسيّة.

يقدِّم ابن السَّمْح، بواسطة هذه المفاهيم، تعريفاً عامّاً للأسطوانة ذات قاعدتين اختياريّتين (الفقرة الثامنة):

ليكن معنا شكلان مسطَّحان مُحدَّدان بمنحنيين مغلقين C_1 وَ C_2 "في وضعين متشابهين"؛ وليكن معنا نقطتان M_1 وَ M_2 "في وضعين متشابهين" على هذين الشكلين؛ ولنأخذ خطّاً يستند إلى C_1 وَ C_2 ويدور بحيث يبقى موازياً للخطّ M_1M_2؛ يُولّد هذا الخطّ عندئذ سطحاً أسطوانيّاً.

يكون الخطّ M_1M_2 محور الأسطوانة، إذا كان M_1 وَ M_2 مركزي التناظر حسب الترتيب لِـ C_1 وَ C_2. يُسمَّى الخطّ المتحرِّك ضلعَ الأسطوانة. إذا كان M_1M_2 عموديّاً على مستوي الشكلين، تكون الأسطوانة قائمة، وإلا فهي مائلة.

ولنلاحظ دقّة تعريف الأسطوانات وعموميّة مفهوم المنحنيات المُغلَقة التي تخرج بوضوح عن نطاق القطوع المخروطية التي تتميَّز بوجود الأقطار المترافقة.

ملاحظة – لا يظهر هذا التعريف العامُّ، بعد ذلك في النصّ قبل القضيَّة ٢٠. يُشير ابن السَّمْح في هذه القضيّة إلى أنَّ دراستها بالطريقة المستخدَمة في القضيّة ١٩ تتطلَّب أخذ أسطوانة لها قاعدة على شكل قطع ناقص. ترتكز هذه الطريقة، عندئذ، على أن يوضَع على الأسطوانة قطعٌ مستوٍ دائريٌّ. يكتفي ابن السَّمْح بالإشارة فقط إلى هذه الطريقة.

ولكنَّ مسألة هذه الأسطوانة، التي لها قاعدة على شكل قطع ناقص، وقطوعها المستوية لم تدرس من قِبَل سيرينوس ولا من قِبَل ثابت بن قرّة. غير أنّها دُرست من قِبَل ابن جرّادة ضمن شرحه لمؤلَّف هذا الأخير.

يُعلِن ابن السَّمْح، في الفقرة الأخيرة من هذا الفصل، أنّه سيدرس القطوع المستوية للأسطوانات ومساحات القطوع المستوية، والسطوح الكرويّة، وكذلك قطوع وأحجام الأكر (الفقرة ٩). ولكنَّ هذه الدراسات غير موجودة في النصّ الذي بين يدينا.

٦-٢-٣ القطوع المستوية للأسطوانة

يذكّر ابن السَّمْح، بعد ذلك (في الفقرة ١٠)، بطبيعة القطوع المستوية للأسطوانة الدورانيّة، وفقاً لوضع المستوي القاطع. إذا كان هذا القطع يمرُّ بالمحور أو كان موازياً له، يكون القطع المستوي مستطيلاً؛ ولم تدْرَس هذه الحالة في النصّ. وإذا كان المستوي القاطع عموديّاً على المحور، يكون القطع دائرة. وإذا لم يكن المستوي القاطعُ موازياً للقاعدتين وإذا قطع المحور، فإنَّ القطع يكون قطعاً ناقصاً.

يُبيِّن ابن السَّمْح أنَّ القطع المستويَ، المولَّد من دوران قطعة من مستقيم تدور حول أحد طرفيها الثابت، هو دائرة "بالضرورة". وذلك أنَّ كلَّ النقاط، المأخوذة على محيط هذا القطع، توجَد على نفس المسافة من النقطة الثابتة؛ فنجد بذلك تعريف الدائرة استناداً إلى المركز ونصف القطر. وهكذا عيَّنَ ابن السَّمْح نوع المنحني الحاصل هنا كقطع مستوٍ أو كدائرة معرَّفة كمكان للنقاط.

ولكن، لنلاحظ أنَّ ابن السَّمْح لم يُوَضِّح أنَّ الدائرة الناتجة من قطع مستوٍ مساوية لدائرة القاعدة. ولنلاحظ، من جهة أخرى، أنَّ ثابت بن قرَّة يُبيِّن، في القضية الثامنة من مؤلَّفه المشار إليه أعلاه، أنَّ القطعَ المستويَ لأسطوانة قائمة أو مائلة وذات قاعدة دائريّة، هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة؛ تُستخرَج هذه الدائرة من دائرة القاعدة بواسطة انسحاب قام بدراسته ثابت بن قرَّة في القضيّة ٧. وهذا ما يُقدِّم لنا حجَّة إضافية لتبيين أنَّ ابن السَّمْح لم يستند إلى مؤلَّف ثابت بن قرّة.

٦-٢-٤ خواصّ الدائرة

ويدرس ابن السَّمْح، بعد ذلك، بعض خواصّ الدائرة لكي يُثبت مُقدِّمتين ضروريّتين لاحقاً. وهكذا يُذكّر في أوَّل الأمر بالخواصّ التالية، حيث نرمز بـِ C_1، C_2 وَ C_3 إلى ثلاث دوائر ذات الأقطار d_1، d_2 وَ d_3 على التوالي، وذات المحيطات p_1، p_2 وَ p_3 على التوالي؛ ونرمز

أيضاً بِـ P_1 وَ P_2 إلى مضلَّعين متساويَيْ الأضلاع متشابهين محاطين بالدائرتين C_1 وَ C_2 على التوالي ويكون ℓ_1 وَ ℓ_2 ضلعيهما.

ا) $\frac{(C_1)\text{مساحة}}{(C_2)\text{مساحة}} = \frac{d_1^{\,2}}{d_2^{\,2}} = \left(\frac{d_1}{d_2}\right)^2$

ب) $\frac{(C_1)\text{مساحة}}{(C_2)\text{مساحة}} = \frac{(P_1)\text{مساحة}}{(P_2)\text{مساحة}} = \left(\frac{\ell_1}{\ell_2}\right)^2$؛

باستخدام القضيّتين الأولى والثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"؛

جـ) مساحة $(C) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}d.p\right)$

ويمكن اعتبار $\frac{1}{2}d$ وَ p ضلعين للزاوية القائمة في مثلَّث قائم الزاوية؛ فلذلك يتعلَّق الأمر بالقضيّة الأولى من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس؛

د) $\frac{d_1}{p_1} = \frac{d_2}{p_2}$،

هذه القضيّة هي القضيّة الخامسة في مؤلَّف بني موسى (انظر كتابنا هذا، ص. ٩٣-٩٥).

هـ) $3+\frac{1}{7} > \frac{p}{d} > 3+\frac{10}{71}$،

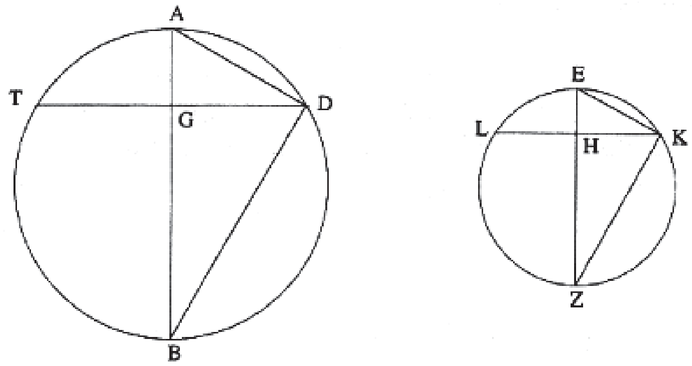
هذه هي القضيّة الثالثة من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس.

و) $\frac{(c)\text{مساحة}}{d^2} \approx \frac{11}{14} = \frac{1}{14} + \frac{5}{7}$

هذه هي القضيّة الثانية من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس.

يُثبت ابن السَّمْح، بعد ذلك، الخواصّ التي، على حدّ قوله، لم يُشِر إليها أقليدس أو أرشميدس أو أيّ شخص آخر.

المقدِّمة ١ـ لتكن معنا دائرتان لهما القطران AB وَ EZ ونقطتان G وَ H على AB وَ EZ، حسب الترتيب بحيث يكون $\frac{HE}{HZ}=\frac{GA}{GB}$؛ يُحقّق عندئذ الوتران DGT وَ KHL العموديّان حسب الترتيب على AB وَ EZ، المعادلة $\frac{DT}{KL}=\frac{AB}{EZ}$.



يكون معنا في المثلّثين ADB وَ EKZ: $GA.GB=GD^2$ وَ $HE.HZ=HK^2$، فنحصل على $\frac{GA}{HE}.\frac{GB}{HZ}=\frac{GD^2}{HK^2}$. ونستخرِج من الفرضيّات: $\frac{AB}{EZ}=\frac{GB}{HZ}=\frac{GA}{HE}$، فنحصل على $\frac{AB^2}{EZ^2}=\frac{GA}{HE}.\frac{GB}{HZ}$، وبالتالي على $\frac{DT}{KL}=\frac{GD}{HK}=\frac{AB}{EZ}$.

وهكذا تقودنا الفرضيّات إلى رسم شكلين متشابهين؛ فنحصل على النتيجة المطلوبة.

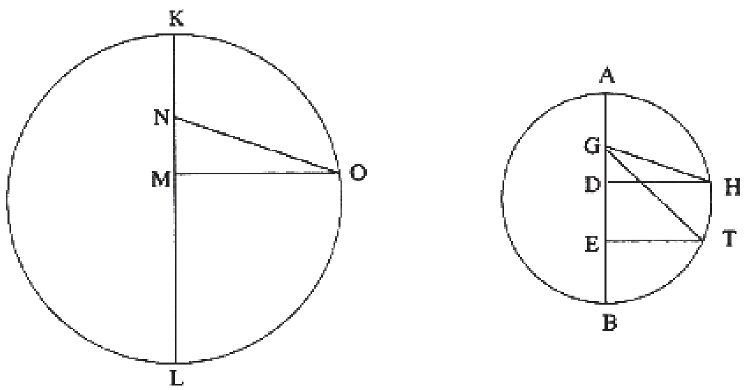
المقدِّمة ٢ـ لتكن معنا دائرتان لهما القطران AB وَ GD ونقطتان E وَ H على AB ونقطتان K وَ M على GD بحيث يكون $\frac{GK}{GD}=\frac{AE}{AB}$ وَ $\frac{DM}{GD}=\frac{BH}{AB}$. وليكن معنا نصفا الوتر EZ وَ HT العموديّان على AB؛ وليكن معنا نصفا الوتر KL وَ MN العموديّان على GD. يكون المثلّثان ADB وَ EKZ، عندئذ، متشابهين؛ وكذلك يكون المثلّثان EHT وَ KMN.

نستنتج من الفرضيّات: $\frac{AB}{GD}=\frac{AE}{GK}=\frac{AH}{GM}=\frac{EH}{KM}$؛ ويكون معنا، وفقاً للمقدِّمة الأولى $\frac{AB}{GD}=\frac{HT}{MN}$، فنحصل على $\frac{HT}{MN}=\frac{EH}{KM}$، فيكون المثلّثان EHT وَ KMN متشابهين.

ويكون المثلّثان ZHE وَ LMK متشابهين أيضاً.

ولنلاحظ، أنَّ الشكلين متشابهان، وفقاً للفرضيّات كما حصل في المقدِّمة الأولى، فيكون كلُّ مثلّثين متماثلين – EHT وَ KMN على سبيل المثال – متشابهين.

المقدِّمة ٣- لتكن معنا دائرتان لهما القطران AB وَ KL ونقطتان G وَ N تقسمان هذين القطرين على التوالي على نفس النسبة. ليكن GH وَ NO بحيث يكون $\widehat{LNO}=\widehat{BGH}$، فيكون عندئذ $\frac{HG}{ON}=\frac{AB}{KL}$.



هذه المقدِّمة تعميمٌ للمقدِّمة الأولى حيث كان معنا: $\widehat{BGH}=\widehat{LNO}=\frac{\pi}{2}$.

لنفرض أنَّ $\widehat{LNO}\neq\frac{\pi}{2}$، فيكون $\widehat{BGH}\neq\frac{\pi}{2}$. وليكن OM مع $OM\perp KL$، وليكن $HD\perp AB$،

فيكون عندئذ $\frac{AD}{DB}=\frac{KM}{ML}$.

وذلك أنّه إذا لم يكن الوضع على هذه الصورة، سيُمْكِن أن نجد نقطة E على AB مع $D\neq E$ بحيث يكون $\frac{AE}{EB}=\frac{KM}{ML}$.

وإذا أخرجنا عندئذ ET بحيث يكون $AB \perp ET$، يكون المثلّثان TGE وَ ONM متشابهين، وفقاً للقضيَّة ٢، فنحصل على $\widehat{LNO} = \widehat{TGE}$ ؛ ولكنَّ $\widehat{LNO} = \widehat{BGH}$ ، فيكون هذا مستحيلاً.

يكون معنا، وفقاً للمقدِّمة الأولى، $\frac{HD}{OM} = \frac{AB}{KL}$ ؛ ولكنَّ معنا من جهة أخرى بفضل التشابه:

$\frac{HD}{OM} = \frac{HG}{ON}$ ، فنحصل على النتيجة: $\frac{AB}{KL} = \frac{HG}{ON}$.

لنلاحظ أنَّ هذه المقدِّمة لم تُستخدَم لاحقاً في النصّ.

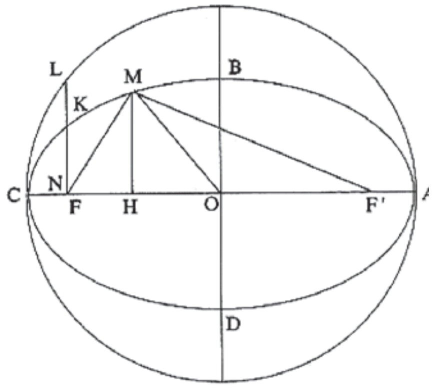
٦-٢-٥ القطوع الناقصة للأسطوانة القائمة

أعلن ابن السَّمْح في الفقرات الأولى من هذا الفصل أنّه سيُثبت أنَّ القطعَ المستويَ، لأسطوانة دورانيّة، الحادثَ بمستوٍ غير موازٍ للقاعدتين – وهو القطع الناقص – يُمكن أن يتطابق مع "الشكل الدائريّ المستطيل" الحاصل بواسطة مثلّث ذي قاعدة ثابتة على أن يكون مجموع ضلعيه الآخرين معلوماً. يكون مكانُ الرأس المتحرِّك للمثلّث، في هذه الحالة، المنحنيَ الحاصلَ من تعريف القطع الناقص بواسطة البؤرتين. يُبيِّن ابن السَّمْح، بعد ذلك، أنَّ للمنحنيين اللذين نحصل عليهما بهاتين الطريقتين خواصَّ مشتركة. ثمَّ يتبع عندئذ نفس المنهج الذي سلكه في دراسة القطع المستوي الدائريّ. فيبدأ بتعريف عناصر "الشكل الدائريّ المستطيل": الرؤوس والمركز والأقطار والوتر والمحورين والدائرة ذات القطر المساوي للمحور الأصغر والدائرة المحيطة ذات القطر المساوي للمحور الأعظم. وهكذا تدرس القضايا السِّتّ الأولى "الشكل الدائريّ المستطيل"، أي الشكل الذي نحصل عليه استناداً إلى التعريف الذي يستخدم البؤرتين: $2a = MF + MF'$. لنتبنَّ الرموز المعروفة: $2a = AC$، $2b = BD$، $2c = FF'$ (مع $b^2 + c^2 = a^2$).

يُحدِّد ابن السَّمْح – انطلاقاً من العمود، على المحور الأعظم AC في النقطة F، الذي يقطع الدائرة العظمى ذات القطر AC على النقطة L ويقطع القطعَ الناقص على النقطة K – الخطَّ الثابت FL والخطَّ المفصول FK. ويبرهن عندئذ الخواصّ التالية:

القضيّة ١- $AC^2 = 4FL^2 + FF'^2$. تُستخرَج هذه المتساوية مباشرة من الخاصَّة المميِّزة للدائرة: $OB^2 = OA.FK = OA^2 - OF^2 \Leftarrow FL^2 = a^2 - c^2 = b^2$،

وهذا ما برهنه في القضيّة ٢.



القضيّة ٢- أ) $b = FL$، ب) $OA.FK = OB^2 \Leftarrow FK = \frac{b^2}{a} \Leftarrow \frac{FK}{FL} = \frac{b}{a}$.

نحصل على هذه النتائج باستخدام القضيّة السابقة وتعريف القطع الناقص عن طريق البؤرتين.

القضيّة ٣- حساب الشعاع المتّجهيّ MF ($MF > MF'$).

يفرض ابن السَّمْح النقطة M على القوس $\widehat{BC}$، مع $M \neq C$، ويُميِّز بين عدَّة حالات:

* M بين B وَ K، يكون معنا : ا) $\widehat{FMF'} = \frac{\pi}{2}$، ب) $\widehat{FMF'} < \frac{\pi}{2}$، ج) $\widehat{FMF'} > \frac{\pi}{2}$.

* * M في K.

*** M بين OHK وَ C.

تكون الزاوية $\widehat{FMF'}$، في هذه الحالات الأخيرة، حادَّة.

لتكن H مسقط M على AB؛ يُدخل ابن السَّمْح النقطة N على نصف الخطّ المستقيم HC المحدَّد بواسطة العلاقة $HN = \frac{b^2}{c}$. يُستخدَم في البرهان تعريفُ القطع الناقص بواسطة

البؤرتين، القضيَّتان الأولى والثانية، مبرهنة فيثاغوروس للزاوية القائمة $\widehat{FMF'}$، والقضيّتان ١٢ وَ ١٣ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول" للزاوية $\widehat{FMF'}$ المنفرجة وللزاوية $\widehat{FMF'}$ الحادّة.

يكون معنا في جميع الحالات: $\frac{OF'}{NF'} = \frac{MF'}{NF'}$.

ملاحظة ١ـ إذا وضعنا $x = OH$، يُمكن أن نكتب: $c + x + \frac{b^2}{c} = F'O + OH + HN = NF'$، فنحصل على $MF' = \frac{c}{a}\left(c + x + \frac{b^2}{c}\right) = \frac{a^2 + c.x}{a}$؛ ويكون معنا $MF' = a + \frac{c.x}{a}$، فنحصل على $MF = a - \frac{c.x}{a}$.

لنلاحظ أنَّ هذه العلاقة صالحة إذا كانت M في C؛ يكون معنا عندئذ: $a = x$، $MF = a - c$، وَ $MF' = a + c$.

ملاحظة ٢ـ نحصل على هذه النتيجة، بدون أن نميِّز بين مختلف الحالات، باستخدام تعريف القطع الناقص بواسطة البؤرتين وعلاقة متريَّة في المثلّث FMF'. تُستخرَج هذه العلاقة من القضيّتين ١٢ وَ ١٣ من المقالة الثانية من كتاب " الأصول". يكون معنا بالفعل:

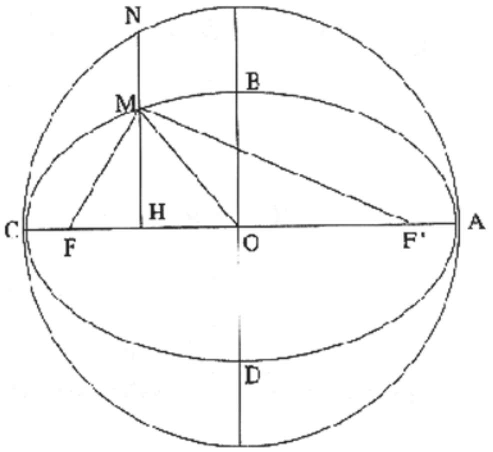
$MO^2 + OF'^2 + 2F'O.OH = MF'^2$ (القضيّة ١٢ من المقالة الثانية من كتاب " الأصول")

$MO^2 + OF^2 - 2F'O.OH = MF^2$ (القضيّة ١٣ من المقالة الثانية من كتاب " الأصول")،

فنحصل على : $2OH.FF' = 2OH.(OF' + OF).OH = MF'^2 - MF^2$.

يكون معنا أيضاً: $2OM^2 + 2OF^2 = MF'^2 + MF^2$؛ وهذا ما سيُستخدم في القضيّة الرابعة. يكون معنا إذاً: $2a = MF' + MF$، $4cx = MF'^2 - MF^2$، فيكون معنا $2\frac{cx}{a} = MF' - MF$ $a + \frac{cx}{a} = MF'$ وَ $a - \frac{cx}{a} = MF$.

القضيّة ٤ـ جداء الشعاعيْن المتّجهيَّين FM وَ $M\,F'$.



لنرمز، وفقاً للرموز السابقة، بـِ N إلى نقطة تقاطع HM مع الدائرة ذات القطر AC، فيكون معنا: $NH^2 - MH^2 + BO^2 = MF.MF'$.

يُميِّز ابن السَّمْح، هنا كما فعل في القضيّة ٣، بين خمس حالات للشكل. وهو يستخدِم في برهانه قوَّة نقطة ما بالنسبة إلى دائرة، كما يستخدِم في كلّ حالة النتيجة المُثبَتة خلال القضيّة ٣. وهو يفرض، كما فعل في هذه الأخيرة، أنَّ $M \neq C$. وتبقى النتيجة صالحة إذا تطابقت النقطة M مع النقطة C.

ملاحظة١ـ يُمكن أن نعطي، كما حصل في القضيّة السابقة، برهاناً وحيداً صالحاً في كلّ حالات الشكل، باستخدام تعريف القطع الناقص بواسطة البؤرتين وعلاقة متريَّة في المثلّث $FF'M$. يكون معنا: $2a = MF' + MF$، $4a^2 = MF'^2 + MF^2 + 2MF.MF'$؛ ولكنَّ لدينا في المثلّث $FF'M$، وفقاً للقضيّتين ١٢ وَ ١٢ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول" $2OM^2 + 2OF^2 = MF'^2 + MF^2$، فنحصل على $2a^2 - OM^2 - OF^2 = MF.MF'$.

إذا كانت x وَ y إحداثيَّتا النقطة M وإذا كانت Y الإحداثيّة الثانية للنقطة N، يكون معنا $2a^2 - (x^2 + y^2) - c^2 = MF.MF'$؛ ولكنَّ $(a-x)(a+x) = Y^2$ (قوة النقطة H)، فنحصل علىَ

$$Y^2 - y^2 + b^2 = Y^2 - y^2 + a^2 - c^2 = MF.MF'.$$

إذا كانت النقطة M في B، يكون معنا $b=y$ ، $a=Y$ وَ $a^2 = MF'.MF$.

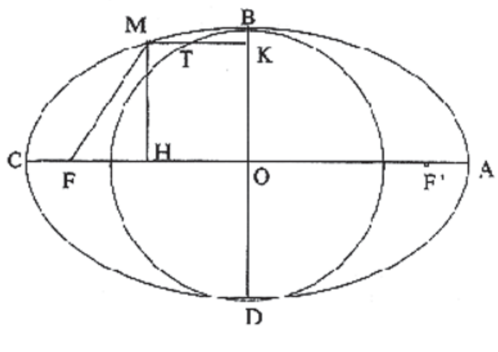
إذا كانت النقطة M في C ، يكون معنا $0=Y=y$ وَ $(a-c)(a+c)=b^2=MF'.MF$.

الملاحظة ٢ـ إذا أخذنا بعين الاعتبار نتائج القضيّتين السابقتين، يكون معنا:

$$a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}=Y^2-y^2+b^2 \Leftrightarrow Y^2-y^2+b^2=\left(a-\frac{cx}{a}\right)\left(a+\frac{cx}{a}\right)$$ ؛

ولكنَّ $a^2-x^2=Y^2$ ، فيكون إذاً $a^2-\frac{c^2x^2}{a^2}=a^2-x^2-y^2+b^2$ ، فنحصل على $x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)+y^2=b^2$ ، فنحصل، إذا قسمنا طرفي هذه المعادلة بـِ b^2 على: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ التي هي معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى محوريه.

القضيّة ٥ـ لنُرفق بنقطة M، من الشكل الدائريّ المستطيل، النقطة T، من الدائرة ذات القطر المساوي للمحور الأصغر، بحيث يكون للنقطة T نفس الإحداثيّة الثانية التي للنقطة M (أي بحيث يكون $MT \perp BD$)؛ يكون معنا: $KT^2+(OA-MF)^2=MK^2$.



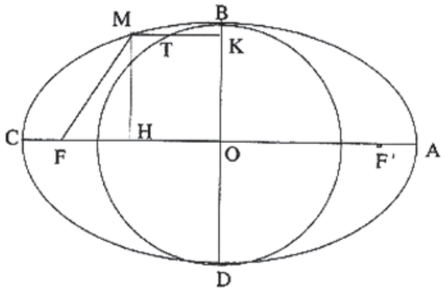
يُبرهن ابن السَّمْح هذه القضيّة باستخدام القضيّة السابقة وقوّة النقطة بالنسبة إلى الدائرة وتعريف القطع الناقص بواسطة البؤرتين (ضمنيّاً على الأقلّ).

ملاحظة ـ لقد أثبتنا في القضيّة الثالثة أنَّ $a-\frac{cx}{a}=MF$ مع $MK=x$، فنحصل، إذا كانت $KT=X$ الإحداثيّة الأولى للنقطة T الموجودة على الدائرة:

$X^2+\frac{c^2}{a^2}x^2=x^2$ ؛ ولكنَّ للنقطتين M وَ T نفس الإحداثية الثانية $MH=y$، فنحصل على $b^2-y^2=X^2$، ويكون $x^2-\frac{c^2}{a^2}x^2+y^2=b^2$ ؛ وإذا قسمنا الطرفين بـِ b^2 ، نحصل على معادلة القطع الناقص.

القضيّة ٦ـ التآلف العموديّ بالنسبة إلى المحور الأصغر.

يكون معنا، إذا استخدمنا الرموز السابقة: $\frac{OA}{OB}=\frac{MK}{TK}$ [أيْ $\frac{x}{X}=\frac{a}{b}$].



يرتكز برهان ابن السَّمْح على القضيّتين ٣ وَ ٥.

ملاحظة ـ لقد رأينا أنّه، إذا أخذنا بعين الاعتبار القضيّة ٣، فإنَّ النتيجة الحاصلة في القضيّة ٥ تُكتب كما يلي: $X^2+\frac{c^2}{a^2}x^2=x^2 \Leftrightarrow x^2\left(1-\frac{c^2}{a^2}\right)=X^2 \Leftrightarrow a^2X^2=b^2x^2$، فنحصل على $\frac{a}{b}=\frac{x}{X}$.

وهكذا يكون ابن السَّمْح قد عرَّف تآلفاً عموديّاً ذا محور BD ونسبة $\frac{a}{b}>1$، حيث يكون الشكل $ABBD$ صورة الدائرة ذات القطر BD؛ وهذا التآلفُ تمدُّدٌ.

٦-٢-٦ القطع الناقص كقطعٍ مستوٍ للأسطوانة القائمة

يُذكّر ابن السَّمْح أوّلاً بالنتائج الخاصّة بالقطوع المستوية لأسطوانة قائمة ذات قاعدتين دائريَّتين. وهو يُقدِّم، هنا، هذه النتائج كأنّها معروفة، وهذا ما يجعلنا نفترض أنّه قد درسها في أحد أقسام كتابه الذي لم يزل مفقوداً. أهمُّ هذه النتائج هي النتيجة التالية التي نوردها فيما يلي:

<ا> القطعُ المستويُ، لأسطوانة قائمة ذات قاعدتين دائريَّتين بمستوٍ P_1 يقطع المحور ولا يكون موازياً للقاعدة، هو قطعٌ ناقصٌ ذو مركز موجود على المحور. ويكون قطر الأسطوانة مساوياً للمحور الأصغر للقطع الناقص.

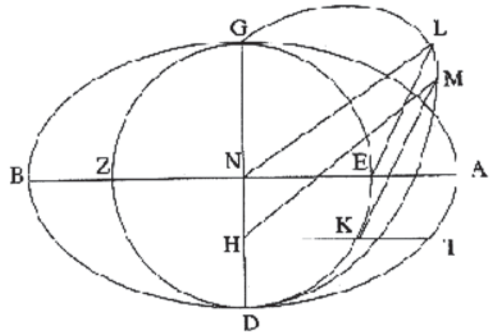
والقطعُ المستويُ، لهذه الأسطوانة بمستوٍ P_2 موازٍ للقاعدة ومارٍّ بمركز القطع الناقص، هو دائرة مساوية لدائرة القاعدة ومساوية للدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ ويكون قطر هذه الدائرة مساوياً للقطر الأصغر للقطع الناقص.

وإذا جعلنا المستويَ P_1 يدور حول هذا القطر الأصغر إلى أن يتطابق مع P_2، تتطابق الدائرة، المحاطة بالقطع الناقص، مع الدائرة التي هي قطع الأسطوانة بالمستوي P_2. يُبيِّن ابن السَّمْح، كما نرى، أنَّ دائرة المستوي P_2 تنطبق على الدائرة الصغيرة؛ وهي، في آن واحد، المسقطُ العموديُّ لهذه الأخيرة.

القضيَّة ٧ـ التآلف العموديُّ بالنسبة إلى المحور الأصغر.

ليكن معنا القطعُ الناقص $AGBD$ ذو المحورين AB وَ GD، مع $AB > GD$، وليكن مركزه N ولتكن الدائرة المحاطة ذات القطر GD. فإذا قطع خطٌّ موازٍ لـِ AB الخطَّ GD على النقطة H والدائرة على النقطة K والقطعَ الناقصَ على النقطة T، يكون معنا $\frac{a}{b}=\frac{AB}{GD}=\frac{HT}{HK}$.

إذا جعلنا القطع الناقص يدور حول GD، ترسم النقطة A دائرة في المستوي العموديّ في النقطة N على GD. تقطع هذه الدائرة العمودَ في Eعلى مستوي القطع الناقص على النقطة L. يوجَد القطع الناقص في الوضع DLG وهو قطع مستوٍ للأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائريّة.



ترسم النقطة T قوساً من دائرة مركزها H وتصل إلى النقطة M على المولِّد MK. والمثلّثان LNE وَ MHK قائما الزاوية ومتشابهان (لأنَّ $\widehat{N}=\widehat{H}$ بسبب توازي الأضلاع)، فيكون: $\frac{LN}{NE}=\frac{MH}{KH} \Leftarrow \frac{AN}{NE}=\frac{HT}{HK} \Leftarrow \frac{HT}{HK}=\frac{AB}{GD}$.

لازمة ضمنيّة: يكون معنا، في المثلّث القائم الزاوية LEN: $LN^2 = NE^2 + LE^2$، فنحصل على $c^2 = a^2 - b^2 = LE^2$، فتكون القطعة LE المسافة بين المركز والبؤرة.

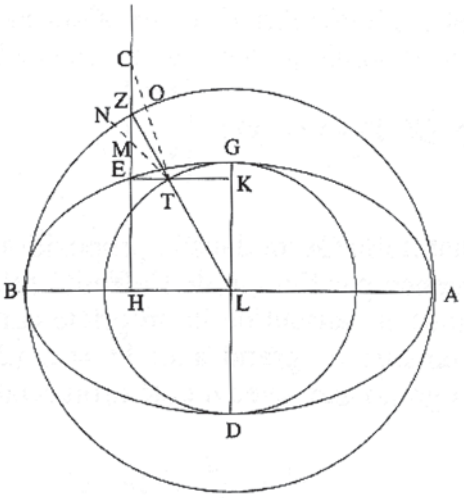
ستُستخدَم هذه النتيجة في القضيّتين ١٠ وَ ١١.

ملاحظة: القطع $AGBD$ هو انطباق القطع DLG على المستوي العموديّ في N على محور الأسطوانة؛ والدائرة DEG هي المسقط الأسطوانيّ للقطع الناقص DLG على نفس هذا المستوي.

القضيّة ٨ـ التآلف العموديّ بالنسبة إلى المحور الأعظم.

ليكن معنا القطعُ الناقص $AGBD$ ذو المحورين AB وَ GD، مع $AB > GD$، وليكن مركزه N ولتكن الدائرة المحيطة ذات القطر AB. فإذا قطع خطٌّ موازٍ لِـ GD الخطَّ AB على النقطة H والقطعَ الناقصَ على النقطة E والدائرة على النقطة Z، يكون معنا $\frac{ZH}{EH}=\frac{AL}{LG}=\frac{a}{b}$.

يقطع الخطُّ الموازي للخطّ AB والخارج من E الخطَّ GD على النقطة K ويقطع الدائرة المحاطة على النقطة T. يُبيِّن ابن السَّمْح بواسطة استدلال بالخُلْف وبالاستعانة بالقضيَّة ٧، أنَّ النقاط L، T وَ Z متسامتة. فيستخرِج عندئذ النتيجة.



ملاحظات -

١) يدرس ابن السَّمح القضيّة ٨ كأنّها لازمة للقضيّة ٧. ولنلاحظ أنّه كان بإمكانه أن يستخرِج، بنفس الطريقة كلازمة للقضيّة ٦، تآلفاً في الحالة التي يُستخدَم فيها تعريف القطع الناقص عن طريق البؤرتين.

٢) يكون القطع الناقص $AGBD$ صورة الدائرة ذات القطر AB في التآلف العموديّ، ذي النسبة $\frac{a}{b}$، الذي هو تمدُّدٌ؛ وهذا القطع الناقص هو، وفقاً للقضيّة ٨، صورة للدائرة ذات القطر AB في التآلف العموديّ، ذي النسبة $\frac{b}{a}$، الذي هو تقلّصٌ.

ولنعبِّر عن هذه النتيجة بوجه آخر، مستخدمين لغة تحليلية لم يعرفها ابن السَّمْح. لنتناول، في مَعْلَم متعامد، القطع الناقص $\boldsymbol{E}$ والدائرتين C_1 وَ C_2 بحيث يكون:

$$\boldsymbol{E} = \left\{(x, y), \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\right\}$$ مع $a > b$ ،

$C_1 = \left\{(X,Y), X^2 + Y^2 = b^2\right\}$ ، $C_2 = \left\{(X,Y), X^2 + Y^2 = a^2\right\}$ ،

وإذا رمزنا بِـ ψ وَ φ إلى التمدُّد والتقلُّص اللذين درسهما ابن السَّمْح، نحصل على:

$\boldsymbol{E} = \psi(C_1)$ وَ $\boldsymbol{E} = \varphi(C_2)$ مع:

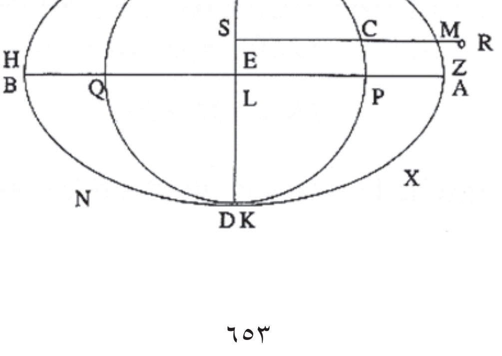
$$\varphi: (X,Y) \rightarrow (x,y): \left\{x = X, y = \frac{b}{a}Y\right\} \qquad \psi: (X,Y) \rightarrow (x,y): \left\{x = \frac{a}{b}X, y = Y\right\}$$

٣) لنُذكّر بأنَّ ثابت بن قرّة، في القضيّة ٣ من مؤلّفه "في قطوع الأسطوانة..."، يبدأ بدراسة التآلف بالنسبة إلى المحور الأعظم (وهذا التآلف تمدُّدٌ) منطلِقاً من الخاصَّة المميِّزة (المعادلة) للدائرة التي يكون المحورُ الأعظمُ قطرَها: $x(2a-x)=Y^2$، ومن معادلة القطع الناقص المنسوبة إلى المحور الأعظم، حيث يكون d الضلع القائم الخاص بهذا القطع: $\frac{d}{2a}x(2a-x)=y^2$؛ وهكذا يُبيِّن أنَّ: $\frac{b^2}{a^2}=\frac{d}{2a}=\frac{y^2}{Y^2}$. ويُبيِّن ثابت بن قرّة، بنفس الطريقة ، أنَّ بالإمكان دراسة التآلف العموديّ، بالنسبة إلى المحور الأصغر، الذي هو تمدُّد.

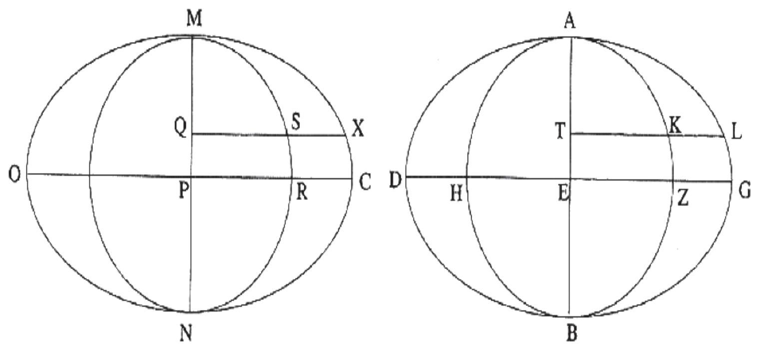
وهكذا يُبيِّن ابن السَّمْح في القضيّتين السادسة والسابعة أنَّ الشكل الدائريَّ المستطيل ذا المحورين $2a$ وَ $2b$، الحاصلَ استناداً إلى التعريف الذي يستخدِم البؤرتين، والقطعَ الناقصَ الحاصل بواسطة قطع مستوٍ للأسطوانة والذي له نفس المحورين السابقين، يُستخرَجان من دائرة ذات نصف قطر b بواسطة تمدّد ذي نسبة $\frac{a}{b}$. ثمَّ يعرض ويبرهن في القضيّة التالية تطابق هذين الشكلين.

القضيّة ٩ـ ليكن معنا "الشكل الدائريُّ المستطيل" $AGBD$ ذو المحورين AB وَ DG والقطعُ الناقص الحاصل بقطع مستوٍ $ZTHK$ بحيث يكون $ZH = AB$ وَ $TK = GD$ ؛ ويتطابق الشكلان نقطة مع نقطة.

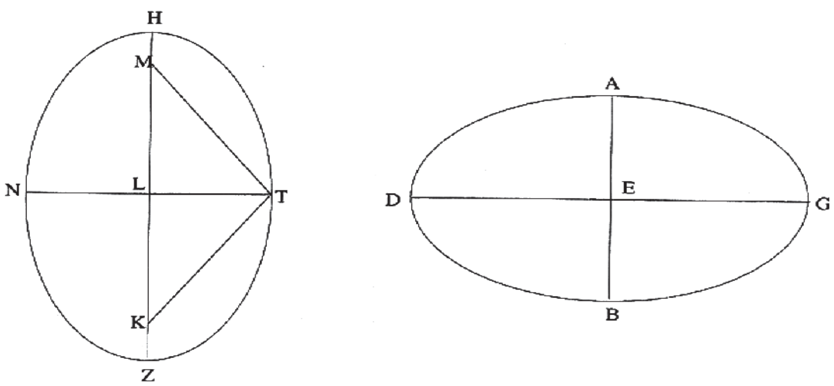
<u>الطريقة الأولى</u>: نحصل على النتيجة مباشرة بواسطة إطباق المحاور المتساوية ثنائيّاً واستخدام القضيّتين ٦ و ٧.



الطريقة الثانية: لا تختلف هذه الطريقة عن الطريقة الأولى، وهي تستخدِم أيضاً القضيَّتين ٦ وَ ٧، ولكنَّ المحاور لا تتطابق. يتناول ابن السَّمْح على المحور الأصغر لكلّ شكل نقطة على نفس المسافة من المركز ويُطبِّق المقدِّمة الأولى.



القضيّة ١٠- ليكن معنا القطع المستوي $AGBD$ ذو المركز E والمحورين AB وَ DG مع $DG > AB$. كيف نرسم منحنياً مساوياً له بواسطة طريقة البؤرتين؟



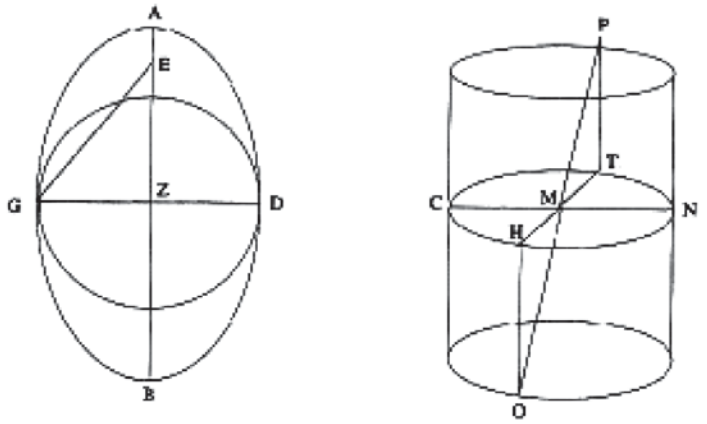
لتكن NT قطعة من خطّ مستقيم بحيث يكون $AB = NT$، ولتكن L وسط NT. وتكون النقطتان K وَ M بؤرتيْ القطع الناقص على المنصِّف العموديّ للقطعة NT، بحيث يكون:

$EG^2 = LT^2 + LK^2$ وَ $LK = LM$.

يكون معنا، وفقاً للازمة الضمنيّة، $a^2 = LT^2 + b^2 \Leftarrow c^2 = a^2 - b^2 = LT^2$. يكون معنا عندئذ $EG = TM = TK$. ثمَّ يقوم ابن السَّمْح بتحديد الرأسين الآخرين Z وَ H.

القضيّة ١١ـ ليكن معنا الشكل $AGBD$ المرسوم بواسطة طريقة البؤرتين، كيف نرسم قطعاً مستوياً مساوياً له؟

ليكن Z مركز $AGBD$ ولتكن E إحدى بؤرتيْه، ولنفرض $DG < AB$. لنأخذ في المستوي π دائرة ذات مركز M مساوية للدائرة ذات القطر DG. ليكن CN وَ HT قطرين متعامدين. القطع الناقص المطلوب هو القطعُ المستويُ لأسطوانة دورانية مبنية على الدائرة CHN؛ ويكون CN محوره الأصغر وَ PO محوره الأعظم، حيث تـُحَدَّد P باستخدام النتيجة الضمنية لفرضيات القضيّة ٧: $PT \perp \pi$ وَ $EZ = TP$،



يكون معنا عندئذ $ZA = EG = MP$. ويقطع المستوي CPN الأسطوانة وفقاً للقطع $NPCO$ الذي هو القطع المطلوب.

٦ـ٢ـ٧ مساحة القطع الناقص

يقوم ابن السَّمح، في هذا الفصل الذي يتضمَّن سبع قضايا، بتحديد مساحة القطع الناقص. القضيّة الأولى في هذا الفصل – ذات الرقم ١٢ هنا – هي مقدِّمة للقضيّة ١٣؛ أمّا القضيَّتان ١٧ وَ ١٨، فهما في الواقع صيغتان مختلفتان للنتيجة المُثبتة في القضيّة ١٦(اللازمة ١).

لنرمز بِـ S_1، S_2، E وَ Σ، إلى مساحات الدوائر التي لها على التوالي الأقطار 2b، 2a، 2r وَ

$2\sqrt{ab}$؛ وليكن S مساحة القطع الناقص، وليكن P_1 وَ P_2 المحيطين، حسب الترتيب، لِـ S_1 وَ S_2؛ النتائج المُثبَتة هي التالية:

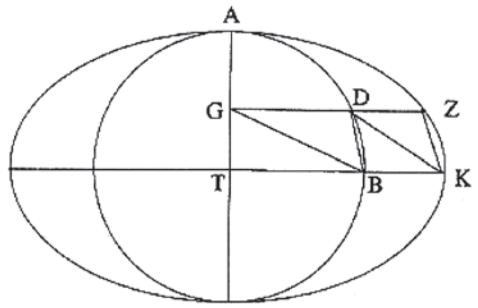
١٣: $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$؛ ١٤: $\frac{ab}{r^2}=\frac{S}{E}$؛ ١٥: $\frac{S}{S_1}=\frac{S_2}{S}$؛

١٦: $\frac{1}{2}P_1.a=S$، مع اللازمة $S\approx\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{14}\right)2a.2b$؛ ١٧: $\Sigma=S$؛

١٨: ليست سوى لازمة للقضية ١٦.

لنتناول هذه القضايا بالتتابع.

القضيّة ١٢- ليكن ATK ربع القطع الناقص ذي المركز T، مع $AT\perp TK$ وَ $AT<TK$، وليكن $ADBT$ ربع الدائرة المرفقة به. ليكن ZK وتراً وَ $ZG\perp AT$؛ ويقطع ZG ربع الدائرة على النقطة D. يكون معنا : $\frac{\text{مساحة المنحرف }(KZGT)}{\text{مساحة المنحرف }(BDGT)}=\frac{TK}{TA}=\frac{a}{b}$.



يستخدم البرهانُ التآلفَ العموديَّ بالنسبة إلى المحور الأصغر للقطع الناقص. يقسم ابن السَّمْح المنحرفين إلى مثلّثات، وليس هذا ضروريّاً. وذلك أنَّ للمربَّعين المنحرفين الارتفاعَ نفسه، فنحصل على: $\frac{\text{مساحة المنحرف }(KZGT)}{\text{مساحة المنحرف }(BDGT)}=\frac{TK+GZ}{TB+GD}$؛ ولكنَّ لدينا، وفقاً للقضيّة ٦ (أو القضيّة ٧):

$\frac{GZ}{GD}=\frac{TK}{TB}=\frac{a}{b}=\frac{TK+GZ}{TB+GD}$، فنحصل على: $\frac{\text{مساحة المنحرف }(KZGT)}{\text{مساحة المنحرف }(BDGT)}=\frac{a}{b}$.

ونقوم بطريقة مماثلة انطلاقاً من أيّ وتر آخر في ربع القطع الناقص المعنيّ بالأمر.

وإذا أعدنا نفس العمل لكلّ ربع من الأرباع الأخرى للقطع الناقص، يمكن أن نبرهن أنَّ نسبة مساحة المضلّع المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة المضلّع، المحاط بالدائرة والمُرْفَق بالمضلّع السابق، تساوي نسبة المحور الأعظم إلى المحور الأصغر.

القضيّة ١٣- إذا كانت S مساحة القطع الناقص ذي المحورين 2a وَ 2b، وإذا كانت S_1 مساحة الدائرة المحاطة ذات القطر 2b، يكون معنا: $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$.

يُبرهن ابن السَّمْح هذه القضيّة مستخدِماً الاستدلال بالخلف. لنتتبَّع طريقته:

ا) لنفرض أنَّ $\frac{S_1}{S}>\frac{b}{a}$.

لنضع $\frac{S_1}{L}=\frac{b}{a}$ مع $L<S$، فيكون $L+\varepsilon=S$.

لتكن P_1 مساحة المُعيَّن الذي تتشكّل رؤوسه من أطراف محوريْ القطع الناقص، فيكون معنا $\frac{1}{2}S<P_1$.

لنضاعف عدد أضلاع المضلّع المحاط بالقطع الناقص، ولنكرِّر العمليّة فنحصل بالتتابع على المضلّعات P_2،...، P_n، حيث يكون عدد أضلاع P_n مساوياً لـِ2^{n+1}. يكون معنا:

$$\frac{1}{2}S<P_1\Leftarrow\frac{1}{2}S>S-P_1\text{، }\ \frac{1}{2}(S-P_1)<P_2-P_1\Leftarrow\frac{1}{2^2}S>S-P_2\text{، }\ldots\text{،}$$

$$\frac{1}{2}(S-P_{n-1})<P_n-P_{n-1}\Leftarrow\frac{1}{2^n}S>S-P_n.$$

إذا كان $0<\varepsilon$ معلوماً ، يوجَد عندئذ $N\ni N^*$، بحيث يكون معنا، لكلّ عدد n مع $N<n$، المتباينة $\frac{1}{2^n}S<\varepsilon$ ، فيكون إذاً: $S-P_n<\varepsilon$ وَ $L<P_n$.

لتكن P'_n، عندئذ، مساحة المُضلّع المحاط بالدائرة ذات المساحة S_1 والمستخرَج من المضلّع ذي المساحة P_n بالتآلف العموديّ ذي النسبة $\frac{b}{a}$. نحصل من القضيّة ١٢ على

$\frac{P'_n}{P_n}=\frac{b}{a}$، فنحصل على $\frac{S_1}{L_n}=\frac{P'_n}{P_n}$؛ ولكنَّ $L < P_n$ وَ $S_1 > P'_n$، فيكون معنا: $\frac{S_1}{L_n}>\frac{P'_n}{P_n}$، وهذا مستحيل.

ب) لنفرض أنَّ $\frac{S_1}{S}<\frac{b}{a}$، أي أنَّ $\frac{S}{S_1}>\frac{a}{b}$.

لنفرض أنَّ $\frac{a}{b}=\frac{S}{L'}$ مع $L' < S_1$، مع $\varepsilon = S_1 - L'$.

نقسم محيط الدائرة إلى 2^2، 2^3، ...، 2^{n+1} جزءاً، وهذا يرجع إلى أخذ المضلّعات P'_2، P'_2، ...، P'_n. يكون معنا بالتتابع:

$\frac{1}{2}S_1 > (S_1 - P'_1)$، $\frac{1}{2^2}S_1 > S_1 - P'_2$، ....، $\frac{1}{2^n}S_1 > S_1 - P'_n$،

يوجَد عندئذ $N \in \mathbf{N}^*$، بحيث يكون معنا، لكلّ عدد n مع $n > N$، المتباينة $\varepsilon > \frac{1}{2^n}S_1$، فيكون إذاً: $\varepsilon > S_1 - P'_n$ وَ $L' < P'_n$. ولكنَّ إذا كانت P_n مساحة المُضلّع المحاط بالقطع الناقص والمرفَق بالمضلّع ذي المساحة P'_n المحاط بالدائرة، يكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٢، $\frac{P_n}{P'_n}=\frac{a}{b}$، فنحصل على $\frac{S}{L'}=\frac{P_n}{P'_n}$؛ ولكنَّ $L' < P'_n$ وَ $S > P_n$، فنحصل على $\frac{S}{L'}>\frac{P_n}{P'_n}$، وهذا مستحيل.

وهكذا نستنتج من ا) وَ ب) أنَّ $\frac{S}{S_1}=\frac{a}{b}$.

ملاحظة ١ـ لنلاحظ أنَّ طريقة الاستدلال بالخُلْف المُطبَّقة هنا ليست الطريقة الاعتياديّة.

نـُريد أن نـُبرهِن أنَّ $\frac{S}{S_1}=\frac{a}{b}$. فنفرض أنَّ:

ا) $\frac{b}{a}=\frac{S_1}{L}$ مع $L < S$، فنحصل على $\frac{L}{S_1}>\frac{S}{S_1}$.

ب) $\frac{b}{a}=\frac{L'}{S}$ مع $L' < S_1$، فنحصل على $\frac{S}{L'}<\frac{S}{S_1}$.

وتؤدّي هاتان الحالتان إلى استحالة. ولكن، في الحالة الاعتياديّة، يُدرَس القسم ا) فيوضَع $\frac{b}{a}=\frac{S_1}{L'}$ مع $S < L'$.

ونلاحظ أنَّ ابن السَّمْح يقول، وفقاً للترجمة العبريّة الموجودة بين يدينا، "إنَّ نسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم ليست مساوية إلى نسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة القطع الناقص أو أعظم من مساحة القطع الناقص، وهذا ما لا يصف بدقّة النهجَ الذي يتّبعه.

ملاحظة ٢- يُبيِّن ابن السَّمْح، انطلاقاً من التآلف العموديّ، أنَّ لكلّ عدد n ، مع $N < n$، تكون النسبة $\frac{P_n}{P'_n}$، لمساحة المضلّع المحاط بالقطع الناقص ذي المساحة S إلى مساحة المضلّع المماثل المحاط بالدائرة ذات المساحة S_1، مساوية لنسبة التآلف $\frac{a}{b}$.

ويبيِّن، استناداً إلى المساواة $\frac{a}{b}=\frac{P_n}{P'_n}$، أنَّ لدينا أيضاً $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$.

والنسبة بين المساحتين تبقى بدون تغيُّر، عند المرور إلى الحدّ، أي عندما يسعى n إلى ما لا نهاية (انظر شرح القضيّة ١٤ في مؤلَّف ثابت بن قرّة "في قطوع الأسطوانة...").

القضيّة ١٤- نسبة S، مساحة القطع الناقص ذي المحورين 2a وَ 2b، إلى E، مساحة دائرة ذات قطر 2r، تساوي : $\frac{S}{E}=\frac{2a}{Z}$، على أن تـُحقّق Z المعادلة $\frac{Z}{2r}=\frac{2r}{2b}$(فنحصل على $\frac{S}{E}=\frac{ab}{r^2}$).

لتكن S_1 مساحة الدائرة، ذات القطر2b، المحاطة بالقطع الناقص. يكون معنا (القضيّة الثانية من المقالة الثانية عشرة من كتاب "الأصول"): $\frac{4b}{4r^2}=\frac{S_1}{E}$، ولكنَّ معنا، وفقاً للفرضيّات، $4r^2=2bZ$، فنحصل على: $\frac{2b}{Z}=\frac{S_1}{E}$؛ ويكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٣، $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$، فنحصل على: $\frac{2a}{Z}=\frac{S}{E}$.

ملاحظة ـ يمكن أن نستنتج من ذلك مباشرة أنَّ $\frac{ab}{r^2}=\frac{S}{E}$، وهي النتيجة الحاصلة في القضيّة الخامسة من كتاب "في الكرة والأسطوانة" لأرشميدس.

القضيّة ١٥- نسبة S_1، مساحة الدائرة ذات القطر $2b$ المحاطة بالقطع الناقص، إلى S، مساحة القطع الناقص، مساوية لنسبة هذه المساحة S إلى S_2، مساحة الدائرة ذات القطر $2a$ المحيطة بالقطع الناقص: $\frac{S_1}{S}=\frac{S}{S_2}$.

البرهان مباشر، وهو يستخدِم القضيّتين ١٣ وَ ١٤. يكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٣: $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$، كما يكون وفقاً للقضيّة ١٤: $\frac{ab}{a^2}=\frac{S}{S_2}$، فيكون معنا، إذاً: $\frac{S_1}{S}=\frac{S}{S_2}$.

يستنتج ابن السَّمْح مما سبق لازمتين:

١) $\left(\frac{S}{S_2}\right)^2=\frac{S_1}{S_2}$ وَ $\left(\frac{S_2}{S}\right)^2=\left(\frac{S}{S_1}\right)^2=\frac{S_2}{S_1}$

٢) $\frac{b}{a}=\frac{S}{S_2}$، (وهذا ما يُستنتَج مباشرة من القضيّة ١٤).

القضيّة ١٦- تتساوى S، مساحة القطع الناقص، مع مساحة المثلّث القائم الزاوية الذي يكون أحد أضلاع زاويته القائمة مساوياً لـِ p_1، محيط الدائرة المحاطة بالقطع الناقص وذات القطر $2b$، ويكون الضلع الآخر لهذه الزاوية مساوياً لـِ a، نصف المحور الأعظم: $\frac{1}{2}p_1.a=S$.

يكون معنا، وفقاً للقضيّة الأولى من كتاب "في مساحة الدائرة" لأرشميدس: $\frac{1}{2}p_1.b=S_1$؛

كما يكون، وفقاً للقضيّة ١٣: $\frac{a}{b}=\frac{S}{S_1}$، فنحصل على النتيجة.

وإذا كان p_2 محيط الدائرة المحيطة بالقطع الناقص، ذات القطر $2a$، يكون معنا: $\frac{1}{2}p_2.b=S$.

اللازمة الأولى - $\frac{22}{7}a\approx\frac{1}{2}p_2$، فنحصل على $\frac{22}{7}ab\approx S$؛ ولقد قدَّم ابن السَّمْح هذه النتيجة على الشكل التالي: $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{14}\right)2a.2b\approx S$.

اللازمة الثانية – إذا كان S وَ $2a$ (أو $2b$ على التوالي) معلومين، نحصل على $2b$(أو $2a$ على التوالي).

القضيّة ١٧- تتساوى مساحة كلّ قطع ناقص مع مساحة الدائرة التي يكون قطرها مساوياً للمتوسط المتناسب مع محوريْ القطع الناقص $2a$ وَ $2b$.

لنرمز بِـ S_1 إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2b$، ولنرمز بِـ S_2 إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2a$، ولنرمز بِـ Σ إلى مساحة الدائرة ذات القطر $2r$ بحيث يكون $\frac{2a}{2r}=\frac{2r}{2b}$؛ فنحصل على $\sqrt{ab}=r$. ويكون لدينا:

$\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{S_2}{\Sigma}\right)^2$ (القضيّة ٢ من المقالة ١٢ والقضيّة ٢٢ من المقالة ٦ من كتاب "الأصول")،

فنحصل على $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{S_2}{S}\right)^2$؛ ولكنّنا رأينا، في القضيَّة ١٥، أنَّ $\frac{S_2}{S_1}=\left(\frac{S_2}{S}\right)^2$، فيكون معنا إذاً:

$$\Sigma=S.$$

ملاحظة – يُثبت ثابت بن قرّة مباشرة، في القضيّة ١٤ من كتابه "في قطوع الأسطوانة..."، أنَّ S، مساحة القطع الناقص، مساوية لـِ Σ ، مساحة الدائرة ذات نصف القطر $\sqrt{ab}$. وهو يستخدم طريقة الاستدلال بالخُلْف في كلّ من الحالتين ا) $S<\Sigma$ وَ ب) $S>\Sigma$.

يُدخِل ثابت بن قرّة الدائرة ذات المساحة S_2 وذات القطر $2a$، المحور الأعظم للقطع الناقص؛ كما يستخدِم التآلف العموديّ بالنسبة إلى هذا المحور الأعظم. وهو يُرفِق بالمضلّع، ذي المساحة P_n، المحاط بالقطع الناقص، المُضلّعَ ذا المساحة P'_n، المحاط بالدائرة ذات القطر $2a$. يُبيِّن ثابت بن قرّة أنَّ $\frac{b}{a}=\frac{P_n}{P'_n}$؛ ولكنَّ لدينا، وفقاً للقضيّة ٢ من المقالة ١٢ من كتاب "الأصول": $\frac{b}{a}=\frac{ab}{a^2}=\frac{\Sigma}{S_2}$، فيكون : $\frac{b}{a}=\frac{\Sigma}{S_2}=\frac{P_n}{P'_n}$؛ وهذه المتساوية هي التي تسمح له أن يُبيِّنَ أنَّ ا) وَ ب) تؤدِّيان إلى الاستحالة، فنحصل على $S=\Sigma$ وَ $\frac{b}{a}=\frac{S}{S_2}$.

لا يستخدِم ثابت بن قرّة، إذاً، سوى الدائرة ذات القطر $2a$ والدائرة Σ، في حين أنَّ ابن السَّمْح يستخدم بالإضافة إلى هاتين الدائرتين الدائرة ذات القطر $2b$ والمساحة S_1.

ولنلاحظ، مع ذلك، أنَّ هذين الريّاضيّين يستخدمان القضيّة ٢ من المقالة ١٢ من كتاب "الأصول"، ونسبة المضلَّعين اللذين يتقابلان بواسطة تآلف عموديّ يكون تقلّصاً لأحدهما وتمدُّداً للآخر. يُثبت ابن قرّة هذه النسبة خلال القيام بالبرهان، بينما يُقدِّمها ابن السَّمْح كنتيجة للقضيّة ١٢.

القضيّة ١٨- يساوي كلُّ قطع ناقص مقدارَ $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{14}\right)$ من المستطيل المحيط به:

$$S\approx\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{14}\right)2a.2b.$$

لقد أثبِتت هذه النتيجة في اللازمة الأولى للقضيّة ١٦. ولكنَّ ابن السَّمح يقدِّم لها، هنا، برهانين. يرتكز البرهان الأوَّل على استخدام القضيّة السابقة والنتيجة و) الواردة في

المقدِّمات الأولى، أي القضيّة الثانية من كتاب "مساحة الدائرة" لأرشميدس. أمّا البرهان الثاني فهو يرتكز أيضاً على القضيّة السابقة باستخدام القضيّة ٢ من المقالة ١٢.

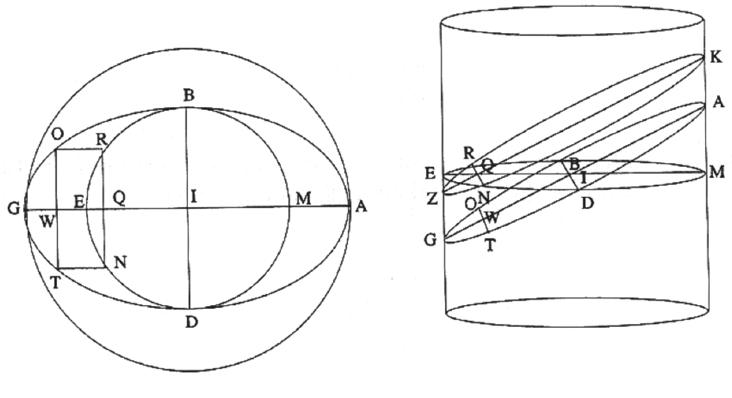
ويُمكن أن نعطي شكلاً آخر لصيغة هذه القضيّة:

النسبة $\frac{S}{2a.2b}$ تبقى مساوية لـِ $\left(\frac{5}{7}+\frac{1}{14}\right)$، مهما كان القطع الناقص.

٦-٢-٨ أوتار وأسهم القطع الناقص

يدرس ابن السَّمْح في القضيّتين ١٩ وَ ٢٠<ا> الأوتار الموازية لأحد محوري القطع الناقص والأسهم الخاصّة بها.

القضيّة ١٩- ليكن معنا القطع الناقص $ABGD$ ذو المحورين AG وَ BD مع $AG > BD$؛ ولتكن C_1 الدائرة ذات القطر BD. ليكن OT وترَ القطع الناقص العموديَّ في W على AG؛ لنرفق بـِ OT الوترَ RN في الدائرة C_1 بحيث يكون RN موازياً ومساوياً لـِ OT، وبحيث يقطع الوتر RN القطرَ، EM في الدائرة C_1، على النقطة Q. تقسم النقطتان W وَ Q، عندئذ، AG وَ EM حسب الترتيب بنفس النسبة: $\frac{QE}{QM}=\frac{WG}{WA}$.



يرجِع ابن السَّمْح، هنا، إلى الطريقة التي كان قد اتّبعها في القضيّة ٧؛ فهو يضع القطع الناقص على الأسطوانة الدورانيّة ذات القاعدة C_1، أي الطريقة المستخدَمة في دراسة التآلف العموديّ.

ثمَّ نجعل الدائرة C_1 تدور حول قطرها BD حتّى تصل إلى مستوٍ موازٍ لمستوي القاعدة. ونـُخرِج من الوتر RN مستوياً موازياً لمستوي القطع الناقص. ويكون قطع الأسطوانة بهذا المستوي قطعاً ناقصاً، $KRZN$، مساوياً للقطع الناقص $ABGD$. يكون معنا: $RN = OT$، فنحصل على $KQ = AW$. والمثلّثان KQM وَ ZQE متشابهان، فيكون معنا: $\frac{EQ}{MQ} = \frac{QZ}{QK}$؛

فنحصل على: $\frac{EQ}{MQ} = \frac{GW}{AW}$.

ونحن نرى، من جهة أخرى، أنَّ النتيجة حاصلة مباشرة من التآلف العموديّ ψ، ذي النسبة $\frac{a}{b}$، بالنسبة إلى المحور الأصغر. يكون معنا : $O = \psi(R)$ ، $T = \psi(N)$؛ والنقطة W لها نفس الإحداثيّة الأولى التي للنقطتين T وَ O، كما أنَّ للنقطة Q نفس الإحداثيّة الأولى التي للنقطتين R وَ N، فيكون معنا: $\frac{b}{a} IQ = IW$.

ويكون معنا، أيضاً: $\frac{b}{a} IE = IG$ وَ $\frac{b}{a} IM = IA$، فيكون $\frac{b}{a} EQ = GW$ وَ $\frac{b}{a} QM = WA$، فنحصل على $\frac{QE}{QM} = \frac{WG}{WA}$.

ملاحظة ـ الفكرة، هنا، هي التالية: تتساوى النسبة، بين السهمين GW وَ EQ الخاصّين بالوترين المتماثلين OT وَ RN، مع نسبة التآلف $\frac{GW}{EQ} = \frac{a}{b}$.

القضيّة ٢٠- إنَّ نصّ القضيّة ٢٠ مُشوَّشٌ، ولقد أهمِلت بعض فقراته، كما يبدو، من قِبَل النسّاخ أو المترجِم. وهكذا يلاحظ ابن السَّمْح، في بداية هذه القضيّة، أنَّ المسألة السابقة تـُعالَج بنفس الطريقة، إذا تناولنا الدائرة المحيطة مع وترين متساويين، أحدهما في القطع الناقص والآخر في الدائرة، على أن يكونا عموديّين على القطر الأصغر.

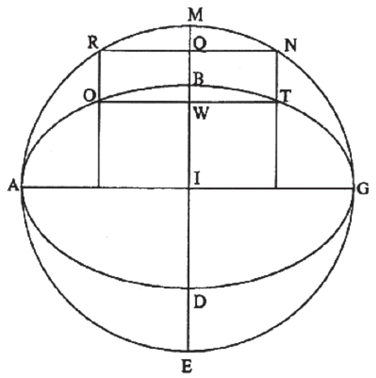
ويُمكننا أن نعيد كتابة النصّ الناقص لأجل إثبات القول السابق.

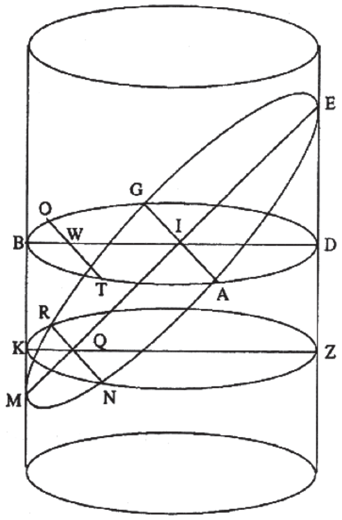
ليكن $ABGD$ قطعاً ناقصاً، ولتكن الدائرة ذات القطر AG محيطة به، ولتقطع الخطّ BD على النقطتين M وَ E. وإذا كان الوتر OT في القطع الناقص مساوياً للوتر RN في الدائرة،

وإذا كان OT عموديّاً على BD في النقطة W وكان RN عموديّاً على EM في النقطة Q، يكون معنا: $\frac{QM}{QE} = \frac{WB}{WD}$.

لنأخذ القطع الناقص كقاعدة لأسطوانة قائمة، ولنجعل الدائرة المحيطة تدور حول AG حتّى تصل النقطة M على الخطّ المولِّد الذي يمرُّ بالنقطة B؛ فنحصل على قطع مائل دائريّ $AEGM$ للأسطوانة. ونـُخرِج من الوتر RN مستوياً موازياً للمستوي $ABGD$، فيقطع الأسطوانة وفقاً للقطع الناقص $NZRK$، ويكون معنا: $OT = RN$، $KQ = BW$ وَ $QZ = WD$. والمثلّثان القائما الزاوية KMQ وَ QZE متشابهان، فننهي البرهان كما جرى في القضيَّة ١٩.

والنتيجة حاصلة بفضل التآلف φ العموديّ، ذي النسبة $\frac{b}{a}$، بالنسبة إلى المحور الأعظم؛ وهو التآلف الذي كان ابن السَّمْح قد أشار إليه؛ يكون معنا: $O = \varphi(R)$ ، $T = \varphi(N)$.





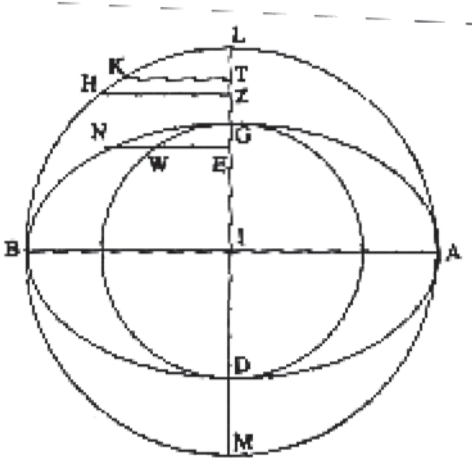
ولكنَّ للنقطة W نفس الإحداثيّة الثانية المشتركة للنقطتين T وَ O، كما أنَّ للنقطة Q نفس الإحداثيّة الثانية المشتركة للنقطتين R وَ N. يكون معنا، إذاً، $IW = \frac{b}{a} IQ$، ويكون معنا، أيضاً:

$IB = \frac{b}{a} IM$ وَ $ID = \frac{b}{a} IE$، فنحصل على $\frac{WD}{EQ} = \frac{WB}{QM} = \frac{b}{a}$، فيكون $\frac{WB}{WD} = \frac{QM}{QE}$.

والفكرة، هنا، هي دائماً أنَّ نسبة السهمين المتماثلين مساوية لنسبة التآلف $\frac{b}{a}$.

يعود ابن السَّمْح لاحقاً، في القضيَّة ٢٠<ا>، إلى هذه القضيَّة الأخيرة ويبرهنها، كما يلي، مستخدِماً استدلالاً بالخُلْف.

ليكن معنا القطعُ الناقص $AGBD$ ذو المحور الأعظم AB والمركز I، G؛ ولتكن $ALBM$ الدائرة ذات القطر AB. وليكن في القطع الناقص وفي الدائرة نصفا وترين NE وَ HZ بحيث يكون $NE = HZ$، $GD \perp NE$ وَ $HZ \perp LM$، فيكون، عندئذ، $\frac{ZL}{ZM} = \frac{EG}{ED}$.



وإذا لم يكن الأمر كذلك، ستوجَد نقطة T على LM، بحيث يكون $Z \neq T$ وَ $\frac{TL}{TM} = \frac{EG}{ED}$.

فإذا أخرجنا نصف الوتر TK بحيث يكون $TK \perp LM$، يكون معنا وفقاً للمقدِّمة الأولى: $\frac{EW}{TK} = \frac{IG}{IL} = \frac{b}{a}$. ولكنَّ لدينا، وفقاً للقضيّة ٦(أو ٧)، $\frac{EW}{EN} = \frac{b}{a}$، فيكون $EN = TK$؛ وهذا مستحيل لأنَّ $EN = HZ$.

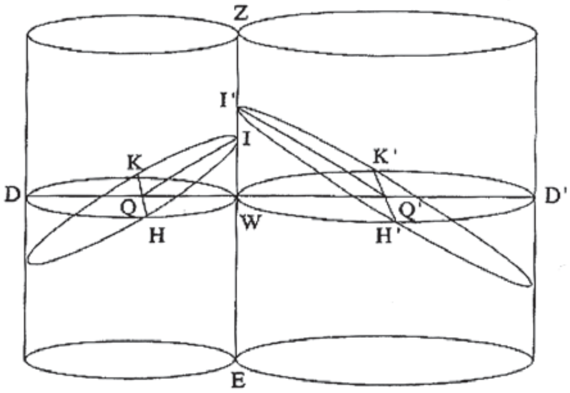
وهذا البرهان هو، بوضوح، أسرع من البرهان السابق.

لنلاحظ أنَّ ابن السَّمْح يكون إذاً قد أثبت، في القضيّة ١٩ وكذلك في القضيّة ٢٠<ا>، النسبة بين سهميْ وترين متماثلين في أحد التآلفات العمودية التي ترفق قطعاً ناقصاً إلى إحدى الدائرتين التي يكون قطرها مساوياً لأحد محوري القطع الناقص.

ولنلاحظ أوّلاً، لكي نفهم الفقرة <ب>، أنَّ كلَّ دائرة تـُحدَّد بشكل وحيد إذا كان وترٌ لها وسهمُه معلومين. وذلك لأنَّ المعادلة $x(d-x) = y^2$ تبيِّن أنَّ إعطاء الوتر $2y$ والسهم x يسمح

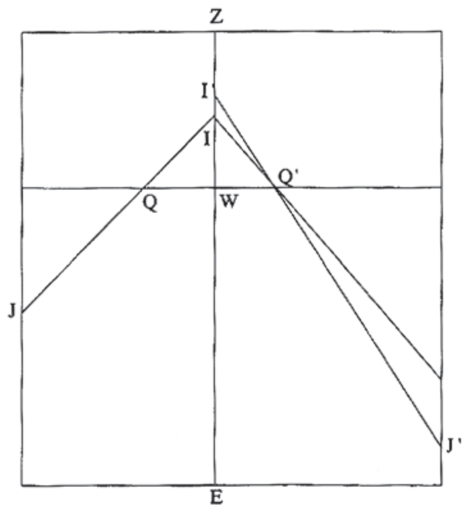
بتحديد d. ولكنَّ معادلة القطع الناقص، ذي المحورين $2a$ وَ $2b$، يمكن أن تُكتب: $\frac{b^2}{a^2}x(2a-x)=y^2$؛ وهذا ما يبيِّن أنَّ إعطاء الوتر $2y$ والسهم x المرفَق به لا يسمح بحساب a وَ b. وهذا يعني أنَّ الوتر والسهم، إذا كانا معلومين، لا يسمحان بتحديد قطع ناقص وحيد. يجب، لأجل ذلك، أن نفرض معلومة إضافيّة. وهذا، بوضوح، ما يلفت ابن السَّمح النظرَ إليه، عندما يقول إنَّ إعطاء الوتر والسهم والقطر يسمح بتحديد القطع الناقص، ولكنَّ من الممكِن أن يكون السهمُ والوترُ مشتركين بين هذا القطع الناقص وبين قطع ناقص آخر.

إنَّ نصّ الفقرة <ب>، مثل نصّ الفقرة <ا>، بشكل واضح، غير كامل. فهل يكون هذا النقص راجع إلى النّسَّاخ أم إلى المترجِم؟ نحن لا نعرف شيئاً عن هذا الأمر. وهذا، فيما يلي، ما نعتقد أنّه قد سقط سهواً في هذا النصّ.



ليكن ℓ_1 وَ ℓ_2 طولا الوتر والسهم. يبدو أنَّ ابن السَّمْح، وفقاً للشكل، يأخذ في البداية أسطوانة أولى، حيث يكون WD قطر دائرة قاعدتها مع $\ell_1 < WD$، ثم يضع في هذه الدائرة الوترَ HK ذا الوسط Q بحيث يكون $HK = \ell_1$. يُمكن أن نضع على الأسطوانة القائمة، التي لها هذه الدائرة كقاعدة، قطعاً ناقصاً ذا محورٍ أصغر مساوٍ لِـ WD، بحيث يكون طول السهم QI للوتر HK مساوياً لِـ ℓ_2، وتكون النقطة I على الخطّ المولّد EZ الذي يمرُّ بالنقطة W [انظر، بخصوص تحديد I، الملاحظة أدناه]. ليكن IJ المحور الأعظم. يأخذ ابن السَّمْح أسطوانة ثانية، ذات قطر WD' مع $WD < WD'$، مماسّة للأسطوانة الأولى على الخطّ المولِّد

EZ ؛ وليكن، في الدائرة ذات القطر WD'، وترٌ $H'K'$ مع $\ell_1 = HK = H'K'$. يكون معنا، عندئذ، $WQ > WQ'$، فنحصل على $QI > Q'I$. فالقطع الناقص $H'IK'$ على الأسطوانة الثانية لا يُشكّل حلاً للمسألة.



ولكن يوجَد على WZ نقطة، هي I' ، بحيث يكون $\ell_2 = QI = Q'I'$، فيكون القطع الناقص حلاً للمسألة ($\ell_1 = H'K'$ وَ $\ell_2 = Q'I'$). ولكنَّ هذين القطعين غيرُ متساويين (إذ إنَّ محوريهما الأصغرين مختلفين، فهما مساويان لقطريْ الأسطوانتين).

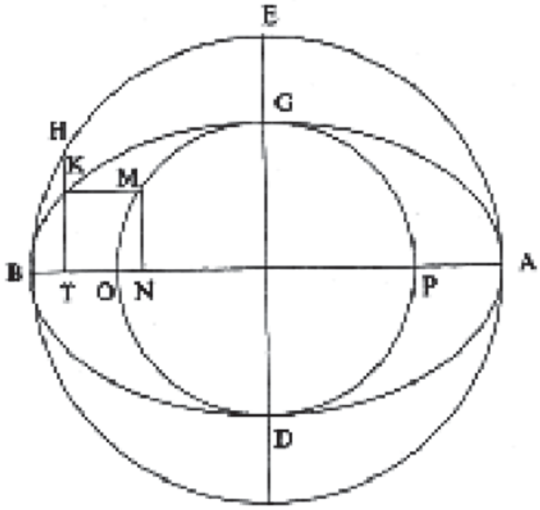
نكون إذاً قد برهنّا أنّه إذا كان معنا وترٌ وسهمٌ والمحور الأصغر – الذي هو قطر الأسطوانة – فإنَّ القطعَ الناقصَ يكون محدَّداً؛ ولكن إذا كان معنا الوتر والسهم فقط، يوجَد عددٌ غير منتهٍ من القطوع الناقصة التي تـُحقّق شروط المسألة.

ملاحظة – لا يُمكن تحديد النقطة I إلا إذا كان معنا: $QW < \ell_2 = QI$. وهذا يتوافق مع الملاحظة التي قمنا بها حول النّسَب بين الأسهم في القضيّة ١٩. يجب أن يكون معنا: $\frac{2a}{2b} = \frac{\ell_2}{QW}$، مع $WD = 2b$، ويكون $2a$ مساوياً للمحور الأعظم المطلوب.

يسمح اختيارُ الطول QW المرفَق بالطول المعلوم HK، مع $\ell_1 = HK$ وَ $\ell_2 > QW$، بتحديد دائرة وحيدة ذات قطر مساوٍ لـِ WD.

والفقرة <جـ>، المُدخَلة في نصّ القضيّة ٢٠، هي برهان آخر للقضيّة ٨ التي بُرهنت بطريقة الخـُلـْف استناداً إلى القضيَّة ٧. إنَّ لدينا، هذه المرّة، برهاناً مباشِراً. هل هذا هو السبب الذي جعل ابن السَّمْح يتناول ثانية، هنا، هذه القضيّة؟ نورد هذا البرهان فيما يلي.

ليكن معنا القطع الناقص $AGBD$ ذو المحور الأعظم AB، ولتكن AEB دائرته العظمى. ليكن TH عمودياً على AB، وليقطع TH القطعَ الناقص على النقطة K والدائرة على النقطة H، فيكون معنا، عندئذ: $\frac{AB}{PO}=\frac{HT}{TK}$، حيث يكون PO قطر الدائرة الصغيرة.



ليكن KM موازياً للخطّ AB وليكن MN عمودياً على AB، فيكون معنا $MN = KT$.

ويكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٩: $\frac{ON}{NP}=\frac{BT}{TA}$؛ كما نحصل من المقدِّمة الأولى على $\frac{AB}{PO}=\frac{HT}{MN}$،

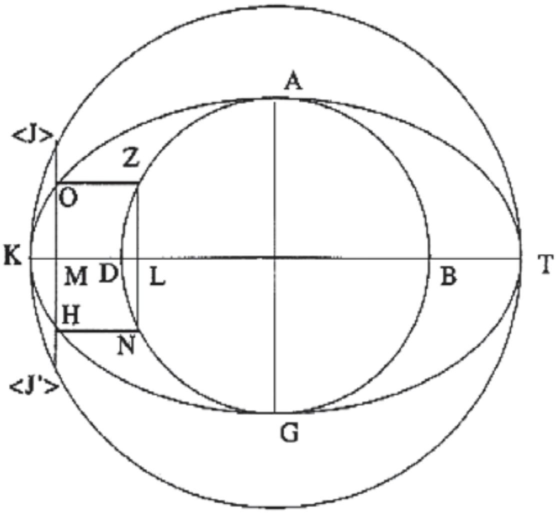
فنحصل على: $\frac{AB}{PO}=\frac{HT}{TK}$.

لقد خضع نصّ القضيّة التالية، دون شكٍّ، لبعض التحويرات. تدُلُّ على ذلك بعض الإشارات؛ وأولى هذه الإشارات هي أنَّ ابن السَّمح يُخبِرنا في الصيغة نفسها لهذه القضيّة أنّه سيقوم بحساب مساحات لقِطَعٍ من القطع الناقص؛ ولكنَّ هذا الحساب لم يَرِد في أيّ قسم من أقسام النصّ.

القضيّة ٢١- إذا كان وترٌ للقطع الناقص معلوماً، وإذا كان سهمُ الوتر وأحدُ محوريْ القطع الناقص معلومين، كيف نحسب المحور الثاني؟ وكيف نحسب مساحة أيَّة قطعة من القطع الناقص أو أيِّ عنصر آخر مرفَقٍ بالقطع الناقص؟

يشير ابن السَّمح، عندئذ، إلى ثلاث طرائق لحساب طول المحور الثاني؛ وسنطبِّق هذه الطرائق على المثال الوارد أدناه.

مسألة: ليكن معنا القطعُ الناقص $KATG$ ذو المحور الأعظم KT والمحور الأصغر AG. وليكن OH الوترَ ووسطَه M وسهمَه KM. والمطلوب هو حساب AG، علماً بأنَّ $OMH = 8$، $KM = 3$، وَ $KT = 15$.



<u>الطريقة الأولى</u>: يكون معنا $OM^2 = 4^2$، $\frac{KT}{KM} = 5$ وَ $\frac{KT}{MT} = \frac{5}{4}$؛ فنحصل، عندئذ، على AG^2، إذا ضربنا هذه الأعداد الثلاثة ببعضها البعض. يُطبِّق ابن السَّمْح، هنا، القضيّة ١٩.

وذلك أنّنا، إذا أخذنا بعين الاعتبار أنّ $OM = 2$، $ZL = 4$، $\frac{DB}{DL} = 5$ وَ $\frac{DB}{LB} = \frac{5}{4}$، وأنّ لدينا، في الدائرة، $ZL^2 = DL.LB = \frac{DB}{5}.\frac{4DB}{5} = 16$، يكون معنا، بالفعل،

$DB^2 = 100$، $AG = DB = 10$.

الطريقة الثانية: الحساب الوارد في النصّ:

$\frac{KT}{4.KM} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$ ، $\frac{KT}{MT} = \frac{5}{4}$ ، وَ $AG^2 = 64.\frac{KT^2}{4.KM.MT}$.

ملاحظة ـ تُكتَب عبارة AG^2 وفقاً للمعطيات كما يلي: $AG^2 = \frac{OM^2.KT^2}{KM.MT}$.

وذلك أنَّ $\frac{DL}{DB} = \frac{KM}{KT}$ وَ $\frac{LB}{DB} = \frac{MT}{KT}$ (وفقاً للقضيَّة ١٩). ويكون معنا في الدائرة، من جهة أخرى، $ZL^2 = OM^2 = DL.LB$ ، $OM^2 = DB^2.\frac{KM.MT}{KT^2}$ ،

فنحصل على: $DB^2 = AG^2 = \frac{OM^2.KT^2}{KM.MT}$.

وهكذا لا يكون معنا $\frac{64}{4} = 16 = OM^2$ إلا في الحالة التي يكون فيها $OM = 4$.

الطريقة الثالثة: $4KM.MT = 4.3.12 = 144$ ، $KT^2 = 15^2$ ، $OH^2 = 8^2$ ،

فيكون $\frac{OH^2.KT^2}{4KM.MT} = AG^2 = \frac{14.400}{144} = 100$.

ونلاحظ أنّه إذا قطع الخطّ OM الدائرة العظمى على النقطتين J وَ J'، يكون معنا: $KM.MT = MJ^2$ ، $4KM.MT = JJ'^2$ ، $\frac{TK^2.OH^2}{JJ'^2} = AG^2$ وَ $\frac{TK}{AG} = \frac{JJ'}{OH}$ (وفقاً للقضيّة ٨).

وينتهي النصّ بالمقدِّمة التالية:

المقدّمة ٤ ـ ليكن A عدداً بحيث يكون $A = B+G$ ، مع $B \neq G$. لنضع $D = \frac{A}{B}$ ، $E = \frac{A}{G}$ ، $H = D.E$ ، $Z = B.G$ ؛ ونريد أن نبيِّن أنَّ $Z.H = A^2$. وهذا ما هو بديهيّ لأنَّ $H = \frac{A^2}{BG} = \frac{A^2}{Z}$.

لنلاحظ أنَّ نتيجة هذه المقدِّمة قد استُخدِمت، مرَّتين، خلال البرهان الوارد في النصّ. وهكذا لا يسمح مُستَوى الصيغة أو مستوى البرهان أو مكان هذه الفقرة في النصّ، بنسبة

هذه الفقرة إلى ابن السَّمْح، أي إلى مؤلّف بقيّة النصّ. إنّه من البديهيّ أنَّ النصّ قد حُرِّف في عدّة مواضع، ابتداء من القضيّة ٢٠.

٦-٣ النصّ والترجمة

لقد وصلت إلينا الترجمة العِبريّة لهذا المقطع من مؤلَّف ابن السَّمح في مخطوطة وحيدة موجودة في مكتبة بودليان في أكسفورد (*Neubauer Heb. 2008[Hunt. 96]*). تحتوي هذه المخطوطة على ٥٣ ورقة، وهي مكتوبة بخطّ يوسف بن يوَل بيباس الذي نسخها في القسطنطينيّة سنة ١٥٠٦ للميلاد؛ والخطُّ صغير عاديّ من النوع الإسبانيّ. ويحتلُّ نصّ ابن السَّمْح الأوراق ٤٦ظ-٥٣و. ولقد قام بالترجمة العبريّة قلونيموس بن قلونيموس الذي أنجزها في الخامس من كانون الثاني سنة ١٣١٢ للميلاد تحت عنوان "كتاب في الأسطوانات والمخروطات". ليس هناك أيُّ شكٍّ في نسبة النصّ إلى ابن السَّمح، وفقاً لمُستـَهلّ النصّ؛ ويتعلّق الأمر، على أرجح الاحتمالات، بمقطع من كتابه الكبير في الهندسة.

لقد حقّق طوني ليفي (*Tony LEVY*) النصَّ العبريّ وترجمه إلى الفرنسيّة[١١]. ولقد راجعتُ الترجمة الفرنسيّة. أمّا حواشي هذه الترجمة، فقد كـُتِبت من قِبَل أحدنا أو من قِبَل الآخر، وفقاً للحالة المعالـَجة. ولقد استخدمنا نفس المصطلحات التي أوردناها في "التنبيه" في أوَّل الكتاب لنشير إلى الإضافات التي أدخلناها خلال تحقيق النصّ.

[١١] انظر حول تاريخ الترجمة العبريّة التي قام بها قلونيموس بن قلونيموس وحول أعمال هذا الأخير، المقدّمة التي حرَّرها طوني ليفي في التحقيق النقدي للنصّ العبري الذي هو قيد النشر.

<مقطع لابن السَّمْح>

< في الأسطوانة وفي قطوعها المستوية >

الترجمة العربية

حُفِظ هذا النصّ في مخطوطة عبريّة

ترجمه طوني ليفي إلى الفرنسيّة، وراجعه رشدي راشد

<مقطع لابن السَّمْح>

< في الأسطوانة وفي قطوعها المستوية <

<٦-٣-١>/٤٦ظ/ **كتاب في الأسطوانات والمخروطات**

قال[١]: وَجَدتُ هذه المسائلَ مُجَمَّعة في مؤلَّف للفاضل ابن السَّمْح؛ ولقد تـُرِك فراغ فيما بينها؛ ولقد دَوَّن هذه المسائل في كتابه، كما أعتقد، "المَعقولات".

تعريف الأكـَر والأسطوانات والمخروطات

<١> **تعريف الكرة**: الكرة هي ما يُولّدُه نصف دائرة عندما يكون قطرُه ثابتاً بحيث لا يتحرَّك وبحيث تدور قوسُه حتّى ترجع إلى موضعها الأوَّليّ؛ والكرة هي ما ترسمه القوس والسطح <الذي ترسمه القوس>؛ وما ترسمه القوس هو سطح الكرة. والخطُّ الثابت هو قطر الكرة. وطرفا <الخطّ> هما قطبا الكرة. وسط الخطّ هو مركزها. والقوس التي تدور هي قوس الدائرة العظمى التي يُمكنها أن تحمل هذه القوس.

تعريف الأسطوانة: الأسطوانة هي ما نحصل عليه إذا ثـبَّتنا ضلعاً لمستطيل، بحيث نجعل المستطيل بكامله يدور حول الخطّ حتّى يرجع إلى موضعه الأوَّليّ. وما يرسمه المستطيل هو المجسَّم الأسطوانيُ؛ وما يرسمه الخطُّ الموازي للخطّ الثابت هو سطح الأسطوانة. أمّا الخطّان الباقيان اللذان يدوران حول طرفي الخطّ الثابت، فهما يرسمان قاعدتيْ الأسطوانة. وإذا كانت مائلة، تكون الدائرة مائلة[٢].

أمّا تعريف المخروط، فهو يتماثل مع تعريف الدائرة: فإنَّ لهما نفس المحور، وارتفاعاهما متساويان؛ الطرف العلويُّ للضلع الثابت هو رأس المخروط؛ سطح المخروط هو ما يرسمه

---

[١] لا يتعلّق الأمر هنا بابن السَّمْح نفسه، بل، على أرجح الاحتمالات، بجَمَّاع للنُّصوص؛ وتـُرجِع العبارة "قال" التي سترد بعد الآن إلى ابن السَّمْح نفسه.

[٢] انظر الشرح الريّاضيّ، ٦-٢-١.

القطر<أي قطر المستطيل>؛ المجسَّم المخروطيُّ هو ما يرسمه المثلّث الذي يدور حول الضِّلع الثابت؛ وقاعدة الأسطوانة هي قاعدة المخروط.

لقد عرَّف أقليدس الأسطوانة والمخروطَ بهذه الطريقة. وهو لم يُعرِّف في الواقع سوى نوع واحد فقط: الأسطوانة ذات القاعدتين الدائريَّتين والمحور العموديّ على القاعدتين؛ وكذلك هي الحال بالنسبة إلى المخروط: يُمكن استخراجُ هذا النوع من المخروط، من الأسطوانة. لم يكن أقليدس بحاجة إلى شيء آخر ولم يُشر في مؤلَّفه إلا إلى هذا النوع.

<٢> والتعريف العام، المستقلّ عن التعريف السابق، هو التالي. ليكن معنا شكلان مستديران[٣]، بحيث يكون محيط كلّ منهما اختياريّاً، وبحيث يكونان في مستويين متوازيين؛ ولنحدِّد مركزيهما ولنصل بينهما بخطّ. ونجعل خطّاً يدور حول الشكلين المستديرين، على موازاة المحور الذي يصل بين مركزيهما، إلى أن يرجع إلى موضعه الأوَّليّ. وما يرسمه هذا الخطُّ الموازي <للمحور> هو الأسطوانة. يتضمَّن هذا التعريفُ كلَّ أنواع الأسطوانات المدروسة في كتب الأقدمين، بالإضافة إلى خواصِّها. وإذا كان المحور مائلاً بالنسبة إلى القاعدتين، تكون الأسطوانة، عندئذ مائلة.

<٣> ونـُوَلّد، انطلاقاً من هذين النوعين، نوعين آخرين، بواسطة قطوع <مستوية> مُرَتَّبة بطرائق مختلفة. فإذا انطلقنا من أسطوانة قائمة مقطوعة بمستويين متوازيين، بحيث يكون القطعان ناقصين[٤]، فإنَّ هذين القطعين يُشكِّلان مع قسم الأسطوانة المحصور بينهما أسطوانة ذات قاعدتين مؤلَّفتين من هذين القطعين الناقصين وتكون مائلة بالنسبة إليهما. وإذا انطلقنا من أسطوانة مائلة مقطوعة بمستويين متوازيين عموديّين على المحور، فإنَّ القطعين الناقصين يُشكِّلان مع قسم الأسطوانة <المحصور بينهما> أسطوانة قائمة بالنسبة إليهما. ويُمكن إرجاع هذه الأنواع الأربعة إلى نوعين، إذ يُمكن استخراج النوعين الآخرين منهما. وهكذا إذا انطلقنا من كلٍّ من النوعين اللذين لهما قاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن نولّد النوعين الآخرين اللذين لهما قاعدتان دائريَّتان، إذا قمنا بالعملية بطريقة معكوسة.

---

[٣] يدلُّ المؤلِّف بعبارة "الشكل المستدير"، كما نفهم مما يلي، على دائرة أو قطع ناقص.

[٤] إنَّ المصطلحَ العِبريَّ المستخدَم هنا يعني حرفيّاً أن القطعين منحنيان. ونؤكّد أنَّ تبنّي هذا المصطلح لا يأخذ بعين الاعتبار مفردات أبلونيوس التي كان المترجِم قلونيموس على علم بها، وكان يستخدمها في نصوصه.

<٤> أمّا التعريف العامّ للمخروط، فهو التالي. لتكن معنا دائرة ونقطة خارج مستوي الدائرة؛ نصل بين هذه النقطة ومركز الدائرة بخطٍّ مستقيم؛ ونصل بينها وبين نقاط محيط الدائرة بخطوط مستقيمة عددها غير منتهٍ؛ ونجعل الخطّ الذي يصل بين هذه النقطة ومركز الدائرة ثابتاً، بينما نجعل <أحد> الخطوط الأخرى يدور حول الدائرة حتّى يرجع إلى وضعه الأوَّليّ. وما يرسمه المثلّث هو المخروط؛ بينما يرسم الضِّلعُ <الذي يستند إلى محيط الدائرة> سطحَ المخروط؛ ومحور المخروط هو الخطّ الثابت ورأسه هو النقطة وقاعدته الدائرة. هذا هو تعريف أبلونيوس في كتاب "المخروطات". والمخروط الذي يكون محورُه عموديّاً <على مستوي الدائرة> هو مخروطٌ قائمٌ[٥]. أمّا المخروط الذي يكون محورُه مائلاً فهو مخروط مائلٌ.

<٥> التعريف العامُّ للأسطوانة هو الذي أشرنا إليه أعلاه. والأسطوانة هي على نوعين: الأسطوانة التي تتكون قاعدتاها من شكلين مستديرين متساويين ومتوازيين، حيث يَمتدُّ سطحٌ بانتظام بين هذين الشكلين؛ هذا هو النوع الأوَّل[٦]. وينقسم هذا النوع بدوره إلى نوعين وفقاً لكون السطح المحدود بالقاعدتين منتصباً بزاوية قائمة على هاتين القاعدتين أو بزاوية غير قائمة فيكون مائلاً عليهما. وإذا كان السطح قائماً على القاعدتين، تكون الأسطوانة قائمة؛ وإذا كان السطح مائلاً على القاعدتين، تكون الأسطوانة مائلة. وينقسم كلُّ نوع من هذين النوعين أيضاً إلى نوعين آخرين/٤٧و/ وفقاً لكون القاعدتين دائريَّتين أو على شكل قطع ناقص. وإذا كانت الأسطوانة من النوع الأوَّل وكانت قاعدتاها دائريَّتين، تكون الأسطوانة دائريّة قائمة من النوع الذي أشار إليه القدماء؛ وإذا كانت مائلة، يكون معنا عندئذ أسطوانة دائريّة مائلة. وإذا كانت القاعدتان على شكل قطع ناقص، يُمكن أن تكون الأسطوانة، عندئذ، قائمة أو مائلة.

وتدخل كلُّ هذه الأنواع، بمختلف طرائق إحداثها، ضمن التعريف الذي أدخلتُه سابقاً. وإذا كانت قاعدتا الأسطوانة دائريَّتين وكان السطح المحدود بهما على زاوية قائمة، يكون المحور، عندئذ، عموديّاً على قاعدة الأسطوانة، كما قلنا؛ وكلُّ الأضلاع القائمة – التي تصل

[٥] العبارة العبريّة تعني أنّه منتصب على زوايا قائمة.
[٦] انظر، فيما يخصُّ النوع الثاني غير المُعرَّف هنا، الشرح الريّاضيّ ٦-٢-٢.

بين القاعدتين – متساوية؛ وكلّما قطع مستوٍ الأسطوانة بنصفين، يكون ذلك وفقاً لمستطيل متساوي القطرين؛ وهذان القطران هما قطرا الأسطوانة. وكلُّ أقطار الأسطوانة متساوية.

٦-٣-٢ كتاب الأسطوانات

<٦> قال: توجَد، كما قلنا، عدّة أنواع من الأسطوانات؛ فبعضها له قاعدتان دائريَّتان، وبعضها الآخر له قاعدتان غير دائريّتين. والمنحنيات التي تختلف عن الدوائر كثيرة ولا يُمكن أن نحصيها كلّها: قطوع الأسطوانات القائمة والمائلة، قطوع المخروطات، الأشكال البيضاويّة وغيرها والشكل المحاط بخطّ منحنٍ غير منتظم[٧]. ونظراً إلى كلّ هذه الأسباب، يليق بنا أن نقدِم تعريفاً عامّاً صالحاً في كلّ الحالات؛ ولنذكرُ أوّلاً ما تجب الإشارة إليهَ قبل تقديم التعريف.

<٧> إذا كان معنا شكلان مدوَّران[٨] متساويان ولهما نفس الصورة، نأخذ على كلٍّ منهما نقطة ونُخرِج من هذه النقطة خطوطاً حتّى المحيط، بحيث يكون لها نفس العدد وبحيث يكون كلُّ خطٍّ مساوياً للخطّ المماثل له ويُشكِّل كلَّ زوج من الخطوط، في كل شكل من الشكلين، زاوية مساوية لتلك التي يُشكّلها زوج الخطوط المماثل في الشكل الآخر. ونقول إنَّ هاتين النقطتين في وضعين متشابهين. يوجد هذان الشكلان المدوَّران والمتساويان واللذان لهما نفس الصورة في مستويين متوازيين؛ والمستوي الذي يمرُّ بنقطتين متشابهتين يقطع هذين الشكلين على خطَّين متساويين، فنقول إنَّ لهذين الشكلين وضعين متشابهين.

<٨> يكون تعريف الأسطوانة، بعد أن فرضنا ذلك، كما يلي. لنأخُذ في مستويين متوازيين، شكلين مدوَّرين متساويين ولهما نفس الصورة؛ ولنحدِّد، في هذين الشكلين، نقطتين في وضعين متشابهين؛ ولنصل بينهما بخطّ مستقيم؛ ولنجعل خطّاً مستنداً إلى هذين الشكلين يدور، على أن يبقى موازياً للخطّ الذي يصل بين النقطتين ذواتي الوضعين المتشابهين، حتّى يعود إلى موضعه الأوّليّ. والخطُّ، الذي يصل بين النقطتين ذواتي الوضعين المتشابهين،

---

[٧] انظر الشرح الريّاضيّ ٦-٢-٢.

[٨] هذه العبارة "الشكل المُدَوَّر" هي بوضوح أعمُّ من عبارة "الشكل المستدير" التي تدلُّ على الدائرة أو القطع الناقص. وذلك أنَّ الأمر لا يتعلّق، كما نفهم مما يلي في النصّ، إلا بشكل مُغلَقٍ ذي مركز تناظر.

يُسمَّى محور الأسطوانة[٩]. ويكون كلُّ خطٍّ يصل بين نقطة من محيط أحد الشكلين إلى نقطة من محيط الشكل الآخر، على أن يبقى موازياً للمحور، ضلعاً للأسطوانة. وإذا كان المحور عموديّاً على مستويَيْ الشكلين المُدوّرين، تكون الأسطوانة قائمة؛ وتكون الأسطوانة مائلة في الحالات الأخرى.

<٩> قال: لقد أشرنا سابقاً إلى وجود أنواع عديدة من الأسطوانات. ولا توجَد طريقة للحصول عليها كلّها، لذلك نريد أن نذكُر من هذه الأسطوانات تلك التي ترشدنا في معالجة الأسطوانات الأخرى.

لنبدأ بعرض الدراسة المكرَّسة للأشكال الحاصلة من القطوع المستوية للأسطوانات وللمسائل الخاصة بها؛ ثمَّ نعرض الدراسة المكرَّسة للمساحات وللمسائل الخاصة بها ولمسائل النّسَب بينها؛ ونعرض بعد ذلك مسائل الأكَر – الحاصلة انطلاقاً من أنصاف الدوائر؛ ثمَّ نعرض الدراسة المكرَّسة لأحجام هذه الأكر.

ويليق بنا أن نبدأ بدراسة الأسطوانة الدائريّة القائمة، إذ هي الأبسط[١٠] بين كلّ الأسطوانات. وذلك أنَّ الزاوية القائمة هي أبسط الزوايا، كما أنَّ الدائرة هي أبسط الأشكال المدوَّرة. وننتقل من هنا إلى ما يلي. وليكن الخالق، تبارك وتعالى، في عوننا.

<١٠> دراسة قطوع الأسطوانات القائمة ذات القواعد الدائريّة والتعريف الذي ينطبق عليها.

التعريف الذي ينطبق على هذا النوع من الأسطوانات، باستثناء أيّ نوع آخر، هو الذي أشار إليه أقليدس. نحصل على هذه الأسطوانة، وفقاً لتعريف أقليدس، بتثبيت أحد أضلاع مستطيل ما؛ وهذا ما قد أشرنا إليه. توجَد ثلاثة أنواع من قطوع هذا النوع من الأسطوانات. إذا كان مستوي القطع مارّاً بالمحور أو موازياً له، يكون القطع مستطيلاً؛ وإذا كان مستوي القطع موازياً للقاعدتين، يكون القطع عندئذ دائرة؛ وإذا لم يكن مستوي القطع موازياً للقاعدتين يكون القطعُ قطعاً ناقصاً.

---

[٩] لا يكون الخطُّ، الذي يصل بين النقطتين ذواتي الوضعين المتشابهين، محوراً للأسطوانة إلا إذا كانت هاتان النقطتان مركزي التناظر حسب الترتيب لكلٍّ من القاعدتين.

[١٠] تعني العبارة العبريّة: "الأقوَم"، وهي نفسها التي تستخدَم لوصف الزاوية والدائرة.

<١١> النوع الأوَّل من قطوع الأسطوانات التي لها قاعدتان دائريّتان.

إذا قطعنا الأسطوانة بمستوٍ موازٍ للقاعدتين يكون القطع مُولَّداً بحركة خطّ بحيث يكون أحد طرفيه ثابتاً، وبحيث يدور في المستوي حتّى يعود إلى وضعه الأوَّليّ. وتُسمَّى قطعة المستوي التي يمسحها هذا الخطّ دائرة، وما يرسمه الطرف الآخر للخطّ يُسمَّى محيط الدائرة. ويُسمَّى الخطّ المتحرِّك نصفَ القطر. وتُسمَّى النقطة الثابتة مركزَ الدائرة؛ وكلُّ الخطوط الخارجة منها حتّى محيط الدائرة متساوية فيما بينها. وهذا القطع دائرة بالَضرورة. وذلك لأنّنا نجد، من بين خواصّه، أنَّ له نقطة داخليّة بحيث تكون كلُّ الخطوط الخارجة منها حتّى محيط القطع متساوية فيما بينها؛ ولكنّنا نجد، في الشكل الدائري المولَّد بحركة الخطّ، نقطة بحيث تكون كلُّ الخطوط الخارجة منها حتّى المحيط متساوية فيما بينها. فإذا أطبقنا هذا القطع على الدائرة التي يكون نصف قطرها مساوياً لنصف قطر القطع، فإنّه يلتصق بها تماماً.

<١٢> لنعرض المقدّمات التالية الخاصَّة بهذه القطوع الدائريّة.

<ا> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة، إلى مساحة أيّة دائرة أخرى، مع نسبة مربَّع قطر الدائرة الأولى إلى مربَّع قطر الدائرة الثانية. وهذا ما يساوي مربّع نسبة القطر إلى القطر.

<ب> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة، إلى مساحة أيّة دائرة أخرى، مع نسبة مساحة المضلّع المحاط بالدائرة الأولى إلى مساحة المضلَّع المحاط بالدائرة الثانية. وتتساوى هذه النسبة مع مربَّع نسبة ضلع المضلَّع إلى ضلع المضلَّع.

ولقد بُرهِن كلُّ هذا انطلاقاً مما برهنه أقليدس في <المقالة> الثانية عشرة من كتابه.

<جـ> تتساوى <مساحة> كلّ دائرة مع <مساحة> المثلّث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعي زاويته القائمة مساوياً لمحيط الدائرة، ويكون الضلع الثاني لهذه الزاوية مساوياً لنصف قطر الدائرة.

<د> إنَّ نسبة قطر أيّة دائرة إلى محيطها هي نفس نسبة قطر أيّة دائرة أخرى إلى محيطها[١١].

<هـ> نسبة محيط الدائرة إلى قطرها أصغر من ثلاثة أضعاف قطرها مع سبع هذا القطر؛ وهي أعظم من ثلاثة أضعاف قطرها مع عشرة أجزاء من واحد وسبعين من هذا القطر[١٢].

<و> تتساوى نسبة مساحة أيّة دائرة إلى مربَّع قطرها مع نسبة ١١ إلى ١٤.

<١٣> لقد بُرهِن كلُّ هذا من قِبَل أرشميدس.

أمّا المسائل التالية، الخاصّة بالدائرة، فلم يُشِر إليها أقليدس ولا أرشميدس ولا أحدٌ غيرهما. وهي قسمٌ من الخواصّ المطلوبة لدراسة قطوع الأسطوانة.

<**المقدّمة ١**> لتكن معنا دائرتان اختياريَّتان، ولنقسم قطر إحداهما في نقطة مختلفة عن المركز؛ نُخرِج من هذه النقطة عموداً <على هذا القطر> فيكون وتراً لهذه الدائرة. ونقسم قطراً للدائرة الثانية بنفس القسمة، ونُخرِج من نقطة <القسمة> عموداً <على هذا القطر> فيكون وتراً لهذه الدائرة. فتكون نسبة الوتر إلى الوتر كنسبة القطر إلى القطر.

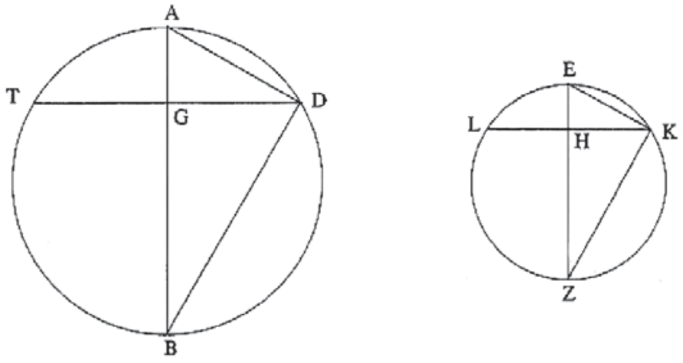
مثال: لنأخذ الدائرتين AB وَ EZ، وليكن AB وَ EZ قطرين لهاتين الدائرتين. نقسم AB في نقطة G التي نُخرِج منها العمود GD على AB ونمدُّه على استقامة حتّى يصبح وتراً، DGT، للدائرة. ونقسم EZ في نقطة H، بحيث تكون نسبة EH إلى HZ كنسبة AG إلى GB. ونُخرِج من H وتراً عموديّاً على القطر EZ، وهو الوتر KHL.

أقول إنَّ نسبة DT إلى KL كنسبة AB إلى EZ.

---

[١١] لقد صاغ بنو موسى هذه الخاصَّة ضمن "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكريَّة"، القضيّة الخامسة. انظر الفصل الأوَّل.

[١٢] إنَّ صيغة ابن السَّمْح هذه مماثلة للصيغة التي استخدمها بنو موسى في القرن التاسع(انظر المرجع السابع، في نهاية برهان القضيّة ٦، الفصل الأوَّل) والكِندي (انظر ر. راشد « *Al- Kindi's Commentary on Archimedes*, 'The *measurement of the circle*' »، ضمن المجلّة Arabic Sciences and Philosophy، المجلّد ٣ (١٩٩٣)، ص. ٣-٥٣؛ النصّ العربي ص. ٥٠، س. ٩-١١؛ النصّ الإنكليزي ص. ٤٠).



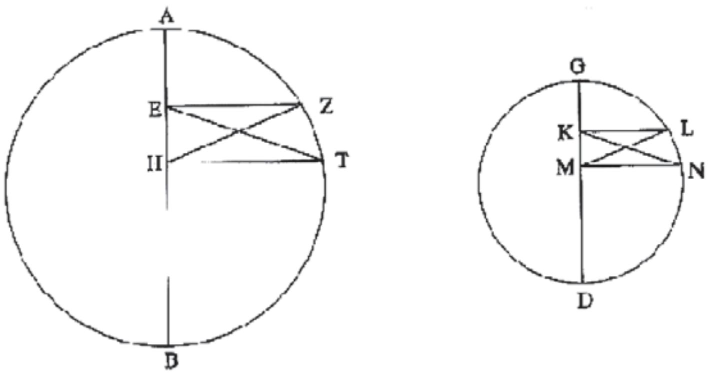
الشكل ١

البرهان: لنرسم الخطوط AD، DB، EK وَ KZ. تتساوى نسبة AB إلى BG مع نسبة EZ إلى ZH؛ والمثلّث ADB قائم الزاوية والخطُّ DG عموديٌ على AB؛ فتكون نسبة AG[١٣] إلى BG كنسبة مربّع AG إلى مُربَّع GD، كما أشار أقليدس إلى ذلك في <المقالة> السادسة من كتابه. وكذلك تكون نسبة EH[١٤] إلى ZH كنسبة مربّع EH إلى مُربَّع HK. فتكون نسبة مربّع EH إلى مُربَّع HK كنسبة مربّع AG إلى مُربَّع GD؛ فتكون نسبة AG إلى GD كنسبة EH إلى HK؛ < فتكون نسبة AG إلى EH كنسبة GD إلى HK؛ ولكنَّ نسبة AG إلى EH كنسبة GB إلى HZ، أي كنسبة AB إلى EZ>؛ فتكون بالتالي نسبة AB إلى EZ كنسبة GD إلى HK؛ ولكنَّ DT هي ضعف DG وَ KL هي ضعف HK. وهكذا بيَّنّا أنَّ نسبة أيِّ وتر من الدائرة <الأولى> عموديٍّ على AB إلى وتر من الدائرة <الثانية> عموديٍّ على EZ كنسبة القطر إلى القطر، إذا كان هذان القطران مقسومين بنفس النسبة. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

<**المقدّمة ٢**> لنأخذ دائرتين ذواتي القطرين AB وَ GD. نقسم GD على النقطتين K وَ M ونقسم AB على النقطتين E وَ H بحيث تكون نسبة AE إلى AB كنسبة GK إلى GD وبحيث تكون نسبة BH إلى AB كنسبة DM إلى GD. ونُخرِج الخطّين EZ وَ HT العموديَّين حسب الترتيب على AB وَ GD؛ ونُخرِج بنفس الطريقة الخطّين LK وَ NM العموديَّين حسب الترتيب على AB وَ GD. فتكون نسبة TH إلى NM كنسبة القطر إلى القطر، وتكون نسبة ZE إلى LK كنسبة القطر إلى القطر. ولنصل بين T وَ E وبين Z وَ H وبين N وَ K وبين M وَ L.

[١٣] نجد AB بدلاً من AG في المخطوطة.
[١٤] نجد EZ بدلاً من EH في المخطوطة.

أقول إنَّ المثلّثين *ZHE* وَ *LMK* متشابهان، وإنَّ المثلّثين *EHT* وَ *KMN* متشابهان أيضاً.



الشكل ٢

البرهان: تكون نسبة *AE* إلى *AB* كنسبة *KG* إلى *GD*؛ وتكون نسبة *AB* إلى *AH* كنسبة *GD* إلى *GM*؛ فنستخرِج من التساوي بين النّسب [١٥] أنَّ نسبة *AE* إلى *AH* كنسبة *GK* إلى *GM*؛ وإذا فصلنا[١٦]، تكون نسبة *AE* إلى *EH* كنسبة *GK* إلى *KM*؛ وإذا بدَّلنا[١٧]، تكون نسبة *AE* إلى *GK* كنسبة *EH* إلى *KM*. ولكنّ نسبة *AE* إلى *GK* كنسبة القطر إلى القطر؛ فتكون نسبة *EH* إلى *KM* كنسبة القطر إلى القطر، وتكون نسبة القطر إلى القطر كنسبة *HT* إلى *MN*؛ والزاويتان في *H* وَ *M* متساويتان، فيكون المثلّثان *EHT* وَ *KMN* متشابهين. ونبيِّن بنفس الطريقة أنَّ المثلّثين *ZHE* وَ *LMK* متشابهان. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

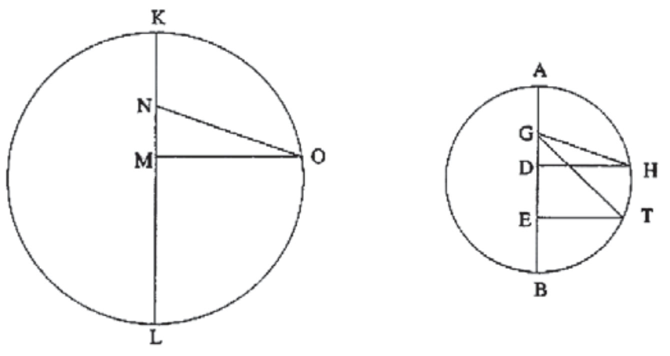
<المقدّمة ٣> لنأخذ دائرتين ذواتي القطرين *AB* وَ *GD*. ولنـُعَلّم نقطة *G* في أيّ مكان <على *AB* >؛ ونُخرِج من هذه النقطة خطّاً حتّى محيط الدائرة؛ وليكن *HG* هذا الخطّ. ولنقسم القطر *KL* <بنفس النسبة> على النقطة *N*؛ ونخرج من هذه النقطة الأخيرة خطّاً حتّى الدائرة، <وهو الخطّ *NO* >، الذي يُشكِّل مع الخطّ *NL* زاوية مساوية للزاوية $\widehat{HGB}$.

أقول إنَّ نسبة *HG* إلى *NO* كنسبة القطر إلى القطر.

[١٥] إنَّ العبارة "نسبة المساواة" أو "التساوي بين النسَب" ترجمة للعبارة اليونانية دي إيسو لوغوس (كتاب "الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٧)، وهي تدلُّ على الأخذ بعين الاعتبار للحدَّين المتطرِّفين في متتالية من المقادير.

[١٦] يُرجع الفعل العبريُّ المستخدَم إلى عبارة أقليدس "تفصيل النسبة"(المقالة الخامسة، التعريف ١٥)

[١٧] يُرجع الفعل العبريُّ المستخدَم إلى عبارة "تبديل (أو إبدال) النسبَة" (كتاب "الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٢)



الشكل ٣

البرهان: لنُخرِج من النقطة O خطّاً عموديّاً على KL، وليكن OM. إذا كانت الزاوية $\widehat{ONL}$ حادّة، تكون M بين N وَ L. ولنخرِج أيضاً من النقطة H الخطَّ العموديَّ HD على AB. أقول إنَّ نسبة AD إلى DB كنسبة KM إلى ML. برهان ذلك: إذا لم يكن الأمر كذلك، <ستكون على AB نقطة E مختلفة عن D بحيث> تكون نسبة KM إلى ML كنسبة AE إلى EB. فلنخرِج ET الخطَّ العموديَّ على AB، ولنصل بين T وَ G. يكون المثلّث TGE، وفقاً لما أثبتناه سابقاً، مشابهاً للمثلّث ONM؛ فتكون الزاوية $\widehat{TGE}$ مساوية للزاوية $\widehat{ONL}$. ولكنّنا افترضنا أنَّ الزاوية $\widehat{ONL}$ مساوية للزاوية $\widehat{HGB}$ فتكون الزاوية الصغرى مساوية للزاوية العظمى؛ وهذا مستحيل. فلا يمكن أن تكون نسبة AD إلى DB غير مساوية لنسبة KM إلى ML.

ونستخرِج، مما أثبِت في المقدّمة الأولى أنَّ نسبة HD إلى OM كنسبة القطر إلى القطر؛ وتكون، من ناحية أخرى، نسبة HD إلى OM كنسبة HG إلى ON، لأنَّ المثلّثين متشابهان؛ فتكون نسبة HG إلى ON، بالفعل، كنسبة القطر إلى القطر؛ ويكون الأمر كذلك لنسبة <أيّ زوج> من الخطوط المرتّبة بنفس الطريقة. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

<٦-٣-٣> النوع الثاني من قطوع الأسطوانة القائمة ذات القاعدتين الدائريَّتين

إذا قطعنا الأسطوانة القائمة ذات القاعدتين الدائريَّتين بمستوٍ غير موازٍ لقاعدتيها، فإنَّ القطع الناتجَ <يُوَلَّد> إذا ثبَّتنا ضلعاً لمثلّث، وجعلنا الضلعين الآخرين يدوران في مستوي المثلّث <بحيث لا يتغيَّر مجموعهما> حتّى يرجع إلى وضعه الأوَّليّ.

سنعرض برهاناً لما نقوله فيما يلي، بعد أن نُشيرَ من بين خواصّ الشكل المولّد بحركة المثلّث إلى الخاصَّة المميِّزة له، وبعد أن نُشيرَ من بين خواصّ القطع المائل للأسطوانة إلى الخاصَّة المميِّزة له، وبعد <أن نتحقّق من أنَّ> هذه الأخيرة/٤٨و/ تتلاءم جيِّداً مع ما سنشير إليه بخصوص الشكل المولَّد بحركة المثلّث. ونقوم هنا، بطريقة مماثلة لما فعلناه بخصوص قطع الأسطوانة الموازي للقاعدة، عندما أظهرنا خاصَّة تتوافق مع خاصّة الدائرة، وهي أنّه توجَد نقطة بحيث تكون كلُّ الخطوط الخارجة منها إلى محيط الدائرة متساوية.

لنعرض إذاً المقدّمات الضروريّة المتعلّقة بالشكل الحاصل من حركة المثلّث.

نقول إنَّ الشكل الحاصل من حركة المثلّث يُسَمَّى "الشكل المُدوَّر المستطيل"[١٨]؛ وهذا الاسم مُستَخرجٌ من صورته؛ فمحيطه مدوَّرٌ مستطيل، ولكن الاستدارة، وكذلك الاستطالة، لا تميِّزه بشكل وحيد. وهذه التسمية تفرض نفسها بسبب الطريقة التي يُولّد بها هذا الشكل، فهذه الطريقة تستخدِم الحركة الدائرية مع الحركة المستقيمة؛ وهذه الأخيرة هي الامتداد بالطول.

وتولّد حركة الطرف <المشترَك> لضلعيْ المثلّث ما نسميّه "محيط الشكل المدوَّر المستطيل". ويُسمَّى الضلع الثابت للمثلّث "الضلع المركزيُّ"[١٩]؛ ويُسمَّى الضلعان الآخران " الضلعين المتحرِّكين"[٢٠]. أمّا المثلّث، فيُسمَّى "مثلّث الحركة".

يتطابق الضلعان المتحرِّكان خلال حركتهما مع الضلع المركزيّ، وفقاً لما ذكرناه حول طريقة عمل الشكل؛ فيشكّلان معه خطّاً وحيداً ويبلغ الامتدادُ المستقيمُ والامتداد الدائري أقصاهما، كما يبلغ الفرق بين الضلعين أقصاه ويكون مساوياً للضلع المركزي بكامله. إنَّ من الواضح، أيضاً، أنَّ أحدهما يكبر بينما يصغر الآخر في نفس الوقت، خلال الدوران؛ فالضلع، الذي يدور مقترباً من الطرف الذي خرج منه، يصغر؛ بينما يكبر الضلعُ الذي يدور مبتعداً عن الطرف الذي خرج منه، بحيث تكون الزيادة في طول أحدهما مساوية للنقصان في طول الآخر. وقد يحدُث، بما أنَّ أحدهما يكبر بينما يصغر الآخر، أن يُصبحا متساويين

[١٨] العبارة العِبريّة، المستخدَمة في النصّ، هي ترجمة مطابقة لعبارة بني موسى "الشكل المُدوَّر المستطيل".
[١٩] تعني العبارة العبريّة حرفيّاً "ضلع المركز".
[٢٠] تعني العبارة العبريّة حرفيّاً "ضلعي الدوران".

في الطول في بعض المواضع. ولا يحصل هذا التساوي إلا في موضعين موجودين في كلتا جهتي الضلع المركزيّ. نُسمّي الضلعين، في هذه الحالة، الضلعين المتحرِّكين المتساويين؛ فيقطع العمودُ<على الضلع المركزيّ>، الخارجُ من طرفهما <المشترك>، الضلعَ المركزيَّ في وسطه. وهذه النقطة هي مركز الشكل. وهي أيضاً مركزٌ لدائرتين: الدائرة الأولى تمرُّ بالطرف<الآخر> لهذا العمود – الذي يُمثِّل نصفَ قطر لها – وهذه الدائرة مماسّة للشكل. أمّا الدائرة الثانية، فإنَّ طرفَ قطرها هو النقطة التي يلتصق فيها ضلعا المثلّثين فيشكّلا خطّاً واحداً وتكون المسافة إلى المركز قد بلغت أقصاها في كلّ طرفٍ من الطرفين. ويظهر، أيضاً، أنَّ هذا القطر مساوٍ للضلعين المتحرِّكين< مجتمعين>؛ وذلك أنّنا نحصل على القطر إذا تناولنا القطعتين، اللتين تتجاوزان الضلع المركزي من الطرفين، وبدَّلناهما. وهذه الدائرة العظمى مماسّة للشكل؛ والقطر الأعظم مشترَكٌ بينهما. تُسمَّى الدائرة العظمى الدائرة المحيطة، وتُسمَّى الدائرة الصغرى الدائرة المحاطة.

تنقسم كلُّ الخطوط المستقيمة، التي تمرُّ بالمركز وتقطع الشكل، إلى قسمين متساويين في هذا المركز. وتُسمَّى هذه الخطوط الأقطار. وأعظم هذه الأقطار هو القطر المشترَك بين الشكل والدائرة المحيطة؛ وأصغرها هو القطر المشترَك بين الشكل والدائرة المحاطة.

ويُسمَّى كلُّ خطّ، يقطع المُنحَنى ولا يمرُّ بالمركز، "وتراً". والأوتار التي تُقطَع إلى نصفين بأحد القطرين – الأعظم أو الأصغر – تكون عموديّة عليه. وإذا قطع <أحد القطرين> وتراً بزاوية قائمة، فإنّه يقطعه إلى نصفين.

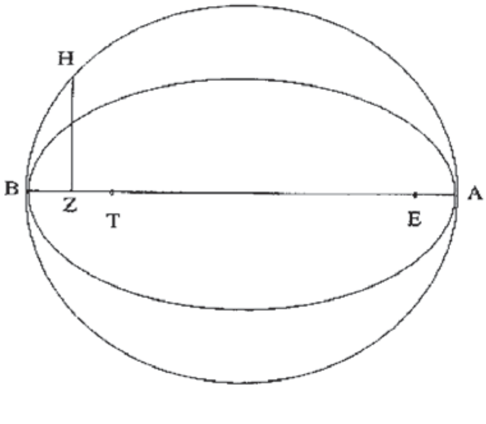
ويُسمَّى الخطّ، الخارج بزاوية قائمة من أحد[٢١]طرفي الضلع المركزيّ إلى الدائرة العظمى، "الخطُّ المساوي"؛ وتُسمَّى، القطعة من هذا الخطّ الواقعة ضمن الشكل المستطيل، "الخطَّ المنفصل".

<**القضيَّة** ١> يكون، في كلّ شكل مدوَّرٍ مستطيل، مجموعُ أربعة أضعاف مربَّع الخطِّ المساوي ومربَّع الخطّ المركزيّ مساوياً لمربَّع القطر الأعظم.

مثال: ليكن معنا الشكلُ المدوَّر المستطيل ذو القطر الأعظم AB والضلع المركزيّ EZ والدائرة المحيطة التي تمرُّ بالنقطتين H وَ B والخطّ المساوي ZH.

[٢١] نُسمّي هذه النقطة بؤرة القطع الناقص.

أقول إنَّ مجموعَ أربعة أضعاف مربَّع ZH ومربَّع EZ مساوٍ لمربَّع AB.



الشكل ٤

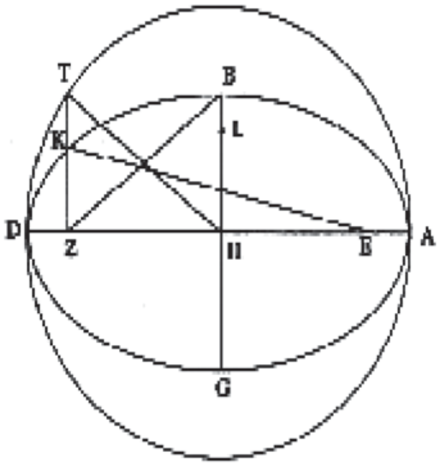
البرهان: لنأخذ القطعة ZT <على ZE> المساوية للقطعة AE، فتكون AT مساوية لـِ EZ، وتكون TZ مساوية لـِ ZB. ويكون مجموع أربعة أضعاف مضروب BZ بـِ ZA ومربَّع AT، مساوياً لمربَّع AB. ولكنَّ أربعة أضعاف مضروب ZB بـِ ZA تساوي أربعة أضعاف مربَّع ZH. فيكون مجموع مربَّع ZH – الذي هو الخطّ المساوي – ومربَّع AT، المساوي لمربَّع الضلع المركزي، مساوياً لمربَّع AB الذي هو القطر الأعظم. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيَّة ٢**> يكون الخطُّ المساوي، في كلّ شكل مدوَّرٍ مستطيل، مساوياً لنصف القطر الأصغر؛ ونسبة الخطّ المنفصل إلى الخطّ المتناسب مع نصف القطر الأصغر ونصف القطر المركزي، هي كنسبة نصف الضلع المركزيّ إلى نصف القطر الأعظم.

مثال: ليكن معنا الشكل المدوَّر المستطيل $ABDG$ والدائرة المحيطة ATD والضلع المركزيّ EZ والخطّ المساوي ZT والخطّ المنفصل ZK ووسط الضلع المركزيّ H والقطر الأصغر BHG؛ وتكون نسبة ZH إلى HB كنسبة BH إلى HL[٢٢] – بحيث يتناسب الخطّ HL مع <BH وَ ZH>.

أقول إنَّ TZ مساوٍ لـِ HB وإنَّ نسبة الخطّ المنفصل ZK إلى HL كنسبة HZ إلى HD.

[٢٢] لا تستخدَم النقطة L، التي أدخِلت في صيغة القضيّة، إلا في الفقرة الأخيرة للبرهان. لقد وضعنا $HL = \frac{b^2}{c}$ وأثبتنا أنَّ $KZ = \frac{b^2}{a}$. يتعلّق وضع L بالمعطيات: إذا كان $b > c$، تكون L بين H وَ B؛ إذا كان $c = b$، تكون L في B؛ إذا كان $b < c$، تكون L بعد B. والخطّ هو في الواقع الخطّ المتواصل الثالث في العلاقة $\frac{ZH}{HB} = \frac{HB}{HL}$



الشكل ٥

البرهان: لنصل بين T وَ H وبين Z وَ B. وطول TH مساوٍ لنصف القطر الأعظم، وهو طول BZ، فتكون هاتان القطعتان متساويتين. فنستخرج من ذلك أنَّ <مجموعَ> مربَّع BH ومربَّع ZH يتساوى مع <مجموعَ> مربَّع ZH ومربَّع ZT. فإذا طرحنا مربَّع ZH المشترَك بينهما، يكون مربَّع BH مساوياً لمربَّع TZ؛ أي أنَّ BH يساوي TZ.

لنصل بين E وَ K. مجموع EK وَ KZ يساوي AD، فيكون مجموعُ مربَّع EK ومربَّع KZ وضعفيْ مضروب EK بـِ KZ مساوياً لمربَّع AD. ولكنَّ مربَّع EK يُساوي مجموع مربَّع EZ ومربَّع ZK. فيكون مجموع ضعفي مضروب EK بـِ KZ وضعفي مربَّع KZ ومربَّع EZ مساوياً لمربَّع AD.

ولكنَّ مربَّع AD يساوي مجموع أربعة أضعاف مربَّع ZT – وَ ZT تساوي BH – ومربَّع EZ[٢٣]. فيكون مجموع أربعة أضعاف مربَّع ZT ومربَّع EZ مساوياً لمجموع مربَّع EZ وضعفي مربَّع ZK وضعفي مضروب EK بـِ KZ. فإذا طرحنا مربَّع EZ المشترَك بين المجموعين، تكون أربعة أضعاف مربَّع ZT مساوية لمجموع ضعفي مضروب EK بـِ KZ وضعفي مربَّع KZ. فيتساوى ضعفا مربَّع ZT مع مجموع مضروب EK بـِ KZ وَمربَّع KZ.

[٢٣] انظر القضيَّة ١.

ولكنَّ مجموعَ مضروب *EK* بـِ *KZ* وَمربَّع *KZ* يساوي مضروب/٤٨ظ/ *KZ* بمجموع *EK* وَ *KZ* ؛ ومجموع *EK* وَ *KZ* يساوي *AD*. فيكون، بالتالي، مضروب *AD* بـِ *ZK* (الخطّ المنفصل) مساوياً لضعفي مربَّع *TZ* (الخطّ المساوي).

تساوي *BG* مساوية لضعفيْ *TZ* لأنَّ *TZ* مساوية لِـ *BH*. فنستخرِج من ذلك أنَّ مضروب *TZ* بـِ *BG* مساوٍ لضعفي مربَّع *TZ*. وهكذا يكون مضروب *KZ* بـِ *AD* مساوياً لمضروب *TZ* بـِ *BG*. فتكون، بعبارة أخرى، نسبة *KZ* إلى *ZT* كنسبة *BG* إلى *AD* وأيضاً كنسبة النصف إلى النصف، أي كنسبة *BH* إلى *HD*.

إنَّ نسبة *KZ* إلى *BH* كنسبة *BH* إلى *HD*، ونسبة *BH* إلى *HL* كنسبة *ZH* إلى *BH*؛ فلذلك يكون معنا ثلاثة مقادير *KZ* ، *BH* وَ *HL* ، ومقادير أخرى بنفس العدد وهي *HZ* ، *BH* وَ *HD*، بحيث يكون كلُّ زوجٍ مأخوذ من المقادير الثلاثة الأولى في نفس النسبة مع زوج مأخوذ من المقادير الثلاثة الأخرى، وفقاً لترتيب مُخْتَلٍّ[٢٤]؛ فإذا أخذنا هذه النسَب المتساوية بعين الاعتبار، تكون نسبة الخطّ المنفصل *KZ* إلى الخطّ المتناسب *HL*، كنسبة نصف الضلع المركزيّ *ZH* إلى نصف القطر الأعظم *HD*.

وهكذا أثبتنا أنَّ الخطَّ المساوي يتساوى مع نصف القطر الأصغر وأنَّ نسبة الخطّ المنفصل إلى الخطّ المتساوي كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم، وأنَّ نسبة الخطّ المنفصل إلى الخطّ المتناسب كنسبة نصف الضلع المركزيّ إلى نصف القطر الأعظم. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

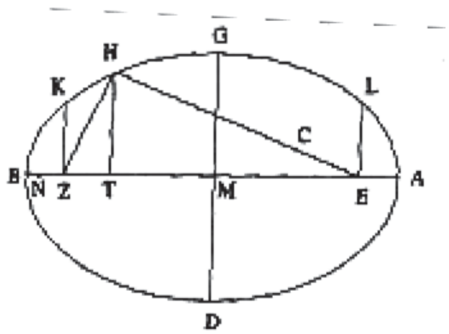
<القضيّة ٣> إذا تلاقى الضلعان المتحرِّكان، في كلِّ شكل مدوَّر مستطيل، في نقطة غير مطابقة لطرف القطر الأصغر، تكون نسبة أعظم ضلع من الضلعين المتحرِّكين < إلى الخطّ الحاصل من تمديد أعظم الخطَّين المفصولين، على الضلع المركزيّ، بمسقط العمود الخارج من نقطة تقاطع> الخطّ المتناسب مع نصف القطر الأصغر ونصف الضلع المركزيّ، كنسبة نصف الضلع المركزيّ إلى نصف القطر الأعظم.

---

[٢٤] يتعلّق الأمر، وفقاً للعبارة العبريّة، بـِ "اختلافات النسبة في المقادير بالتقديم والتأخير". وهذا يرجعنا إلى استخدام "النسبة المضطربة" ("الأصول"، المقالة الخامسة، التعريف ١٨): يتناسب حدّان متتاليين من المتتالية الثانية مع حدَّين متتاليين من المتتالية الأولى، على أن يكون الترتيب الخاصّ بالمتتالية الأولى مُختلاً.

مثال: ليكن معنا الشكل المدوَّر المستطيل $ABGD$، حيث يكون AB قطرَه الأعظم، GD قطرَه الأصغر، EZ الضلعَ المركزيّ، EH وَ HZ الضلعين المتحرِّكين، EL وَ ZK الخطّين المنفصلين. لنُخرِج من النقطة H العمود HT على القطر الأعظم. ولتكن نسبة TN إلى GM كنسبة GM إلى HL، فيكون TN [٢٥]، عندئذ، الخطَّ المتناسب.

أقول إنَّ نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA.



الشكل ٦

البرهان: لا يمكن أن تكون النقطة H، نقطة التلاقي بين الضلعين المتحرِّكين، إلا بين النقطتين G وَ K أو في النقطة K أو بين النقطتين K وَ B.

لتكن النقطة H، في أول الأمر، بين النقطتين G وَ K، فتكون الزاوية $\widehat{H}$، عندئذ، قائمة أو منفرجة أو حادّة. ولتكن أوَّلاً قائمةً.

يكون مجموع EH وَ HZ وضعفيْ مضروب EH بِـ HZ مساوياً لمربَّع AB. ولكنَّ مجموع مربَّع EH و مربَّع HZ يساوي مربَّع EZ، لأنَّ الزاوية $\widehat{H}$ قائمة. فيكون مجموع ضعفيْ مضروب EH بِـ HZ ومربَّع EZ مساوياً لمجموع مربَّع EZ وأربعة أضعاف مربَّع

---

[٢٥] النقطة N الواردة في صيغة القضيّة معرَّفة بالمعادلة $TN = \frac{GM^2}{ME} = \frac{b^2}{c}$؛ وطول TN مساوٍ لطول HL الوارد في القضيّة السابقة. لا يتعلّق طول TN بالنقطة H التي تمَّ اختيارها؛ بل إنَّ وضع N مرتبطٌ بالنقطة T مسقط النقطة Hعلى AB. ويُمكن أن تكون النقطة NM بين M وَ B، في B أو ما بعد B. وتبقى النتيجة المثبتة صحيحة إذا تطابقت النقطة H مع أحد الرؤوس.
نحصل ، هنا أيضاً، على الخطّ TN انطلاقاً من العلاقة $\frac{TN}{GM} = \frac{GM}{ME}$، حيث تكون النقطة M مركز القطع الناقص.

الخطّ المساوي[٢٦]. وإذا طرحنا مربَّع EZ المشترك لهذين المجموعين، نحصل على أنَّ ضعفيْ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لأربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي، أيْ أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي.

ولكنَّ مضروب LE، الخطّ المنفصل، بـِ AB مساو لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي[٢٧]. فيكون مضروب LE بـِ AB مساوياً ل مضروب EH بـِ HZ؛ وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ نسبة LE – المساوية لـِ KZ – إلى EH هي كنسبة HZ إلى AB، حيث تساوي AB مجموع EH وَ HZ.

فإذا قمنا بفصل وبعكس وبتركيب النسبتين، نحصل على أنَّ نسبة CH > النقطة C هي على EH بحيث تكون EC مساوية لِـ EL > إلى EH مساوية لنسبة EH إلى مجموع EH وَ HZ. فيكون مضروب CH بمجموع EH وَ HZ مساوياً لمربَّع EH. ولكنَّ مربَّع EH يساوي مضروب ET بـِ ZE، لأنَّ نسبة ZE إلى EH هي كنسبة EH إلى ET.

وهكذا يكون مضروب CH بـِ AB – حيث تساوي AB مجموع EH وَ HZ – مساوياً لمضروب ZE بـِ ET. وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ نسبة CH إلى ET كنسبة ZE إلى AB. ولكنَّ نسبة ZE إلى AB كنسبة EM إلى MA. فتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EM إلى MA؛ وكنّا قد أثبتنا أنَّ نسبة EM إلى MA هي كنسبة EL، الخطّ المنفصل، إلى TN، خطّ التناسب. فنحصل على أنَّ نسبة CH إلى ET كنسبة EL إلى TN.

ونحصل، بتركيب النسَب، على أنَّ نسبة EH إلى EN كنسبة CH إلى ET[٢٨]؛ وهذه النسبة الأخيرة هي كنسبة EM إلى MA. فتكون، بالتالي، نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

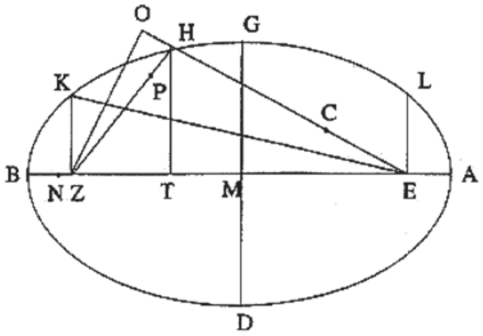
لتكن الزاوية منفرجة.

---

[٢٦] انظر القضيّة ١.

[٢٧] انظر القضيّة ٢.

[٢٨] لا يتعلّق الأمر، في الحقيقة، بتركيب للنسَب، بل بتطبيق للقضية ١٢ من المقالة الخامسة من كتاب "الأصول": إذا كان $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ نحصل على $\frac{a}{b}=\frac{(a+c)}{(b+d)}$، أي البسط مع البسط إلى المقام مع المقام. ليس لهذه العملية تسمية خاصّة في كتاب الأصول. يستخدم الكاتب، بالإضافة إلى ذلك لاحقاً عبارة مختلفة بالفعل؛ فهو "يجمع النسَب".



الشكل ٧

لنُخرج الخطّ ZO العموديَّ <على الامتداد المستقيم للخط EH>. يكون مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EZ مساوياً لمربّع AB[٢٩]؛ ويكون مربَّع AB مساوياً لمجموع مربَّع EH و مربَّع HZ وضعفيْ مضروب EH بـِ HZ. فيكون مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EH و مربَّع HZ وضعفيْ مضروب EH بـِ HO مساوياً لمجموع مربَّع EH و مربَّع HZ وضعفيْ مضروب EH بـِ HZ.

فإذا طرحنا مجموع مربَّع EH و مربَّع HZ المشترَك، يكون مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي وضعفيْ مضروب EH بـِ HO مساوياً لضعفيْ مضروب EH بـِ HZ؛ وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع ضعفي مربَّع الخطّ المساوي ومضروب EH بـِ HO.

لنجعل القطعة HO مساوية للقطعة HP، <حيث تكون P نقطة على HZ >. يكون، عندئذ، مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع ضعفي مربَّع الخطّ المساوي ومضروب EH بـِ HP. ولكنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع مضروب EH بـِ HP ومضروب EH بـِ PZ. فيكون، بالتالي، مجموع مضروب EH بـِ HP ومضروب EH بـِ PZ مساوياً لمجموع ضعفي مربَّع الخطّ المساوي ومضروب EH بـِ HP. فإذا طرحنا مضروب EH بـِ HP، يكون مضروب EH بـِ PZ مساوياً لضعفي مربَّع الخطّ المساوي.

ولقد أثبتنا، سابقاً، أنَّ مضروب EL بـِ AB مساوياً لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي. فتكون نسبة EL إلى EH كنسبة PZ إلى <مجموع> ZH وَ HE.

---

[٢٩] انظر القضيّة ١.

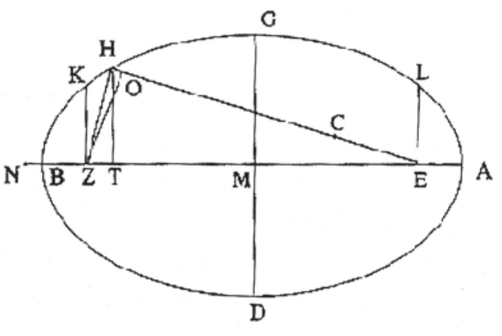
وإذا قمنا بفصل وعكس وتركيب النسَب، تكون نسبة CH إلى EH كنسبة <مجموع> EH وَ HP – والقطعة HP مساوية للقطعة HO - إلى <مجموع> EH وَ HP. يكون، بالتالي، مضروبُ CH بمجموع EH وَ HZ، مساوياً لمضروب OE بـِ EH.

والمثلّث HET مشابه للمثلّث EOZ – لأنَّ الزاوية $\hat{O}$ قائمة مثل الزاوية $\hat{T}$، والزاوية $\hat{E}$ مشترَكة للمثلّثين –، فتكون نسبة OE إلى ET كنسبة ZE إلى EH. وهكذا يكون مضروب OE بـِ EH مساوياً لمضروب ZE بـِ ET. ويكون، وفقاً لهذه الشروط، مضروب CH بـِ AB مساوياً لمضروب ZE بـِ ET، وتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EZ إلى AB؛ وهذه النسبة الأخيرة مساوية لنسبة EM إلى AM <إذا أخذنا نصفي القطعتين>.

ولقد أثبتنا، سابقاً، أنَّ نسبة LE إلى TN، حيث يكون TN الخطّ المتناسب، مساوية لنسبة EM إلى AM. فإذا قمنا بالتركيب، كما فعلنا سابقاً، يُصبح لدينا أنَّ نسبة EH إلى EN، مساوية لنسبة EM إلى AM. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

ولتكن الزاوية/٤٩و/ حادَّة.

لنخرِج العمود ZO <على الخطّ EH>. يتساوى مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EZ، مع مربَّع AB، أي مع مجموع مربَّع EH ومربَّع HZ وضعفيْ



الشكل ٨

مضروب EH بـِ HZ. ويكون، بعبارة أخرى، مجموعُ مربَّع EH ومربَّع HZ وضعفيْ مضروب EH بـِ HZ، مساوياً مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EZ.

لِنُضِف ضعفيْ مضروب EH بِـ HO. يتساوى، عندئذ، مجموع ضعفيْ مضروب EH بِـ HO وضعفيْ مضروب EH بِـ HZ ومربَّع EZ ومربَّع HZ، مع مجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EZ وضعفيْ مضروب EH بِـ HO. ولكنَّ مجموع مربَّع EZ وضعفيْ مضروب EH بِـ HO مساوٍ لمربَّع <مجموع> EH وَ EZ، لأنَّ الزاوية $\widehat{H}$ حادَّة. فيكون مجموع ضعفيْ مضروب EH بِـ HZ وضعفيْ مضروب EH بِـ HO ومربَّع EH ومربَّع HZ، مساوياً لمجموع أربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي ومربَّع EH ومربَّع HZ.

لنطرح مجموع مربَّع EH ومربَّع HZ المشترك في المجموعين السابقين، فيكون مجموع ضعفيْ مضروب EH بِـ HZ وضعفيْ مضروب EH بِـ HO مساوٍ لأربعة أضعاف مربَّع الخطّ المساوي؛ وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ ضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي يتساويان مع مجموع مضروب EH بِـ HZ ومضروب EH بِـ HO.

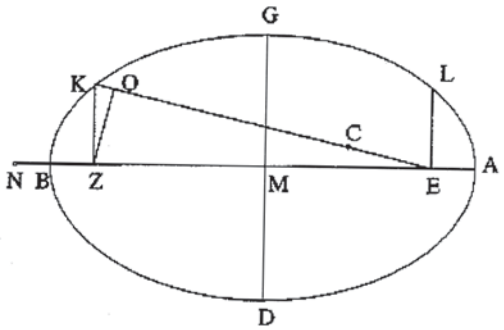
ولكنّنا قد أثبتنا أنَّ مضروب EL بِـ AB مساوٍ لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي. فيكون، بالتالي، مجموع مضروب EH بِـ HZ ومضروب EH بِـ HO، مساوٍ لمضروب EL بمجموع EH وَ HZ. فتكون نسبة EL إلى EH كنسبة <مجموع> HO وَ HZ إلى <مجموع> EH وَ HZ.

وهكذا إذا قمنا بفصل وعكس وتركيب النسَب، تكون نسبة CH إلى EH كنسبة OE إلى <مجموع> EH وَ HZ. يكون، بالتالي، مضروبُ CH بمجموع EH وَ HZ، مساوياً لمضروب OE بِـ EH.

ولكنَّ مضروب OE بِـ EH مساوٍ لمضروب ZE بِـ ET لأنَّ المثلّثين HET وَ EOZ متشابهان. يكون، بالتالي، مضروب CH <بمجموع> EH وَ HZ – وهذا المجموع يساوي AB – مساوياً لمضروب ZE بِـ ET، فتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EZ إلى AB وكنسبة النصف إلى النصف أيضاً. وهكذا تكون نسبة CH إلى ET كنسبة EM إلى MA.

ولقد أثبتنا، سابقاً، أنَّ نسبة *LE* إلى *TN* مساوية لنسبة *EM* إلى *AM*. فإذا جمعنا <النسبتين>، نحصل على أنَّ نسبة *EH* إلى *EN*، هي كنسبة *EM* إلى *AM*. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

وإذا كانت *K* نقطة تلاقي الضلعين المتحرِّكين، نخرِج من *K* العمود <على القطر الأعظم>، وهو *KZ*، فتكون الزاوية $\widehat{Z}$ قائمة. وتكون الزاوية $\widehat{K}$، إذاً، حادَّة. فتكون الزاوية $\widehat{E}$ حادَّة، أيضاً، لأن $\widehat{Z}$ قائمة. وإذا أخرجنا من النقطة *Z* العمودَ <على الخطّ *EK* > يكون مسقطه على *EK*؛ وليكن *ZO* هذا العمود.



الشكل ٩

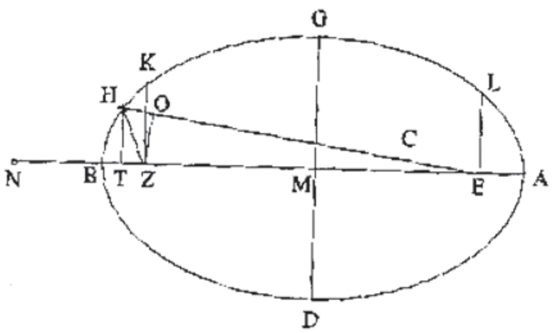
نـُبيِّن، كما فعلنا سابقاً، في حالة الشكل السابق، أنَّ مضروبُ *CK* <بمجموع> *EZ* وَ *KZ*، مساوٍ لمضروب *EO* بـِ *KE*. ولكنَّ مضروبَ *EO* بـِ *KE* مساوٍ لمربَّع *EZ*، لأنَّ المثلّثين *EOZ* وَ *EKZ* متشابهين، وذلك أنَّ الزاوية $\widehat{KZE}$ قائمة مثل الزاوية $\widehat{EOZ}$ والزاوية $\widehat{E}$ مشتركة. ويكون، بالتالي مضروبُ *CK* <بمجموع> *EZ* وَ *KZ*، مساوياً لمربَّعِ *EZ*؛ ونسبة *CK* إلى *EZ* كنسبة *EZ* إلى *AB*، أيْ كنسبة نصف الخطّ المركزي إلى نصف القطر الأعظم.

ولكنَّ نسبة *EL* إلى *ZN* كنسبة نصف الخطّ المركزي إلى نصف القطر الأعظم[٣٠]. فإذا ركّبنا <النسبتين>، نحصل على أنَّ نسبة *KE* إلى *EN* كنسبة *EZ* إلى *AB*، أي كنسبة النصف إلى النصف. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

[٣٠] انظر القضيّة ٢.

وهكذا برهنّا أنّه، إذا تلاقى الضلعان المتحرِّكان على طرف الخطّ المنفصل، فإنَّ نسبة الخطِّ المركزيِّ إلى القطر الأعظم هي كنسبة الفرق، بين القطر الأعظم والخطّ المنفصل، إلى مجموع الضلع المركزيّ والخطّ المتناسِب.

وإذا تلاقى الضلعان المتحرِّكان بين النقطتين K وَ B، نأخذ الخطّين EH وَ HZ، والعمود HT <على القطر الأعظم> الخارج من H، والخطّ المتناسب TN. فتكون، أيضاً، نسبة EH إلى EN كنسبة نصف الضلع المركزيّ إلى نصف القطر الأعظم. ونسلك نفس المنهج الذي سلكناه سابقاً، في الحالة الثالثة للشكل. وذلك أنَّ الزاوية $\widehat{HZE}$ منفرجة فتكون الزاوية $\widehat{H}$ حادَّة وكذلك أيضاً $\widehat{E}$ ؛ وبالتالي يسقط العمودُ<على EH>، ZO ،الخارجُ من Z، بين E وَH.



الشكل ١٠

ونثبت، بنفس الطريقة، أنَّ مضروب CH <بمجموع> EH وَ HZ، مساوٍ لمضروب EH بـِ EO. ولكنَّ مضروبَ EO بـِ EH مساوٍ لمضروبَ EZ بـِ ET، لأنَّ المثلّثين EOZ وَ EHT متشابهان. فيكون مضروب CH <بمجموع> EH وَ HZ، مساوٍ لمضروب EZ بـِ ET؛ وتكون نسبة CH إلى ET كنسبة EZ إلى مجموع EH وَ HZ – وهذا المجموع مساوٍ للقطر الأعظم – ، أي كنسبة <النصفين> EM إلى MA. ولكنَّ نسبة EM إلى MA كنسبة EL إلى TN.

وهكذا نحصل، إذا جمعنا <النسَب>، على أنَّ نسبة EH إلى EN كنسبة EM إلى MA. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

لقد أتممنا دراسة هذه المسألة، بكلّ فروعها، إذ لم يبقَ شيئاً يُضاف إلى ما ذكرناه[٣١].
والحمد لله تبارك وتعالى.

<**القضيّة ٤**> إذا تلاقى الضلعان المتحرِّكان، في كلِّ شكل مدوَّر مستطيل، في نقطة غير مطابقة لأحد طرفي القطر الأصغر، وإذا تقاطع وترٌ للدائرة المحيطة بزاوية قائمة مع القطر الأعظم ومرَّ بنقطة تلاقي الضلعين المتحرِّكين، يكون مجموع مربَّع نصف الوتر والفرق، بين مربَّع نصف القطر الأصغر وبين مربَّع المسافة المحصورة على الوتر بين نقطة تلاقي الضلعين المتحرِّكين ومسقط الوتر على القطر الأعظم، مساوياً لمضروب أحد الضلعين المتحرِّكين بالضلع الآخر.

مثال: ليكن $AGBD$ الشكل المدوَّر المستطيل، ولتكن الدائرة المحيطة تلك التي تمرّ بالنقاط A،N وَ B، وليكن EH وَ HZ الضلعين المتحرِّكين، EZ الضلع المركزيّ، ZK الخطّ المنفصل وَEL الخطّ المساوي. نـُخرِج من النقطة H العمودَ على AB، وهو HT ؛ ونمدِّده على استقامة في الدائرة حتّى يصل إلى النقطتين N وَ P.

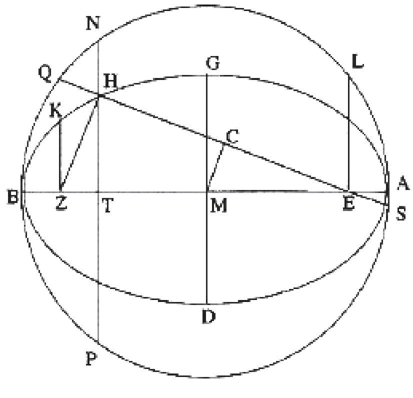
أقول إنَّ مجموع مربَّع NT والفرق، بين مربَّع GM ومربَّع HT، مساوٍ لمضروب EH بـِ HZ.

البرهان: يمكن أن تكون نقطة التلاقي بين الضلعين المتحرِّكين، H، بين النقطتين G وَ K، أو في النقطة K، أو بين النقطتين K وَ B.

لتكن النقطة H، في بادئ الأمر، بين G وَ K. يُمكن أن تكون الزاوية $\widehat{H}$، عندئذ، قائمة أو منفرجة أو حادَّة.

فلتكن قائمة في أولّ الأمر.

[٣١] لقد اقترح غاد فرودنتال (*Gad Freudenthal*)، خلال مراجعة النصّ العبريّ، أن تـُقرأ العبارة العبرية بما ترجمته: " لأنَّ بني شاكر لم يُتمِّموه"، بدلاً من: " إذ لم يبقَ شيئاً يُضاف إلى ما ذكرناه". ولكنَّ هذه الجملة التي تبنّيناها في النصّ المترجَم إلى الفرنسية مؤكّدة بنتائج تحليل محتوى النصّ الوارد في الشرح الريّاضيّ[أضيفت هذه الحاشية لدى مراجعة الأوراق المطبوعة].



الشكل ١١

لنمدِّد القطعة EH على استقامة حتّى S وَ Q، لتصبح وتراً للدائرة المحيطة. نـُبرهن، كما فعلنا في القسم الأوَّل من المسألة السابقة، أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي EL.

ولكنَّ مربَّع الخطّ المساوي، EL، مساوٍ لمضروب AE بـِ EB الذي يساوي مضروب SE بـِ EQ.

ولكنَّ ES مساوية لـِ HQ ؛ وذلك لأنّنا إذا أخرجنا من النقطة M العمود MC <على EH>،/٤٩ظ/ يكون موازياً لـِ ZH، لأنَّ الزاوية $\hat{C}$ قائمة مثل الزاوية $\widehat{H}$، فتكون نسبة EC إلى CH كنسبة EM إلى MZ؛ ولكنَّ EM مساوية لـِ MZ، فتكون EC مساوية لـِ CH؛ ومن ناحية أخرى تكون CS مساوية لـِ CQ. فإذا طرحنا EC وَ CH نحصل على المطلوب وهو أنَّ ES مساوية لـِ HQ .

وهكذا يكون مضروب HQ بـِ HS مساوياً لمضروب SE بـِ EQ؛ فيكون مضروب SE بـِ EQ مساوياً لمربَّع الخطّ المساوي[٣٢]. فيكون مضروب HQ بـِ HS مساوياً لمربَّع الخطّ المساوي.

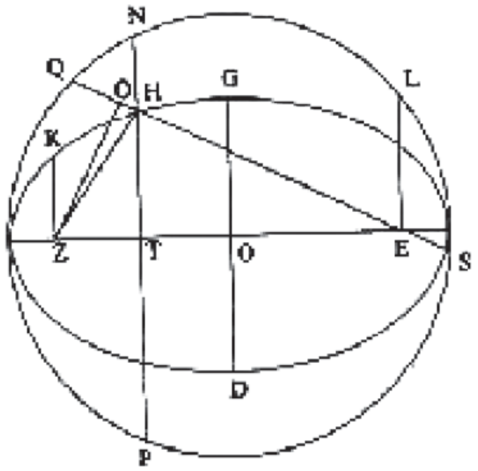
ولكنَّ مضروب HQ بـِ HS مساوٍ لمضروب NH بـِ HP. فيكون مضروب NH بـِ HP مساوياً لمربَّع الخطّ المساوي.

---

[٣٢] النقطة E هي وسط الوتر الحاصل من تمديد LE.

لقد أثبتنا أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي. وهذا يعني، بعبارة أخرى، أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع مربَّع الخطّ المساوي ومضروب NH بـِ HP. ولكنَّ مربَّع الخطّ المساوي هو مجموع مربَّع HT والفرق بين مربَّع الخطّ المساوي ومربّع HT. فيكون، وفقاً لهذه الشروط، مجموع مضروب NH بـِ HP ومربَّع HT والفرق بين مربَّع الخطّ المساوي – الذي يساوي GM – <ومربّع HT> مساوياً لمضروب EH بـِ HZ. ولكنَّ مجموع مضروب NH بـِ HP ومربَّع HT مساوٍ لمربَّع NT. وهكذا يكون مجموع مربَّع NT والفرق بين مربَّع GM ومربَّع HT مساوياً لمضروب EH بـِ HZ. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

لتكن الزاوية $\widehat{H}$ منفرجة.



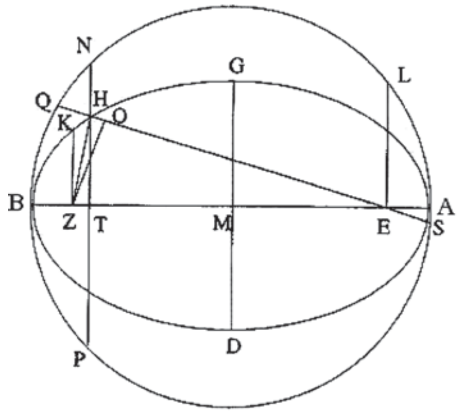
الشكل ١٢

يكون مسقط العمود الخارج من Z على EH، بعد النقطة H على امتداد EH. وهذا العمود هو ZO. نبيِّن، كما فعلنا في القسم الثاني من القضيّة السابقة، أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع مربَّع الخطّ المساوي ومضروب EH بـِ HO.

ونـُثبت كما فعلنا في القسم السابق، أنَّ مضروب EH بـِ HZ مساوٍ لمجموع مربَّع الخطّ المساوي ومضروب QO بـِ OS ومضروب EH بـِ HO. ولكنَّ مجموع مضروب QO بـِ OS ومضروب EH بـِ OH مساوٍ لمضروب QH بـِ HS. وهكذا يكون مجموعُ مضروب QH بـِ HS ومربَّع الخطّ المساوي مساوياً لمضروب EH بـِ HZ.

ولكنَّ مضروب QH بـِ HS مساوٍ لمضروب NH بـِ HP. وهكذا يكون مجموع مضروب NH بـِ HP ومربَّع الخطّ المساوي مساوياً لمضروب EH بـِ HZ. ولكنَّ مجموع مضروب NH بـِ HP ومربَّع HT مساوٍ لمربَّع NT. فيكون، بالتالي، مجموع مربَّع NT والفرق بين مربَّع MG ومربَّع HT مساوياً لمضروب EH بـِ HZ. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

لتكن الزاوية $\widehat{H}$ حادَّة.



الشكل ١٣

الزاوية $\widehat{EZH}$ حادَّة، لأنّها أصغر من الزاوية $\widehat{KZE}$ <القائمة> والضلع EH أعظم من الضلع HZ، فتكون الزاوية $\widehat{E}$ حادَّة. يسقط العمود، الخارِج من النقطة Z على الخطّ EH، بين E وَ H، داخل المثلّث < EZH >؛ ليكن ZO هذا العمود.

نـُبيِّن، كما فعلنا في القسم الثالث من المسألة السابقة، أنَّ مجموع مضروب EH بـِ HZ ومضروب EH بـِ HO مساوٍ لضعفيْ مربَّع الخطّ المساوي.

ونثبت، كما فعلنا في القسم الأوَّل من هذه القضيّة، أنَّ مضروب OQ بـِ OS مساوٍ لمربَّع الخطّ المساوي، إذ إنَّ OQ مساوية لـِ ES. يكون، بالتالي، مجموع مضروب OQ بـِ OS ومربَّع الخطّ المساوي مساوياً لمجموع مضروب EH بـِ HZ ومضروب EH بـِ HO. ولكنَّ مضروب OQ بـِ OS مساوٍ لمجموع مضروب QH بـِ HS ومضروب HE بـِ OH؛ فيكون مجموع مضروب QH بـِ HS ومضروب HE بـِ OH ومربَّع الخطّ المساوي مساوياً لمجموع

مضروب EH بـِ HZ ومضروب EH بـِ HO. فإذا طرحنا مضروب HE بـِ OH المشترَك، يبقى لدينا أنَّ مجموعَ مضروب QH <بـ HS ومربَّع الخطّ المساوي، مساوٍ لمضروب EH بـِ HZ>.

وننهي البرهان، كما فعلنا في القسمين السابقين، لنحصل على النتيجة، وهي أنَّ مجموع مربَّع NT والفرق بين مربَّع MG ومربَّع HT، مساوٍ لمضروب EH بـِ HZ. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

إذا تلاقى الضلعان المتحرِّكان على النقطة K أو بين النقطتين K وَ B، تكون الزاوية $\widehat{ZHE}$، في المثلّث المتحرِّك، حادَّة، ويسقط العمود<من Z على EH> داخل المثلّث[33]. نقوم، عندئذ، بالدراسة كما فعلنا في القسم الثالث من القضيّة. والعون يأتينا من الخالق.

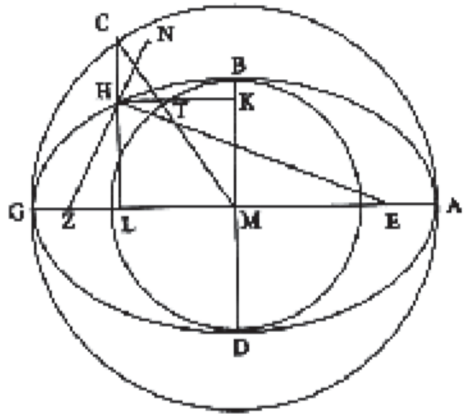
<**القضيّة ٥**> إذا علّمنا نقطة على أي شكل مدوَّر مستطيل، في أيّ موضع منه، وإذا أخرجنا من هذه النقطة العمودَ على القطر الأصغر، يكون مربَّع هذا العمود، عندئذ، مساوياً لمجموع مربَّع قسم هذا العمود المحصور داخل الدائرة المحاطة ومربَّع الفرق بين نصف القطر الأعظم وبين أصغر الضلعين المتحرِّكين المارَّين بالنقطة التي اختيرت على الشكل.

مثال: لنأخذ الشكل المدوَّر المستطيل $ABGD$، ولتكن BDT الدائرة المحاطة. لنرفع، من النقطة A، عموداً على القطر الأصغر، ولنمدِّده حتّى النقطة H على الشكل المدوَّر؛ يقطع هذا العمود الدائرة المحاطة على النقطة T. الخطّ المركزي هو EZ. لنصل بين E وَ H، وبين H وَ Z، حيث يكون EH وَ ZH الضلعين المتحرِّكين. ليكن طول HN الفرق بين طولَيْ AM وَ ZH.

أقول إنَّ مربَّع KH مساوٍ لمجموع مربَّع KT ومربَّع HN.

البرهان: لنرسم الدائرة المحيطة ACG. ولنخرِج من النقطة H العمودَ HL على القطر AZ، ولنمدِّده على استقامة حتّى C ولنصل بين M وَ C.

[33] انظر الشرح الريّاضيّ ٦-٢-٥، القضيّة ٤، في الحالة التي تكون فيها H في رأس القطع الناقص.



الشكل ١٤

يكون، بفضل ما قد بيّنّاه[٣٤]، مجموعُ مربَّع CL والفرق بين مربَّع BM ومربَّع KM – الذي هو مربَّع HL – مساوياً لمضروب EH بِـ HZ. ولكنَّ الفرق، بين مربَّع BM ومربَّع KM، مساوٍ لمربَّع KT؛ وذلك أنَّ مجموع مضروب DK بِـ KB ومربَّع KT مساوٍ لمربَّع BM؛ فيكون الفرق بين مربَّع BM ومربَّع KM مساوياً لمضروب DK بِـ KB. ولكنَّ مضروب DK بِـ KB مساوٍ لمربَّع KT؛ فينتج من ذلك، أنَّ مربَّع KT مساوٍ للفرق بين مربَّع BM ومربَّع KM.

ومجموع مربَّع CL ومربَّع KT مساوٍ لمضروب EH بِـ HZ. فإذا أضفنا مربَّع HN ، يكون مجموع مربَّع CL ومربَّع KT ومربَّع HN مساوياً لمجموع مضروب EH بـ HZ ومربَّع HN . ولكنَّ مجموع مضروب EH بِـ HZ ومربَّع HN مساوٍ لمربَّع ZN[٣٥]؛ وَ ZN مساوٍ لنصف القطر الأعظم. فيكون، بالتالي، مجموع مربَّع CL ومربَّع KT ومربَّع HN مساوياً لمربَّع CM الذي يساوي نصف القطر الأعظم. ويتساوى مربَّع CM مع <مجموع> مربَّع CL ومربَّع LM.

---

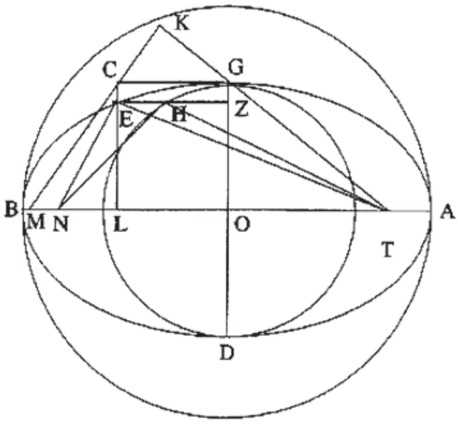
[٣٤] انظر القضيّة ٤.

[٣٥] يكون معنا، بالفعل، $AM-HZ = HZ$، فنستخرج $AM = HN+HZ = ZN$؛ ويكون $2AM = HE+HZ$، فنحصل على: $2AM.HZ = HE.HZ+HZ^2$ وَ $AM^2 = HZ^2 - 2AM.HZ+AM^2+EH.HZ$، أي $AM^2 = (HZ-AM)^2+EH.HZ$، فيكون: $ZN^2 = HN^2+EH.HZ$.

ونتيجة لذلك، يكون <مجموع> مربَّع CL ومربَّع LM مساوياً لمجموع مربَّع CL ومربَّع KT ومربَّع HN . وإذا طرحنا مربَّع CL المشترَك، يكون مربَّع LM مساوياً لمجموع مربَّع KT ومربَّع HN؛ ولكنَّ مربَّع LM مساو لمربَّع KH. وهكذا يكون مربَّع KH مساوياً <لمجموع> مربَّع KT ومربَّع HN. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيّة ٦**> إذا علّمنا نقطة على أي شكل مدوَّر مستطيل، في أيّ موضع منه، وإذا أخرجنا من هذه النقطة عموداً على القطر الأصغر، تكون، عندئذ، نسبة هذا العمود إلى قسم هذا العمود المحصور داخل الدائرة المحاطة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: لنأخذ الشكل المدوَّر المستطيل $AGBD$، ولتكن GHD الدائرة المحاطة. نختار على الشكل المدوَّر في أيّ مكان منه النقطة E، ونـُخرِج منها عموداً EHZ <على القطر الأصغر>.



الشكل ١٥

أقول إنَّ نسبة EZ إلى HZ مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر، أيْ إلى نسبة نصف القطر الأعظم إلى نصف القطر الأصغر.

البرهان: القطعة TN هي الخطّ المركزي والنقطة O هي مركز الدائرة. لنصل بين T وَ G؛ لقد برهنّا أنَّ القطعة TG مساوية لنصف القطر الأعظم؛ فلنمدِّدها على استقامة حتّى النقطة K بحيث يكون KT مساوية لـِ TE. إنَّ من الواضح أنَّ GK مساوية للفرق بين AO وَ

EN[٣٦]. لنخرِج العمودَ EL <على AB>؛ ولنأخذ M على AB بحيث تكون نسبة ML إلى OG كنسبة OG إلى OT – حيث تكون ML متناسبة مع < OG وَ OT >–، ولنمدِّد على استقامة LE حتّى C؛ ولنصل بين C وَ G.

ونبيِّن، عندئذ وفقاً لما أثبتناه، أنَّ نسبة KT – المساوية لـِ ET – إلى TM مساوية لنسبة TO – المساوية لنصف الضلع المركزيّ – إلى TG – المساوية لنصف القطر الأعظم.

والخطّان KT وَ TM كالخطّين TO وَ TG يحيطان بنفس الزاوية؛ فيكون المثلّث GTO مشابهاً للمثلّث TKM، فتكون الزاوية $\widehat{K}$، نتيجة لذلك، مساوية للزاوية $\widehat{O}$؛ ولكنَّ $\widehat{O}$ قائمة فتكون $\widehat{K}$ قائمة؛ وتكون الزاوية $\widehat{TGO}$ مساوية للزاوية $\widehat{TMK}$. والزاوية $\widehat{L}$ قائمة مثل الزاوية $\widehat{O}$؛ فيكون المثلّث CML مشابهاً للمثلّث GTO، فتكون نسبة TO إلى OG مساوية لنسبة CL إلى LM. ولكنَّ نسبة TO إلى OG مساوية لنسبة GO إلى LM، فتكون نسبة GO إلى LM مساوية لنسبة CL إلى LM؛ تكون GO، بالتالي، مساوية لـِ CL وموازية لها. فتكون القطعة GC مساوية للقطعة OL وموازية لها؛ وتكون، بالإضافة إلى ذلك، OL مساوية لـِ ZE، فتكون GC مساوية لـِ ZE، كما أثبِت أنَّ مربَّع ZE مساوٍ لمجموع مربَّع ZH ومربَّع GK[٣٧].

ولكنَّ مربَّع GC مساوٍ لمجموع مربَّع KC ومربَّع GK، لأنَّ الزاوية $\widehat{K}$ قائمة؛ فيكون مجموع مربَّع KC ومربَّع GK مساوياً لمجموع مربَّع ZH ومربَّع GK؛ فإذا طرحنا مربَّع GK المشترَك، يكون مربَّع ZH مساوياً لمربَّع KC. ولكنَّ GC موازية للقطعة OL، والزاوية $\widehat{KGC}$ مساوية للزاوية $\widehat{T}$، والزاوية $\widehat{O}$ بالإضافة إلى ذلك قائمة مثل الزاوية $\widehat{K}$؛ فيكون المثلّث KGC مشابهاً للمثلّث GOT. فنحصل على: نسبة GC إلى KC كنسبة TG إلى GO؛ ولكنَّ KC مساوية لـِ ZH وَ ZE مساوية لـِ GC وَ GT مساوية لـِ AO؛ فتكون، بالتالي، نسبة EZ إلى ZH كنسبة AO إلى OG. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

---

[٣٦] إنَّ لدينا $2AO = EN+ET$، وكنّا قد وضعنا $TE = KT$، فنحصل على $2AO - EN = KT$، ولكنَّ $TG+GK = KT$ وَ $AO = TG$، فيكون $AO-EN = GK$.

[٣٧] انظر القضيّة ٥.

<٦-٣-٤> <القطع الناقص كقطع مستوٍ للأسطوانة>

لندخل الآن ما هو ضروريّ لقطع الأسطوانة، بعد أن أدخلنا ما هو ضروريّ للمنحنى الذي نحصل عليه من حركة المثلّث.

إذا قطعنا أسطوانة قائمة <بمستوٍ> غير موازٍ للقاعدة، نسُمّي نقطة تقاطع مستوي القطع مع محور الأسطوانة "مركز الشكل"، ونسمّي الخطوط المستقيمة التي تمرُّ بمركزه "الأقطار".

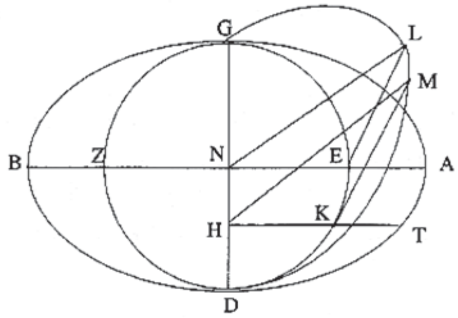
إذا قطعنا الأسطوانة بمستوٍ، موازٍ للقاعدة، يمرُّ بمركز الشكل<الذي حصلنا عليه سابقاً>، يكون القطع دائرة؛ وهذه الدائرة محاطة بالقطع الناقص. وذلك أنّنا إذا جعلنا القطع الناقص يدور حول الخطّ المشترَك – الموجود في مستوي الدائرة –، فإنَّ الدائرة تصبح داخل القطع الناقص، ويكون الخطُّ المشترَك للقطعين، القطرُ الأصغر للقطع الناقص، أصغر الأقطار. ويكون القطرُ الذي يقطعه على زاوية قائمة، أعظم الأقطار. والأقطار الأقرب من القطر الأصغر هي أصغر من الأقطار التي هي أبعد من القطر الأصغر وأقرب من القطر الأعظم.

وتتساوى الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، التي يكون قطرها مساوياً للقطر الأصغر، مع دائرة القاعدة لأسطوانة يكون هذا القطعُ الناقص قطعاً لها؛ وذلك أنَّ قاعدة الأسطوانة مماثلة للقطع الذي يمرُّ بمركز القطع الناقص على موازاة تلك القاعدة. وهذه الدائرة التي تقطع الأسطوانة <وتمرُّ> بمركز القطع الناقص، محاطة به، لأنَّ القطرَ الأصغرَ مشتركٌ بينها وبين القطع الناقص.

<**القضيّة ٧**> ليكن معنا قطعٌ ناقص والدائرة المحاطة به. نـُخرِج، من نقطة على القطر الأصغر، خطّاً موازياً للقطر الأعظم حتّى يصل إلى محيط القطع الناقص؛ تكون، عندئذ، نسبة هذا الخطّ المحصور داخل القطع الناقص إلى القسم المحصور ضمن الدائرة، كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: ليكن $AGBD$ القطع الناقص، ولتكن EGZ الدائرة المحاطة؛ النقطة N هي مركز الدائرة والقطع الناقص؛ $AENZB$ هو القطر الأعظم؛ DNG هو القطر الأصغر الذي هو قطر الدائرة. نُعلِّم نقطة على القطر DG، في أيّ مكان منه، ولتكن H هذه النقطة؛ ونخرِج منها خطّاً موازياً للخطّ AB، هو HKT، فيكون عمودياً على القطر GD.

أقول إنَّ نسبة HT إلى HK مساوية لنسبة AB إلى GD.



الشكل ١٦

البرهان: لنتوهَّم أسطوانة على الدائرة $GEDZ$؛ ولنتوهَّم أنَّ الخطّ DG يبقى ثابتاً، كأنّه محور؛ ولنتوهَّم أنَّ القطع الناقص يتحرَّك حول المحور باتجاه سطح الأسطوانة حتّى يصل إلى هذا السطح فنضعه عليه في الموضع $DLMG$ بحيث يكون الخطُّ NL نصف القطر الأعظم NA ويكون HM موضع HT. ولنصل بين E وَ L وبين K وَ M.

والزاوية $\widehat{KHG}$ قائمة، فتكون الزاوية $\widehat{MHG}$ قائمة أيضاً، لأنَّ الهيئة الأوَّليّة لا تتغيَّر. والخطُّ GN عموديٌّ على المستوي ENL، وكلُّ مستوٍ يمرُّ بالخطّ NG يكون عموديّاً على المستوي ENL، كما أشار أقليدس إلى ذلك[٣٨]. كما أنَّ كلَّ مستوٍ يمرُّ بالخطّ HG يكون عمودياً على المستوي KHM.

ولكنَّ مستوي الدائرة يمرُّ بالخطّ NG، فيكون كلّ من المستويين ENL وَ KHM عموديّاً على مستوي الدائرة. ولكنَّ السطح الجانبي للأسطوانة قائم على مستوي الدائرة، كما أنَّ القطعتين المشتركتين LE وَ MK عموديّتان على مستوي الدائرة؛ ويكون الخطُّ LE موازياً

[٣٨] يتعلّق الأمر بالتعريف ٤ من المقالة ١١ من كتاب "الأصول".

للخطّ MK، لأنّهما عموديّان على نفس المستوي. ويكون الخطّ LN موازياً للخطّ MH، لأنَّ الزاويتين $\widehat{LNG}$ وَ $\widehat{MHG}$ قائمتين؛ وكذلك يكون الخطّ EN موازياً للخطّ KH، وهذان الخطّان موجودان في مستوي القطع الناقص. تكون، نتيجة لذلك، أضلاع المثلّث LNE موازية لأضلاع المثلّث MKH، فتكون زوايا المثلّثين متساوية. وذلك أنَّ الخطَّين LN وَ NE يُشكِّلان الزاوية $\widehat{ENL}$ وأنَّ الخطَّين MH وَ HK يُشكِّلان الزاوية $\widehat{KHM}$؛ فتكون هاتان الزاويتان متساويتين. وهكذا نكون قد أثبتنا أنَّ زوايا المثلّث LNE مساوية لزوايا المثلّث MKH فيكون المثلّثان متشابهين.

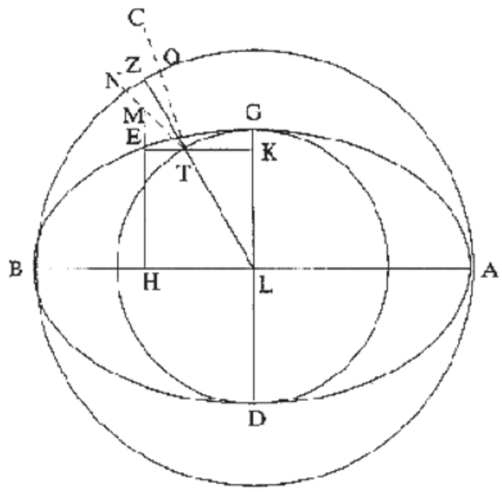
تكون نسبة LN إلى NE مساوية، إذاً، لنسبة MH إلى KH. ولكنَّ LN مساوية لـِ AN، وَ MH مساوية لـِ HT. فتكون النتيجة أنَّ نسبة AN إلى NE كنسبة TH إلى HK. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

< **لازمة ضمنيّة**> ونبيِّن أنَّ مجموعَ مربَّع/٥٠ظ/ الخطّ الخارج من طرف القطر الأعظم حتّى الدائرة – وهذا القطر يقطع الدائرة بنصفين على نقطة المركز – ومربَّع نصف قطر الدائرة، مساوٍ لمربَّع نصف القطر الأعظم.

وهذا ناتج من خاصَّة للمثلّث LEN، فهو قائم الزاوية؛ وهذا ما يجعل مجموع مربَّع NE – الذي يساوي نصف القطر الأصغر – و مربَّع LE – الذي هو الخطّ المعني بالأمر – مساوياً لمربَّع LE – الذي هو نصف القطر الأعظم.

<**القضيّة ٨** > وأقول[٣٩]: إذا رسمنا على القطع الناقص $AGBD$ دائرة<محيطة>، وإذا علّمنا على محيط القطع الناقص نقطة، وأخرجنا من هذه الأخيرة عموداً على القطر الأعظم، ومدَّدناه حتّى محيط الدائرة، مثل العمود HEZ، أقول إنَّ نسبة ZH إلى EH كنسبة AL إلى LG.

[٣٩] إنَّ نسبة هذه الفقرة إلى المتكلّم، وكذلك الصياغة التي تليها – ذات الأسلوب الذي يميِّز "مثال القضيّة" أكثر ممّا يُميِّز صيغتها – تشيران، كما يبدو، إلى غياب صيغة القضيّة.



الشكل ١٧

<البرهان> لنرسم الدائرة المحيطة، وهي الدائرة GTD. نـُخرِج من النقطة E < على القطع الناقص> عموداً، ETK، على القطر الأصغر. ونصل بين T وَ L، حيث تكون L مركز القطع الناقص؛ ونمدِّد الخطّ LT على استقامة حتّى يصل إلى N على محيط الدائرة <المحيطة>؛ ويقطع الخطُّ LN الخطَّ HZ على النقطة M.

المثلّث LKT مشابه للمثلّث TEM، إذ إنَّ كلاً منهما له زاوية قائمة، بينما يتقاطع LM وَ TE على النقطة T. نستخرِج من ذلك، بالتركيب بين النِسَب، أنَّ نسبة EK إلى KT مساوية لنسبة ML إلى LT. ولكنّنا بيّنّا أنَّ نسبة EK إلى KT كنسبة AL – نصف القطر الأعظم – إلى LT – نصف القطر الأصغر، أي كنسبة NL إلى LT. ويكون، بالتالي، NL مساوياً لـِ ML؛ وهذا محال غير ممكن[٤٠].

ونثبِت، أيضاً، أنَّ الخطَّ < LT > لا يُمكن أن يمرَّ فوق النقطة Z. فلو كان ذلك ممكناً، لَمَرَّ الخطُّ LT بالنقطة O؛ فلنمدِّده، عندئذ، ولنمدِّد HZ بحيث يتقاطعان على النقطة C. فإذا كرَّرنا ما قمنا به، يُمكن أن نثبِت أنَّ الخطّ CL مساوٍ لـِ OL؛ وهذا محال غير ممكن.

يكون، إذاً، من المستحيل أن يمرَّ الخطُّ LT، الممدَّدُ على استقامة، بنقطة غير النقطة Z.

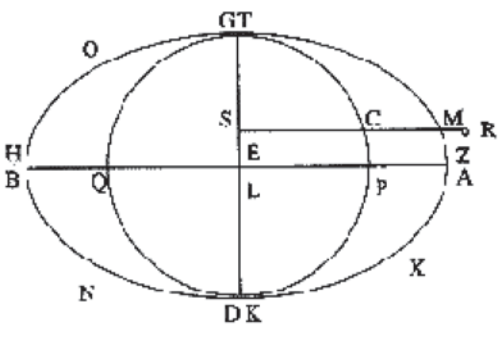
[٤٠] لا يُمكن، إذاً، أن تكون النقطة M بين T وَ N؛ أي أنَّ الخطّ LT، بعبارة أخرى، لا يقطع الخطّ HZ تحت النقطة Z.

والخطُّ TE موازٍ للخطّ LH؛ فتكون نسبة ZL – نصف القطر الأعظم – إلى LT – نصف القطر الأصغر – كنسبة العمود ZH إلى ZE ، جزء ZH الموجود داخل القطع الناقص. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيّة ٩**> نريد أن نُبرهن أنَّ الشكل المدوَّر المستطيل، المولَّد بحركة المثلّث، مساوٍ للقطع المائل لأسطوانة، بحيث يكون القطر الأعظم لهذا القطع مساوياً للقطر الأعظم للشكل المدوَّر المستطيل، وبحيث يكون القطر الأصغر لهذا القطع مساوياً للقطر الأصغر للشكل المدوَّر المستطيل؛ ونريد أن نبرهن أنَّ أجزاء هذين الشكلين متطابقة جزءاً جزءاً، وأنّهما متطابقان.

مثال: لنفرض أنَّ الشكلَ $AGBD$، في كلّ أجزائه شكلٌ مدوَّر مستطيل مولَّدٌ بحركة مثلّث، وأنَّ الشكل $ZHKT$ قطع مائل لأسطوانة، بحيث يكون الخطُّ ZH مساوياً للقطر AB، ويكون القطر TK مساوياً للقطر GD؛ AB هو القطر الأعظم مثل ZH؛ GD هو القطر الأصغر مثل TK.

أقول إنَّ الشكلين المدوَّرين $AGBD$ وَ $ZHKT$ متساويان وأنّهما متطابقان.



الشكل ١٨

البرهان: يتقاطع القطران AB وَ GD على النقطة E حيث ينقسم كلّ واحد منهما إلى نصفين. وكذلك يتقاطع القطران ZH وَ TK على النقطة< L >حيث ينقسم كلّ واحد منهما إلى نصفين. فإذا ركّبنا الشكل $AGBD$ على الشكل $ZHKT$ بحيث يلتصق الخطّ AB بالخطّ GD وتلتصق النقطة A بالنقطة Z والنقطة B بالنقطة H، فإنَّ النقطة E تلتصق بالنقطة L، لأنَّ الشكل قد

قسم إلى نصفين في النقطة E وفي النقطة L. ويلتصق الخطّ GD بالخطّ TK، لأنَّ كل واحد منهما عموديٌ على القطر الآخر؛ فتلتصق النقطة G بالنقطة T – إذ إنَّ ET مساوية لـِ EG – كما تلتصق النقطة D بالنقطة K.

يتطابق القوس $\widehat{AG}$ مع القوس $\widehat{ZT}$، والقوس $\widehat{AD}$ مع القوس $\widehat{ZK}$، والقوس $\widehat{DB}$ مع القوس $\widehat{KH}$، والقوس $\widehat{GB}$ مع القوس $\widehat{TH}$. وإذا لم تتطابق هذه الأقواس ثنائياً، يُمكن أن تكون الأقواس $\widehat{ZRT}$، $\widehat{TOH}$ ، $\widehat{ZXK}$ وَ $\widehat{KNH}$ في الوضع الذي يظهر في الشكل ١٨.

فلنرسم، عندئذ، دائرة على القطر TK؛ فتكون هذه الدائرة محاطة بالشكلين لأنّهما مرسومان على القطر الأصغر؛ وهي الدائرة $TPKQ$. فلنُعلِّم على الخطّ TL، نقطة هي S، أينما كانت؛ ولنُخرِج منها خطّاً موازياً <لـِ PQ>، هو الخطّ SCM.

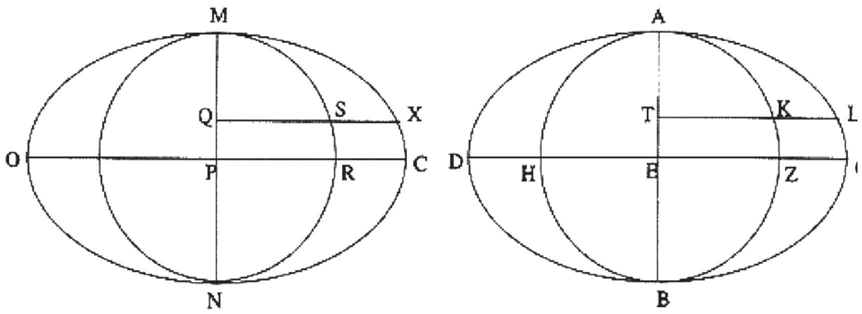
والقوس $\widehat{TMZ}$ جزء من الشكل المدوَّر المستطيل المولّد بحركة المثلّث، فتكون نسبة MS إلى SC كنسبة ZL إلى LT، أي كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر، وفقاً لما برهنّاه سابقاً. والقوس $\widehat{TRZ}$ جزء من القطع المائل للأسطوانة، فتكون أيضاً نسبة RS إلى RC كنسبة ZL إلى LT، وفقاً لما برهنّاه سابقاً. ولكنَّ نسبة ZL إلى LT كنسبة MS إلى SC فتكون نسبة SC إلى RS كنسبة SC إلى MS. فيكون من ذلك MS مساوياً لـِ RS. وهذا محال غير ممكن.

يكون، إذا، من المستحيل أن لا يتطابق الشكل المدوَّر $ABGD$ مع الشكل المدوَّر $ZHTK$. فيتطابق أحدهما مع الآخر. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

لنبرهن هذه الخاصّة بطريقة أخرى، مختلفة عن طريقة الاستدلال بالخُلْف.

ليكن $AGBD$ الشكلَ المدوَّر المستطيل المولّدُ بحركة المثلّث، وليكن $MNCO$ شكل القطع المائل للأسطوانة، بحيث يكون <زوجا> الأقطار – أي القطران الأعظمان والقطران الأصغران – مشتركين : القطر الأعظم GD مساوٍ للقطر الأعظم CO والقطر الأصغر AB مساوٍ للقطر الأصغر MN.

أقول إنَّ الشكل $AGBD$ يتطابق مع الشكل $MNCO$.



الشكل ١٩

البرهان: لنرسم في كلّ شكل من الشكلين دائرة محاطة. تكون هاتان الدائرتان، *ABH* وَ *NMR*، متساويتين. لأنَّ القطر الأصغرين متساويان. فلنُعلِّم على القوس $\widehat{AG}$ نقطة هي *L*، أينما كانت؛ ولنُخرِج منها خطّاً موازياً للخطّ *GE*، هو الخطّ *LT*.

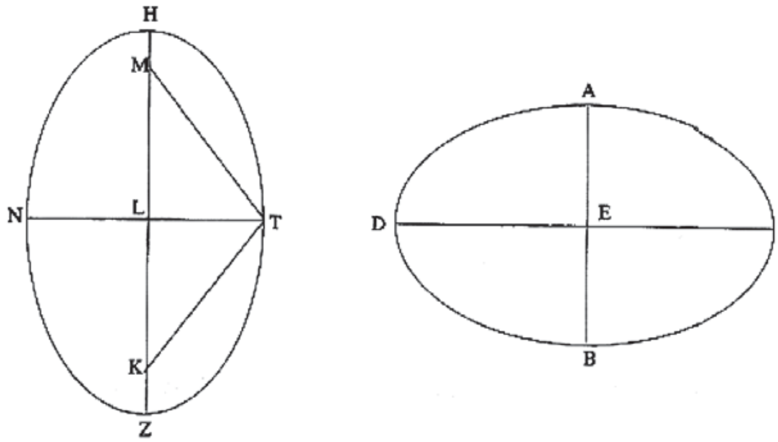
لنفصل الخطّ *PQ* <على *PM* > مثل الخطّ *ET*. ونُخرِج من النقطة *Q* خطّاً موازياً للخطّ *CRP*، وهو الخطّ *QSX*. تكون نسبة *LT* إلى *TK*، وفقاً لما أثبتناه سابقاً حول الشكل المولَّد من حركة المثلّث، كنسبة *GE* إلى *EZ* أي كنسبة *CP* إلى *PR*، إذ إنَّ كلّ خطّ <من الخطّين الأوَّلين> مساوٍ، على التوالي، لخطٍّ من الخطّين الآخرين. كما يظهر، وفقاً لما أثبتناه سابقاً حول قطع الأسطوانة، أنَّ نسبة *CP* إلى *PR* كنسبة *XQ* إلى *QS*. فتكون نسبة *LT* إلى *TK*، كنسبة *XQ* إلى *QS*. وإذا بدّلنا، تكون نسبة *XQ* إلى*LT* كنسبة *QS* إلى *TK*. ولكنَّ *QS* مساوٍ لِـ *TK*، لأنَّ الدائرتين متساويتان ولأنَّ *ET* مساوٍ لِـ *PQ*، فيكون *XQ* مساوٍ لِـ *LT*.

إذا أطبقنا الشكل المدوَّر *AGBD* على الشكل المدوَّر *MNCO*، تتطابق نقاط *AGBD* مع نقاط *MNCO*، وتلتصق النقطة *T* مع النقطة *Q*، ويلتصق الخطُّ *LT* مع الخطّ *XQ*، لأنَّ كلَّ خطٍّ منهما عموديّ على قطر الدائرتين؛ فتلتصق النقطة *L* مع النقطة *X* لأنَّ الخطَّ *LT* مساوٍ للخطّ *XQ*.

وهكذا برهنّا أنَّ كلَّ نقطة من الشكل المدوَّر *AGBD* تلتصق بنقطة من الشكل *MNCO*. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

<**القضيّة ١٠**> نريد أن نـُبيِّن كيف نعمل شكلاً مدوَّراً <مستطيلاً> حاصلاً من حركة مثلّث، بحيث يكون مساوياً لقطع مائل لأسطوانة معلومة.

لنأخذ القطع $AGBD$، القطر الأصغر AB، والقطر الأعظم GD. إذا أردنا أن نعمل شكلاً مدوَّراً <مستطيلاً> حاصلاً من حركة مثلّث، بحيث يكون مساوياً للقطع $ABGD$، نأخذ خطّاً اختيارياً ZH، ونقسمه إلى نصفين. نـُخرِج من L عموداً على LT مساوياً لـِ EA. نـُثبِّت < K على ZH، بحيث يكون > مجموع مربَّع LT ومربَّع LK مساوياً لمربَّع EG.



الشكل ٢٠

إنَّ من الواضح، استناداً إلى ما بُرهِن سابقاً، أنَّ LK مساوٍ للعمود الخارِج من طرف القطر الأعظم <للقطع> على <مستوي> الدائرة التي تقطع الشكلَ في مركزه[٤١].

لنصل بين T وَ K؛ يكون واضحاً أنَّ TK مساوٍ لـِ EG. نختار LM مساوياً أيضاً لـِ LK. ونصل بين T وَ M، فيكون من ذلك أنَّ TM مساوٍ لـِ EG. يكون، بالتالي، <مجموع> TK وَ TM مساوياً للخطّ GD. لنجعل الخطّين TK وَ TM يدوران، على أن يبقى KM ثابتاً، حتّى يرجعا إلى وضعهما الأوّليّ. تـُولّد هذه الحركة الشكل $TZNH$[٤٢].

أقول إنَّ الشكل $TZNH$ مثل الشكل $AGBD$.

٤١ انظر القضيّة ١.
٤٢ هكذا تكون النقطتان Z وَ H، اللتان أدخلتا أعلاه، على القطع الناقص.

البرهان: يكون <مجموع> الخطّين MZ وَ ZK، في نهاية حركة المثلّث التي تنقل النقطة T حتـى النقطة Z، مساوياً لمجموع TK وَ TM. وعندما يدور المثلّث لينقل النقطة T حتـى النقطة H، يكون <مجموع> الخطّين KH وَ HM، مساوياً لمجموع الخطّين MZ وَ ZK؛ فإذا طرحنا KM المشترَك، نستخرِج أنَّ ضعفي MH مساوٍ لضعفي ZK، فيكون MH مساوياً لـِ ZK. فيكون ZH مساوياً لمجموع TK وَ TM، لأنَّ مجموع الخطّين MZ وَ ZK مساوي لمجموع الخطّين KT وَ TM، ولأنَّ MH مساوي لـِ ZK. ولكنَّ مجموع KT وَ TM مساوٍ لـِ GD، فيكون GD، بالتالي، مساوياً لضعفي ZH. وهكذا يكون القطر الأعظم مساوياً للقطر الأعظم.

نمدِّد TL على استقامة حتـى N، بحيث يكون مجموع KN وَ NM مساوياً لمجموع KT وَ TM؛ وَ ML مساوٍ لـِ LK، وَ LN مشترَك، والزاويتان <في النقطة> L متساويتان، فنحصل على التساوي بين KN وَ NM. فيكون KN مساوياً لـِ KT، وتكون الزاوية المشكّلة من الوترين قائمة؛ ويكون، بالتالي، مجموع مربَّع KL و مربَّع LT مساوياً لمجموع مربَّع KL و مربَّع NL. فإذا طرحنا مربَّع KL المشترَك، يبقى لدينا أنَّ مربَّع LN مساوٍ لمربَّع LT؛ فيكون الخطّ LN مساوياً للخطّ LT، ويكون LT مساوياً لـِ AE. ونستخرج من ذلك أنَّ AB مساوٍ لـِ TN.

يكون للشكلين المدوَّرين $AGBD$ وَ $TZNH$ – الشكل الأوَّل هو قطع الأسطوانة والثاني هو الشكل الحاصل من حركة المثلـَث – أقطارٌ مشترَكة، على التوالي، القطران الأعظمان والقطران الأصغران. فيكونا متساويين، فيتطابقان.

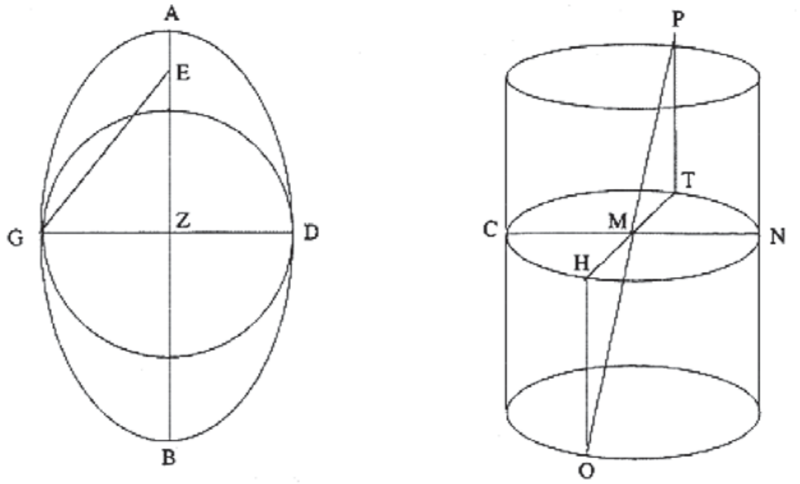
وهكذا حدَّدنا الشكل المدوَّر $TZNH$ الحاصل من حركة مثلّث والمساوي للقطع $AGBD$. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيّة ١١**> نريد أن نـُبيِّن كيف نجد قطعاً لأسطوانة بحيث يكون مساوياً لشكل مدوَّر <مستطيل> معلوم حاصل من حركة مثلّث.

نأخذ الشكل المدوَّر <المستطيل> $AGBD$ الحاصل من حركة المثلّث. ليكن AB قطره الأعظم وَ GD قطره الأصغر وليكن Z مركزه. لنتوهَّم دائرة من بين كلّ الدوائر التي يمكن أن تنطبق على دائرة محاطة بالشكل $AGBD$. ولنتوهَّم أسطوانة قائمة على دائرة. ولنتوهَّم المستوي LK الذي يقطع الأسطوانة ويقطع محورها. ولنتوهَّم الدائرة $HTNC$ الناتجة من قطع موازٍ للقاعدة، حيث يكون HT قطراً لها وتكون M مركزها.

لنفصل <على العمود في النقطة T على مستوي الدائرة> الخطَّ TP بحيث يكون مساوياً لـِ ZE[٤٣]، وحيث يكون NC <قطراً > عمودياً على HT. ويوجد مستوٍ يمرُّ بالنقاط N، C وَ P لأنَّ أيَّ نقاط ثلاث <غير متسامتة>[٤٤] تُحدِّد مستوياً. ولنمدِّده على استقامة حتّى يقطع الأسطوانة. وليكن $PCON$ محيط <هذا القطع>.

أقول إنَّ القطع $PCON$ هو مثل الشكل المدوَّر $AGBD$.



الشكل ٢١

البرهان: يتساوى القطر الأصغر GD مع القطر الأصغر NC <للقطع>. ومجموع المربّعين TP وَ MT مساوٍ لمربَّع PM؛ والمربّعان TP وَ MT مساويان للمربَّعين GZ وَ ZE. ولكنَّ مجموع مربَّع GZ ومربَّع ZE مساوٍ لمربَّع GE. فيكون مربَّع GE مساوياً لمربَّع PM.

[٤٣] تكون النقطة E بؤرة القطع الناقص.
[٤٤] إضافة من المترجِم.

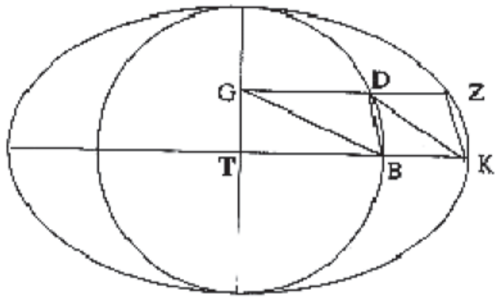
فنستخرِج من ذلك أنَّ PM مساوٍ لـِ GE. ولكنَّ GE مساوٍ لـِ AZ، فيكون AZ مساوٍ لـِ PM. ونبرهن أيضاً أنَّ ZB مساوٍ لـِ MO.

وهكذا يكون القطر الأعظم AB مساوياً للقطر الأعظم OP؛ كما يكون القطر الأصغر مساوياً للقطر الأصغر. يكون الشكلُ المدوَّر $ABGD$، بالتالي، مثل الشكل $PCON$. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيّة ١٢**> لنرسم في ربع قطعٍ ناقصٍ أوتاراً متتالية، مهما كانت، على أن نبدأ من طرف القطر الأعظم حتّى نصل إلى <طرف> القطر الأصغر؛ ولنخرج من أطراف <هذه الأوتار> أعمدة على القطر الأصغر تقطع ربع الدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ ولنرسم أوتار الأقواس المحدَّدة <على الدائرة> بهذه الطريقة، فنـُشكِّل بذلك سطحين مضلّعين أحدهما محاط بالقطع الناقص والثاني محاط بالدائرة، بحيث تكون نسبة مساحة السطح المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة السطح المحاط بالدائرة، كنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

مثال: ليكن ATK ربع قطعٍ ناقصٍ مُحدَّد بنصفيْ قطرين، نصف القطر الأعظم KT <ونصف القطر> الأصغر AT؛ وليكن $ADBT$ ربع الدائرة المحاطة <بربع القطع الناقص>، حيث تكون T المركزَ. نرسم أوتار القطع الناقص التي يكون KZ أحدها. ونـُخرِج من النقطة Z عموداً على AT هو ZDG، حيث تكون النقطة D على محيط الدائرة. ونرسم، في الدائرة، الوترَ DB. وهكذا نحصل على سطحين <مضلّعين> محاطين على التوالي بالشكلين، وهما $KZGT$ المحاط بالقطع الناقص و $BDGT$ المحاط بالدائرة.

أقول إنَّ نسبة السطح المضلّع، المحاط بالقطع الناقص – الذي يكون KZ أحد أضلاعه – إلى السطح المضلّع، المحاط بالدائرة – الذي يكون BD أحد أضلاعه – مساوية لنسبة KT إلى AT.



الشكل ٢٢

البرهان: لنرسم الخطّين KD وَ BG. وهما يقسمان كلَّ واحد من المنحرفين[٤٥] إلى مثلّثين. ويكون للمثلّثين KZD وَ BDG ارتفاعان متساويان. فتكون نسبة مساحة أحدهما إلى <مساحة> الآخر مساوية لنسبة القاعدة ZD إلى القاعدة DG. وتكون، أيضاً، نسبة مساحة المثلّث KDB إلى مساحة المثلّث BGT كنسبة KB إلى BT.

ولكنَّ نسبة KB إلى BT كنسبة ZD إلى DG، وفقاً لما أثبت سابقاً. فتكون نِسَب المثلّثات الأربعة، المأخوذة ثناءً، متساوية؛ وإذا جمعنا هذه النسب، نحصل على النتيجة وهي أنَّ نسبة مساحة مربَّع الأضلاع KD إلى مساحة مربَّع الأضلاع BG مساوية فعلاً لهذه النسبة نفسها، أي إلى نسبة KB إلى BT.

ونعيد هذا العمل لبقية السطوح، المحدَّدة بالأوتار والأعمدة، التي تكون نسب – مساحة أحدها إلى مساحة الآخر – مساوية لنفس النسبة. ولكنَّ المقاديرَ المتناسبة تبقى متناسبة إذا جُمعت. وهكذا تكون نسبة مجموع مساحات السطوح المحاطة بربع القطع الناقص KTA إلى مجموع مساحات السطوح المحاطة بربع الدائرة، مساوية لنسبة KT إلى BT.

إنَّ ما قمنا به في ربع القطع الناقص وربع الدائرة يُمكن تحقيقه في الأرباع الأخرى التي تكمل الشكلين الأخيرين. وهكذا تكون نسبة مساحة السطح، المحاط بالقطع الناقص والمحدود بالأوتار المرسومة على نصف القطع الناقص وبالقطر الأعظم، إلى مساحة السطح، المحاط

[٤٥] بالمعنى الذي أعطاه أقليدس في التعريف ٢٢ من المقالة الأولى من كتاب "الأصول".

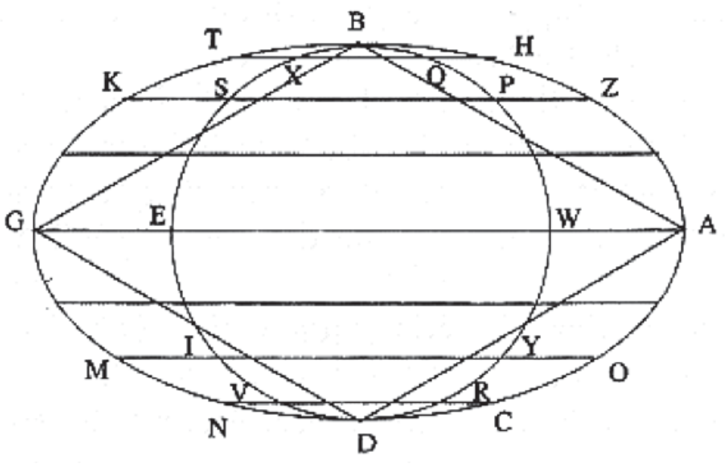
بنصف الدائرة والمحدود بالأوتار المرسومة على نصف محيط الدائرة وبقطر نصف الدائرة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر.

وتكون النتيجة مماثلة بالنسبة إلى النصف الآخر من القطع الناقص – أي القسم المُكَمِّل للقطع الناقص – وبالنسبة إلى النصف الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، وهو النصف الباقي المُكَمِّل للدائرة. والطريقة المتّبعة هي نفسها. فتكون نسبة مساحة كلّ الشكل المضلَّع المحاط بالقطع الناقص إلى مساحة كلّ الشكل المضلَّع المحاط بالدائرة، مساوية لنسبة القطر الأعظم إلى القطر الأصغر. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

<**القضيّة ١٣**> نريد أن نـُبيِّن أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى، المحاطة بالقطع الناقص، إلى مساحة القطع الناقص، مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

مثال: ليكن $ABGD$ القطع الناقص، وليكن AG قطره الأعظم، وليكن BD قطره الأصغر؛ والدائرة الصغرى المحاطة به هي $BWDE$، وقطرها هو WE.

أقول إنَّ نسبة مساحة $ABGD$ إلى مساحة الدائرة $EBWD$، كنسبة AG إلى BD.



الشكل ٢٣

البرهان: إنَّ نسبة WE، القطر الأصغر، إلى AG، القطر الأعظم، كنسبة مساحة الدائرة $EBWD$ إلى مساحة القطع الناقص $ABGD$، ولا يمكن أن يكون غير ذلك. وإذا فرضنا أنَّ

غير ذلك ممكنٌ، تكون نسبة WE إلى AG مساوية لنسبة مساحة الدائرة $EBWD$ إلى مقدار مساحة أصغر أو أعظم من مساحة القطع الناقص.

ليكن مقدار هذه المساحة، في البداية، أصغر من مساحة القطع الناقص، وليكن L مقدار هذه المساحة.

تكون المساحة L، إذاً في هذه الحالة، أصغر من مساحة القطع الناقص، والفرق بينهما هي المساحة U. لنرسم الخطوط AD، DG، GB وَ BA. تـُحدِّد هذه الخطوط، الخارجة من سطح القطع الناقص، انطلاقاً من محيط سطح القطع الناقص باتجاه المركز، سطحاً مساحته أعظم من نصف مساحة القطع الناقص، وهو المعيَّن $ABGD$. لنقسم كلَّ قوس من هذه الأقواس إلى قسمين، ولنرسم الأوتار. تـُحدِّد هذه الأوتار، انطلاقاً من محيط سطح القطع الناقص باتجاه المركز، سطوحاً أعظم من <قِطَع القطع الناقص المحدَّدة بِـ > الأقواس. وإذا كرَّرنا هذه العمليّة باستمرار[٤٦]، نحصل على سطح أصغر من السطح U. وتكون <قِطَع القطع الناقص المحدَّدة بِـ > الأقواس $\widehat{AZ}$، $\widehat{ZH}$، $\widehat{HB}$، $\widehat{BT}$، $\widehat{TK}$، $\widehat{KG}$، $\widehat{GM}$، $\widehat{MN}$، $\widehat{ND}$، $\widehat{DC}$، $\widehat{CO}$ وَ $\widehat{OA}$ <بمجموعها> أصغر من السطح U. فينتج من ذلك أنَّ مساحة السطح المضلّع، المولّد بهذه الطريقة، أعظم من L.

نخرج، من أطراف هذه الأقواس نفسها التي حصلنا عليها بالقسمة، خطوطاً موازية للقطر الأعظم. ينقسم محيط الدائرة، عندئذ، إلى عدد مماثل من الأقواس في النقاط P، Q، X، S، I، V، R وَ Y. نرسم الأوتار، مثلما فعلنا سابقاً. تكون، عندئذ، نسبة مساحة الشكل المحاط بالدائرة – أي ذلك الذي يمرُّ بالنقاط W، P ، Q، B، X، S، E، I، V، D، R، Y – إلى مساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص – أي ذلك الذي يمرُّ بالنقاط Z، H، B، T، K، G، M، N، D، C، O، A – مساوية لنسبة WE إلى AG، وهذه النسبة كنسبة مساحة الدائرة إلى L. وهكذا تكون نسبة مساحة الشكل المحاط بالدائرة إلى مساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص كنسبة مساحة الدائرة إلى L. ولكنَّ مساحة الشكل المحاط بالدائرة أصغر من مساحة الدائرة،

---

[٤٦] يتضمَّن الشكل، الوارد في المخطوطة، بعض الأخطاء التي صحَّحناها هنا. ولا يتلاءم هذا الشكل، من ناحية أخرى، مع النصّ؛ إذ يجب أن نأخذ نقطة قسمة على كلّ قوس من الأقواس $\widehat{AZ}$، $\widehat{KG}$، $\widehat{GM}$ وَ $\widehat{OA}$. فيكون معنا 2^2 قوساً على كلّ ربع من القطع الناقص. ويكون للمضلّع 2^4 ضلعاً. ولنلاحظ أنَّ الشكلَ غيرُ أساسيّ في الاستدلال الوارد هنا.

ومساحة الشكل المحاط بالقطع الناقص أعظم من L. فتكون، ضمن هذه الشروط، نسبة الأصغر إلى الأعظم كنسبة الأعظم إلى الأصغر، وهذا محال غير ممكن.

ليس من الممكن، إذاً، أن تكون نسبة WE إلى AG كنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة القطع الناقص.

أقول ولا يمكن أن تكون نسبة WE إلى AG كنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أعظم من مساحة القطع الناقص. وإذا فرضنا أنَّ ذلك ممكنٌ، تكون نسبة مساحة أصغر من مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم. لتكن L هذه المساحة التي تنقص عن مساحة الدائرة بمقدار U.

نعمل مثلما فعلنا سابقاً. فنقسم محيط الدائرة إلى أجزاء؛ ونرسم الأوتار؛ فيكون مجموع المساحات، المحدَّدة بهذه الأوتار وبالأقواس، أصغر من المساحة U. تكون، ضمن هذه الشروط، مساحة السطح المضلّع المحاط بالدائرة أعظم من المساحة L.

نخرج، من أطراف أقواس الدائرة، خطوطاً موازية للقطر الأعظم، تفصل على القطع الناقص عدداً مماثلاً من الأقواس. ونرسم الأوتارَ المحدَّدة بأقواس القطع الناقص. وهكذا نبرهن، كما في السابق، أنَّ نسبة مساحة السطح المضلّع المحاط بالدائرة – التي هي أعظم من L – إلى مساحة المضلّع المحاط بالقطع الناقص – التي هي أصغر من مساحة القطع الناقص – مساوية لنسبة L – التي هي أصغر من الشكل المحاط بالدائرة – إلى مساحة القطع الناقص – التي هي أعظم من مساحة الشكل المحاط به. تكون، وفقاً لهذه الشروط، نسبة الأصغر إلى الأعظم كنسبة الأعظم إلى الأصغر، وهذا محال غير ممكن.

فليس من الممكن، إذاً، أن تكون نسبة مساحة أصغر من مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

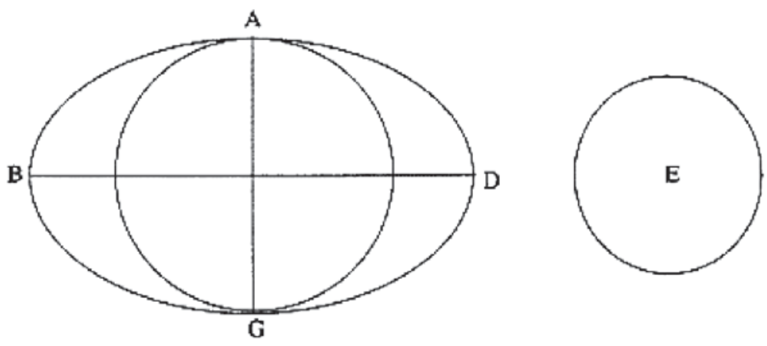
وهكذا برهنّا أنَّ نسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم غير مساوية لنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة أصغر من مساحة أصغر أو أعظم من مساحة القطع الناقص[٤٧]. فتكون هذه النسبة مساوية لنسبة مساحة الدائرة إلى مساحة القطع الناقص.

[٤٧] حول خصوصيّة استخدام هذه الطريقة للاستدلال بالخلف، انظر الشرح الريّاضيّ للقضيّة ١٣ ضمن ٦-٢-٧، الملاحظة ١.

<**القضيّة ١٤**> نريد أن نـُبرهن أنَّ نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة دائرة اختياريّة مساوية لنسبة القطع الأعظم إلى خطّ، بحيث تكون نسبته إلى قطر الدائرة مساوية لنسبة هذا القطر نفسه إلى القطر الأصغر للقطع الناقص.

ليكن $ABGD$ القطع الناقص، ولتكن AG الدائرة المحاطة؛ ولتكن E دائرة أخرى اختياريّة. وليكن Z خطّاً بحيث تكون نسبة Z إلى قطر E كنسبة هذا القطر نفسه إلى AG.

أقول إنَّ نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة القطر BD إلى الخطّ Z.



الشكل ٢٤

البرهان: تتساوى نسبة مساحة الدائرة AG إلى مساحة الدائرة E مع نسبة مربَّع AG إلى مربَّع قطر E. ولكنَّ نسبة مربَّع AG إلى مربَّع E مساوية لنسبة الخطّ AG إلى الخطّ Z، لأنَّ الخطوط الثلاثة متناسبة.

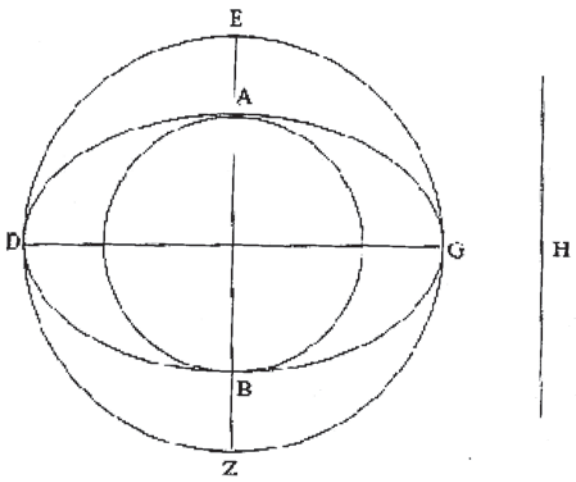
فتكون نسبة مساحة الدائرة AG إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة AG إلى Z، وتكون نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة BD إلى AG. فإذا أخذنا، ضمن هذه الشروط، نسبة التساوي، تكون نسبة مساحة القطع الناقص $ABGD$ إلى مساحة الدائرة E مساوية لنسبة BD إلى Z.

<**القضيّة ١٥**> نريد أن نـُبرهن أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص مساوية لمساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى.

مثال: لتكن $EGZD$ الدائرة العظمى؛ وليكن $ABGD$ القطع الناقص، ولتكن AB الدائرة الصغرى.

أقول إنَّ نسبة الدائرة AB إلى القطع الناقص $ABGD$ مساوية لنسبة القطع الناقص $ABGD$ إلى الدائرة $EGZD$.

البرهان: نرسم <الخطّ H بحيث تكون> نسبة الخطّ AB إلى الخطّ GD مساوية لنسبة GD إلى H. ولقد أثبِتَ أنَّ نسبة مربَّع AB إلى H مساوية لمربَّع AB إلى مربَّع GD. ولكنَّ مربَّع AB إلى مربَّع GD مساوٍ لمساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ ؛ فينتج من ذلك أنَّ نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ مساوية لنسبة AB إلى H.



الشكل ٢٥

تكون نسبة مساحة القطع الناقص$AGBD$، إلى مساحة <ملائمة> T، مساوية لنسبة GD إلى H. ولكنّنا أثبتنا أنَّ نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة القطع الناقص $ABGD$ مساوية لنسبة AB إلى GD./٥٢و/ فينتج من ذلك، إذا أخذنا نسبة التساوي، أنَّ T كنسبة AB إلى H. ولكنّنا قد بيّنّا أنَّ نسبة AB إلى H كنسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ؛ فينتج من ذلك أنَّ نسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ كنسبة مساحة الدائرة AB إلى مساحة الدائرة EZ؛ فتكون مساحة الدائرة EZ مساوية للمساحة T. ولكنَّ نسبة مساحة الدائرة AB، وفقاً للفرضيّات، إلى مساحة القطع الناقص $AGBD$ مساوية لمساحة القطع الناقص $AGBD$ إلى المساحة T. والمساحة T مساوية لمساحة الدائرة EZ، فتكون نسبة مساحة الدائرة AB إلى

مساحة القطع الناقص $AGBD$ مساوية لنسبة القطع الناقص $AGBD$ إلى مساحة الدائرة EZ. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

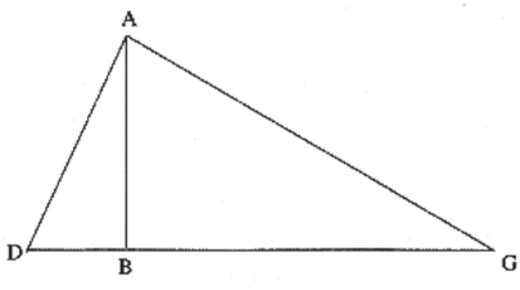
<**اللازمة ١**> نستخرج من النتيجة أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة الدائرة العظمى مساوية لمربَّع نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص، وأنَّ نسبة مساحة الدائرة العظمى إلى مساحة الدائرة الصغرى مساوية لمربَّع نسبة مساحة الدائرة العظمى إلى مساحة القطع الناقص.

<**اللازمة ٢**> نستخرج من النتيجة أنَّ نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم. وذلك أنَّ نسبة مساحة الدائرة الصغرى إلى مساحة القطع الناقص مساوية لنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم، ومساوية أيضاً إلى نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى. فتكون، بالتالي، نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة الدائرة العظمى كنسبة القطر الأصغر إلى القطر الأعظم.

<القضيّة ١٦> مساحة كلّ قطع ناقص مساوية لمساحة المثلّث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة مساوياً لمحيط الدائرة المحاطة بالقطع الناقص، ويكون الضلع الثاني مساوياً لنصف القطر الأعظم.

<**مثال**> ليكن AB محيط الدائرة المحاطة؛ وليكن BG نصف القطر الأعظم لهذا القطع الناقص، حيث تكون $\widehat{ABG}$ زاوية قائمة. لنصل بين A وَ G.

أقول إنَّ مساحة المثلّث ABG مساوية لمساحة القطع الناقص المذكور.



الشكل ٢٦

البرهان: لنمدِّد الخطّ GBعلى استقامة، بحيث يكون BD مساوياً لنصف القطر الأصغر. فتكون مساحة المثلّث ABD، بفضل ما برهنه أرشميدس، مساوية لمساحة الدائرة الصغرى[٤٨]. وتكون نسبة مساحة القطع الناقص إلى مساحة المثلّث ABD، بفضل ما نحن أثبتناه، كنسبة مساحة المثلّث ABG إلى مساحة المثلّث ABD. فتكون مساحة القطع الناقص مساوية، بالفعل، لمساحة المثلّث ABG. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

ونبيِّن ببرهان مشابه أنَّ مساحة القطع الناقص مساوية لمساحة المثلّث القائم الزاوية الذي يكون أحد ضلعيه المحيطين بالزاوية القائمة مساوياً لمحيط الدائرة المحيطة، ويكون الضلع الثاني مساوياً لنصف القطر الأصغر. اِفهمْ ذلك جيِّداً.

<**اللازمة ١**> نستخرِج مما أثبتناه أنّنا إذا أخذنا خمسة أسباع ونصف السبع من القطر الأصغر، وإذا ضربنا هذا المقدار بالقطر الأعظم، نحصل على مساحة القطع الناقص.

نحصل، في الواقع، على مساحة المثلّث ABG إذا ضربنا نصف AB بـِ GB. ونصف AB يساوي مجموع ثلاثة أضعاف BD وسِبع BD؛ فيكون، بالتالي، ربع نصف AB مساوياً لخمسة أسباع ونصف السبع من BD. فيكون، بفضل ذلك، مضروبُ خمسة أسباع ونصف السبع من ضعفي BD بضعفيْ BG مساوياً لمساحة المثلّث ABG. وهذا ما أردنا أن نبيِّن.

<**اللازمة ١**> إذا كانت مساحة القطع الناقص معلومة، وكان أحد القطرين معلوماً، يكون القطر الآخر معلوماً.

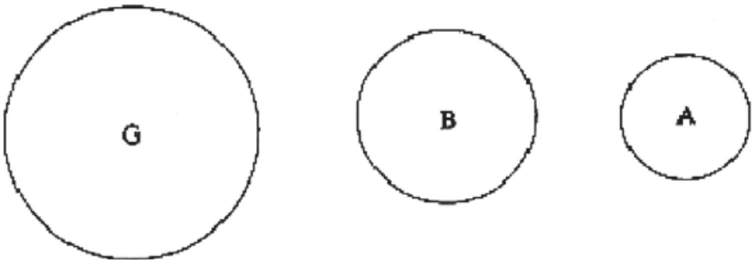
فليكن معلوماً القطرُ الأعظم ولتكن مساحة القطع الناقص معلومة. فإذا أضفنا إلى المساحة ثلاثة أجزاء من أحد عشر جزءاً منها وقسمنا الحاصل بالقطر الأعظم المعلوم، نحصل على القطر الأصغر الغير معلوم.

<**القضيّة ١٧**>: تتساوى مساحة أيّ قطع ناقص مع مساحة الدائرة التي يكون قطرها مساوياً للوسط المتناسب بين قطريْ القطع الناقص المعنيّ بالأمر.

---

[٤٨] انظر "مساحة الدائرة "، القضيّة ١؛ وانظر أيضاً المقدّمة ج.

مثال: ليكن A القطر الأصغر، وليكن G القطر الأعظم. ولنأخذ B الوسط المتناسب بين A وَ G؛ فتكون نسبة A إلى B مساوية لنسبة B إلى G. وعندما تكون ثلاثة خطوط متناسبة، تكون مساحات الدوائر الثلاث، التي تكون أقطارها مساوية لهذه الخطوط، متناسبة. فتكون نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B مساوية لنسبة مساحة الدائرة B إلى مساحة الدائرة G؛ وتكون نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة G مساوية لمربَّع نسبة مساحة الدائرة B إلى مساحة الدائرة G[٤٩].



الشكل ٢٦

ولكنَّ الدائرة A هي الدائرة المحاطة بالقطع الناقص؛ والدائرة G هي الدائرة المحيطة بالقطع الناقص؛ ولقد أثبتنا أنَّ نسبة مساحة الدائرة المحاطة بالقطع الناقص إلى مساحة الدائرة المحيطة بالقطع الناقص، مساوية لمربَّع نسبة مساحة الدائرة المحاطة إلى نفس مساحة القطع الناقص[٥٠]. فينتج من ذلك أنَّ مربَّع نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة الدائرة B مساوية لمربَّع نسبة مساحة الدائرة A إلى مساحة القطع الناقص. فتكون، بالتالي، مساحة القطع الناقص مساوية بالفعل لمساحة الدائرة B. وهذا ما أردنا أن نُبيِّن.

<**القضيّة ١٨**> تتساوى مساحة كلِّ قطع ناقص مع خمسة أسباع ونصف السبع من مساحة المستطيل المحيط به.

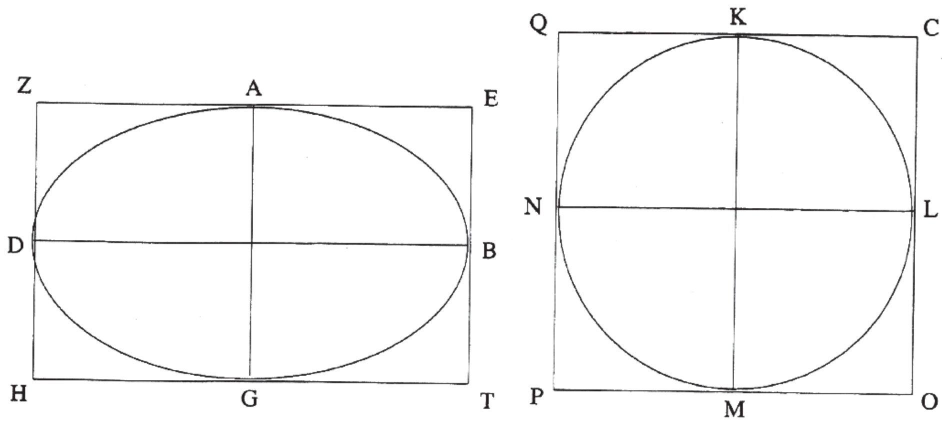
مثال: ليكن $ABGD$ القطع الناقص، وليكن BD القطر الأعظم و AG القطر الأصغر؛ وليكن $EZHT$ المستطيل المحيط به.

[٤٩] يرمز كلُّ حرفٍ من الحروف A ، B وَ G في آن واحدٍ، إلى قطعة خطٍّ مستقيم وإلى الدائرة التي لها القطر المساوي لهذه القطعة. والشكل يُمثِّل الدوائر الثلاث.

[٥٠] انظر القضيّة ١٥، اللازمة ١.

أقول إنَّ مساحة القطع الناقص *ABGD* مساوية لخمسة أسباع ونصف السبع من مساحة المستطيل *EZHT*.

البرهان: لنأخذ الخطّ الذي يكون الوسط المتناسب بين الخطّين *AG* و *BD*، وليكن *LN* هذا الخطّ. لنرسم على هذا الخطّ الدائرة *KLMN* والمربَّع *COPQ* المحيط بها.



الشكل ٢٨

ينتج من مقدماتنا أنَّ مساحة الدائرة *KLMN* مساوية لخمسة أسباع ونصف السبع من مساحة المربَّع *COPQ*. فتكون مساحة القطع الناقص مساوية لخمسة أسباع ونصف السبع من مساحة المربَّع *EZHT*.

ولنبرهن ذلك بطريقة أخرى. تكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه، مساوية، في الواقع، لنسبة مساحة أيّة دائرة إلى مربَّع قطرها؛ فتكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مساحة أيّة دائرة مساوية لنسبة مضروب قطري القطع الناقص إلى مربَّع قطر هذه الدائرة. فنستخرج البرهان، عندئذ، من هذه الصيغة التي أوردناها.

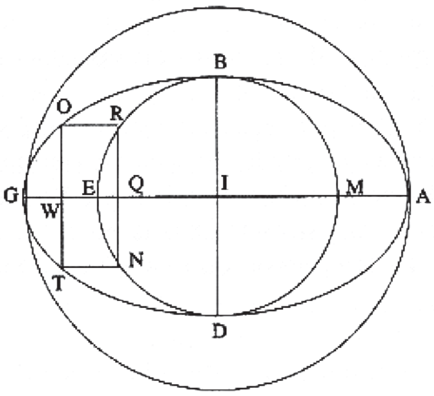
وتكون نسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه، مساوية لنسبة مساحة أيّ قطع ناقص إلى مضروب قطريه. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.

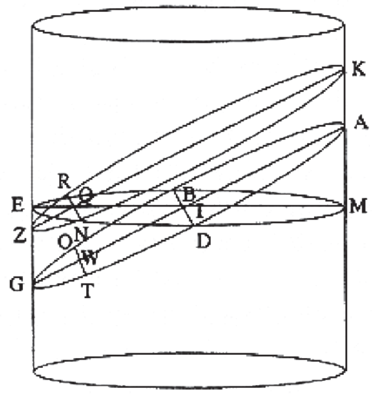
ولقد صاغ مقدّمة حول القطوع الناقصة.

<**القضيّة ١٩**> ليكن معلوماً أيُّ قطع ناقص مع دائرته المحاطة ووترين متساويين في <هذين الشكلين> عموديّين على القطر الأعظم؛ فتكون نسبة القطعة، المفصولة بأحد الوترين على القطر المقطوع به، إلى ما يبقى من هذا القطر، كنسبة القطعة، المفصولة بالوتر <الآخر> على القطر الآخر المقطوع به، إلى ما يبقى من هذا القطر.

مثال: ليكن *ABGD*[٥١] القطع الناقص، *MDEB* الدائرة المحاطة به، *AMIEG* القطر الأعظم، *ME* قطر الدائرة المحاطة، و *I* مركزها. لنأخذ وتراً، *NR*، في الدائرة، ولنأخذ <وتراً>، *TO*، في القطع الناقص، بحيث يكون الوتران متساويين وعموديّين على القطر <الأعظم>. يقطع *NR* القطر على النقطة *Q*، كما يقطع *TO* القطر على النقطة *W*.

أقول إنَّ نسبة *WG* إلى *WA* كنسبة *EQ* إلى *QM*.





الشكل ٢٩

البرهان: < لتكن معنا أسطوانة تكون قاعدتها دائرة مساوية للدائرة المحاطة، ولنفرض أنَّ القطعَ الناقص *ABGD* قطعٌ مستوٍ لهذه الأسطوانة، وفقاً لما سبق. لنجعل الدائرة المحاطة تدور حول القطر *BD* لتوصله إلى مستوٍ موازٍ للقاعدة>. نخرِج من النقطة *Q*، في المستوي الذي يمرُّ بالقطر *AG* ويقسم الأسطوانة إلى نصفين، خطّاً موازياً للقطر *AG*، وهو الخطّ *KZ*. والمستويُ الذي يمرُّ بالقطر *AG* ويقسم الأسطوانة إلى نصفين، <ممتدٌ إذاً> بين خطّين متوازيين؛ ويحدِّد هذان الخطّان على سطح الأسطوانة خطّين <آخرين> متوازيين؛ فيكون،

[٥١] لا يوجَد في المخطوطة سوى شكل وحيد غامض جدّاً، موضَّحٍ هنا بواسطة شكلين أحدهما ثلاثيّ الأبعاد.

بالتالي، الخطُّ KZ مساوياً للخطّ AG، لأنَّ كلَّ خطّين متقابلين في كلّ متوازٍ للأضلاع متساويان.

لنمدِّد، على استقامة، المستوي الذي يتقاطع فيه الخطّان KZ وَ QR إلى مستوٍ يقطع الأسطوانة /٥٢ظ/ وفقاً للقطع الناقص $KNZR$. لقد أثبِت أنَّ القطعَ الناقص $KNZR$ مساوٍ للقطعَ الناقص $ABGD$ ومواز له. ويكون الوتر NR لأحد القطعين مساوياً لوتر القطع الآخر TO؛ فيكون السهم QZ مساوياً للسهم WG، فتكون بقيّة أحد القطرين مساوية لبقيّة القطر الآخر. ويقطع المستويُ المشار إليه أعلاه، الذي يقسم الأسطوانة إلى نصفين ويحتوي على القطرين المتوازيين، السطح الأسطوانيَّ وفقاً للخطّ KM من جهة والخطّ EZ من الجهة الأخرى.

تكون الزاوية $\widehat{KMQ}$ قائمة، وكذلك تكون الزاوية $\widehat{ZEQ}$. وذلك أنَّ السطح الأسطوانيّ قائمٌ على مستوي الدائرة، فيكون القطع المشتركُ KM قائماً على مستوي الدائرة. ولكنَّ كلَّ خطّ خارج من <M> في مستوي الدائرة يُشكّل زاوية قائمة مع KM، فلذلك تكون الزاوية $\widehat{KMQ}$ قائمة. وتكون الزاوية $\widehat{ZEQ}$، هي أيضاً، قائمة لنفس السبب.

تتساوى الزاويتان ذواتا <الرأس> Q في المثلّثين. يكون المثلّثان متشابهين، نتيجة لذلك؛ فتكون أضلاعهما متناسبة. فتكون نسبة ZQ، ضلع الزاوية القائمة في أحد المثلّثين، إلى KQ في المثلّث الآخر، مساوية لنسبة EQ في المثلّث الأوَّل، إلى QM في المثلّث الآخر. ولكنَّ KQ مساوية لـِ AW، وَ QZ مساوية لـِ WG، فتكون نسبة WG إلى AW كنسبة EQ إلى QM. وهذا ما أردنا أن نبَيِّن.

<**القضيّة ٢٠**> إذا كان الوتر، موجوداً بنفس الطريقة بالاتجاه الآخر، <أي عموديّاً> على القطر <الأصغر>، تكون نسبة القطعة، المفصولة بوتر القطع الناقص على القطر الذي يقطعه، إلى ما يبقى من هذا القطر، كنسبة القطعة، المفصولة بوتر الدائرة المحيطة، المساوي للوتر الأوّل، على القطر الذي يقطعه، إلى ما يبقى من هذا القطر. نقوم بالبرهان بنفس

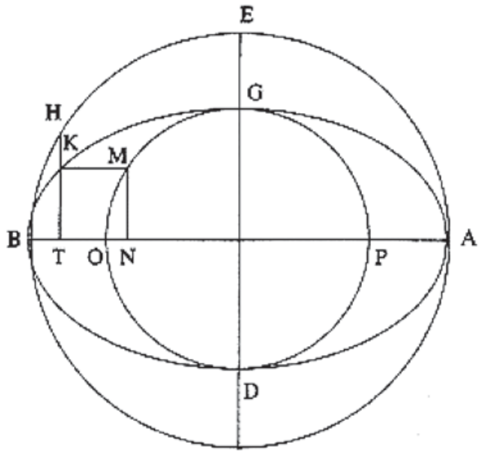
الطريقة. ليس هناك اختلاف بين الحالتين؛ وذلك أنَّ القطع الناقص يكون قاعدة لأسطوانة بحيث تكون الدائرة المحيطة به قطعاً للأسطوانة. ويتمَّ البرهان <بنفس الطريقة>[٥٢].

<ب>[٥٣]{لا شكَّ أنَّ معرفة مثل هذه الأقواس <للقطع الناقص> تتعلّق بمعرفة السهم والوتر وأحد قطري القطع الناقص الذي أخذنا منه قطعة. وذلك أنّه من الممكن أن يكون السهمُ والوترُ مشترَكين بين <هذا القطع الناقص> وبين قطع ناقص آخر.}<ب>

<جـ > {سنقدِّم حلّاً للمسألة التالية، استناداً إلى ما بُرهِن سابقاً.

ليكن $AGBD$ قطعاً ناقصاً؛ وليكن AB قطره الأعظم، ولتكن AEB الدائرة المحيطة بالقطع الناقص. نـُخرِج من نقطة T على القطر الأعظم عموداً، TH ،عليه يقطع القطع الناقص على النقطة K.

أقول إنَّ نسبة TH إلى TK كنسبة AB إلى PO.



الشكل ٣٠

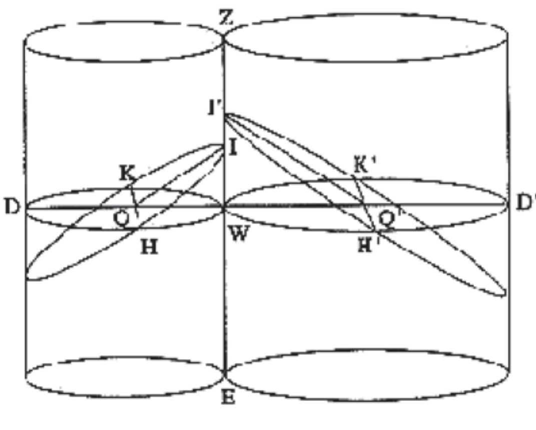
البرهان: لنرسم الدائرة $GDOP$ المحاطة بالقطع الناقص. نـُخرِج من النقطة K خطّاً موازياً للخطّ AB، هو الخطّ KM؛ ونـُخرِج من M العمود MN <على AB>، المساوي لـِ KT. وتكون نسبة BT إلى TA مساوية، بفضل ما أثبتناه سابقاً، كنسبة ON إلى NP. وتكون نسبة HT إلى

[٥٢] انظر الشرح الريّاضيّ ٦-٢-٧ الخاصّ بالقضيّة ٢٠.

[٥٣] يضعنا النصُّ، بدءاً من هنا وحتّى صيغة القضيّة ٢١(الورقة ٥٢ظ،٩-٢٢) بالشكل الذي وصل إلينا، أمام مشكلة؛ فهو يَظهر لنا كـَمُلـْصَقٍ قليل التماسك. لكنّنا نـَتـَبـَيَّن فيه ثلاث قضايا نرمز إليها بـِ <ا>، <ب> وَ <جـ >، دون أن نغيِّر ترتيب النصّ: <ا> هي برهان آخر للقضيّة ٢٠ تمَّت الإشارة إليه فقط؛ وتـُثبِت <ب> أنّه يوجَد عددٌ لا نهاية له من القطوع الناقصة المختلفة التي لها وتر وسهم معلومان؛ وتقدِّم <جـ > برهاناً آخر للقضيّة ٨.

MN كنسبة *AB* إلى *PO*، بفضل ما أثبتناه بخصوص هاتين الدائرتين، ولأنَّ نسبة *BT* إلى *TA* كنسبة *ON* إلى *NP*. ولكنَّ *MN* مساوية لِـ *KT*، فينتج من ذلك أنَّ نسبة *HT* إلى *TK* كنسبة *AB* إلى *PO*. وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن.[54] }<جـ >

<ب> {وينتج مما قلنا ما يلي. لتكن معنا أسطوانة أخرى أعظم من الأسطوانة السابقة، ولتكن مماسَّة لها، وفقاً للخطّ *EZ*، ولتكن دائرتها أعظم من <الدائرة> *DW* ومماسّة <لها> في النقطة *W*، حيث تكون <الدائرتان> في <نفس> المستوي[55]. يُمكن أن نرسم في الدائرة العظمى وتراً مساوياً للوتر *HK*، ويُمكن أن نـُخرِج، من وسط هذا الوتر حتّى الخطّ *EZ* – القطع المشترَك للسطحين – خطّاً مساوياً للخطّ *QI*. فيُمكن، بعبارة أخرى أن نـُحدِّد مستوياً يحتوي على هذين الخطّين القاطعين، بحيث يكون القطع المائل <بهذا المستوي> للأسطوانة <العظمى> قطعاً ناقصاً مقابلاً للقطع *KIH*، وبحيث يكون وتره وسهمه مساويين على التوالي لِـ *KH* وَ *KJ*. ويكون هذا بعدد غير محدود من الطرائق.}<ب>



الشكل ٣١

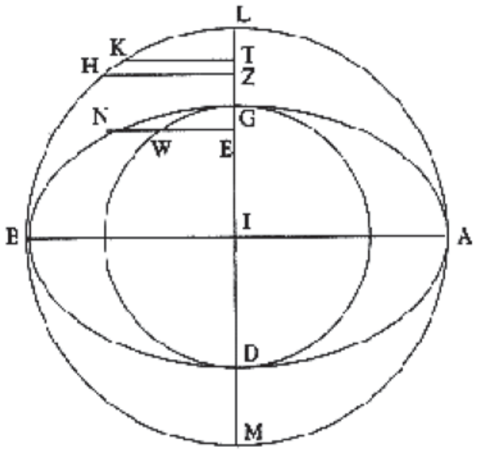
<أ> {<لنقم بذلك بطريقة أخرى>. ليكن *AGBD* قطعاً ناقصاً؛ ولتكن *ALB* الدائرة المحيطة به. وليكن *EN* وَ *ZH* عمودين متساويين على القطر الأصغر، أحدهما في الدائرة والآخر في القطع الناقص.

أقول إنَّ نسبة *LZ* إلى *ZM* كنسبة *GE* إلى *ED*.

---

[54] لقد أثبِتت هذه الخاصّة للقطع الناقص في القضيّة ٨.

[55] لا يوجد شكلٌ في المخطوطة، لذلك رسمنا الشكل ٣١.



الشكل ٣٢

البرهان: إذا لم يكن ذلك صحيحاً، تكون نسبة GE إلى ED كنسبة LT إلى TM. فنُخرِج الوتر TK <في الدائرة> عموديّاً على <LM>.

فتكون نسبة EW إلى TK، بفضل ما أثبتناه سابقاً، كنسبة GI إلى IL. فيكون، بالتالي، EN مساوياً لِـ TK[٥٦]. ولكنَّ EN مساوياً لِـ ZH؛ وهذا مستحيل، فتكون نسبة LZ إلى ZM، بالفعل، كنسبة GE إلى ED.} <أ>

<**القضيّة ٢١**> نريد أن نـُبيِّن، بعد أن أثبتنا هذه المقدِّمة، كيف يُمكن أن نـُحدِّد انطلاقاً من قوس لقطع ناقص، – على أن يكون الوتر والسهم وأحد الأقطار معلومة – القطرَ الثاني، بحيث نحدِّد القطع الناقص ومساحة قطعة القطع الناقص وكلّ العناصر الأخرى[٥٧].

وهكذا إذا قيل لك: لدينا <قطعة> من قطع ناقص، يساوي وترها *8*، ويساوي سهمها *3* ويساوي القطر المرفق بها *15*. كيف نجد حلَّ المسألة؟ يُمكن أن نستخدم عدّة طرق مرتكزة على المقدِّمة الواردة أعلاه، لأجل إيجاد القطر الثاني الذي يسمح بتحديد القطع الناقص.

[٥٦] يكون معنا، وفقاً للقضيّة ٦، $\frac{GI}{GL}=\frac{EW}{EN}$.

[٥٧] نتحقـّق أنَّ مساحة قطعة القطع الناقص لم تـُدرَس في بقيّة النصّ، بالرغم من الإعلان عن ذلك.

هذه هي إحدى هذه الطرائق. تأخذ نصف الوتر، أي *4*، وتضربه بنفسه، فتكون النتيجة *16* فتحتفظ بها؛ ثمَّ تقسم *15*، طول القطر، بكلّ قسم من أقسامه وأحدها – وهو السهم – طوله *3*. فتحصل، عندئذ، على مربَّع القطر الثاني (كنتيجة لضرب الأعداد الثلاثة *16*، $\frac{15}{3}$ وَ $\frac{15}{12}$).

وإذا أردت: تضرب أحد <قسميْ القطر بـِ *4*؛ ثمَّ تقسم القطر مرة بهذا المضروب ومرَّة بالقسم الباقي؛> ثمَّ تضرب نتيجتيْ القسمتين بمربَّع الوتر الكامل. فتحصل، عندئذ، على مربَّع القطر المطلوب، ثم تستخرج جذره.

مثال: نضرب أحد قسميْ القطر – السهم – بـِ *4* فنحصل على *12*؛ ثمَّ نقسم القطر مرة بهذا المضروب، فنحصل على واحد وربع، ونقسم القطر مرَّة بالقسم الباقي منه فنحصل أيضاً على واحد وربع. ثم نضرب نتيجتيْ القسمتين فنحصل على واحد ونصف ونصف الثمن، فنضرب هذا العدد بـِ أربع وستّين، مربَّع الوتر، فنحصل على مائة، مربّع القطر الثاني.

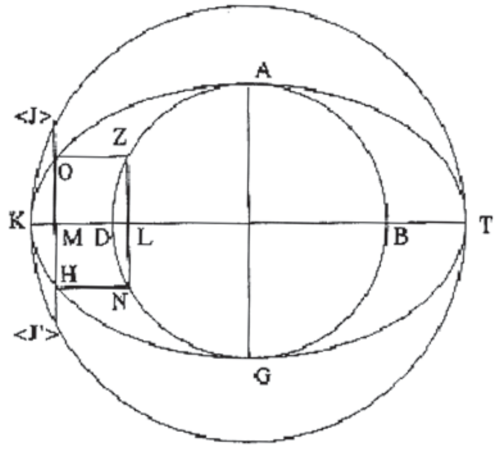
وإذا أردت: تضرب أحد قسميْ القطر بالقسم الآخر، ثم تضرب النتيجة بـِ *4* فتحصل على النتيجة *144* فتحتفظ بها كاملة؛ ثمَّ تضرب القطر بنفسه والوتر بنفسه ثم تضرب أحد هذين المربّعين بالآخر، فتحصل على أربعة عشر ألفاً وأربع مائة؛ فتقسم هذا بـِ بمضروب قسمي القطر؛ فتحصل على مائة، مربَّع القطر الذي تريد أن تعرفه.

أمّا تعليل هذه الطرائق، فسنعرضه في المثال التالي.

ليكن *KATG* قطعاً ناقصاً؛ ولتكن *ABG* الدائرة المماسّة <داخليّاً>؛ وليكن *KDBT* القطر الأعظم وَ *AG* القطر الأصغر المشترَك بين القطع الناقص والدائرة. <الخطّ> *OMH* هو وتر القطع الناقص<العموديّ> على القطر الأصغر؛ وطول هذا الوتر هو *8*. والسهم هو *KM* وطوله هو *3*. وَ *KT* هو القطر بكامله، وطوله هو *15*.

نريد أن نـُحدِّد طول القطر الثاني *AG*.

نـُخرِج من النقطة *O* الخطَّ *OZ* الموازي للقطر *KT* ونمدِّده حتّى محيط الدائرة. ونخرج من النقطة *Z* عموداً على نفس هذا القطر، هو *ZL*؛ ولنمدِّده حتّى النقطة *N* على محيط



الشكل ٣٣

الدائرة من الجهة الأخرى. فيكون ZN وتر القوس $\widehat{ZDN}$ ؛ ويكون OH مساوياً لـِ ZN، لأنَّ الخطّ OZ موازٍ للقطر ولأنَّ الخطّ ZN عموديٌّ على القطر وموازٍ لـِ OH. وتكون نسبة KM إلى MT، وفقاً للمقدّمة التي برهنّاها وبسبب المساواة بين الوترين، كنسبة DL إلى LB. ولكنَّ مضروب DL بـِ LB مساوٍ/٥٣و/ لمربَّع LZ؛ ومربَّع LZ معلومٌ لأنَّ LZ معلومٌ ويساوي 4، مثل OM، كما أشرنا إلى ذلك.

فيكون الخطُّ المجهول DB مقسوماً، ضمن هذه الشروط، إلى قسمين بحيث يكون مضروب أحدهما بالآخر معلوماً <كما تكون قسمة أحدهما على الآخر معلومة>.

ونحصل على النتيجة بعدَّة طرائق. ولقد أشَرتُ إلى إحدى هذه الطرائق التي تؤدّي إلى تحديد مربَّع العدد GA الذي يكون معلوماً على التقريب.

لنبرهن مقدِّمة صالحة لهذه الطرائق التي وضَّحناها.

<**القضيّة ٤**> نفصل عدداً معيّناً إلى قسمين مختلفين؛ ونقسمه بكلّ واحدٍ منهما؛ ونضرب نتيجتي هاتين القسمتين الواحدة بالأخرى، ونحتفظ بهذا المضروب. ثمَّ نضرب كلَّ قسم بالآخر. فيكون مضروب النتيجة <الأخيرة> بالمضروب الذي احتفظنا به مساوياً لمربَّع العدد.

مثال: نفصل العدد A إلى عددين B وَ G. نقسم A على B، فنحصل على D؛ ثمَّ نقسم A على G، فنحصل على E. نضرب D بـِ E، فنحصل على H. ونضرب B بـِ G، فنحصل على Z.

أقول إنّ T، مضروب Z بـِ H هي مربَّع العدد <A>.

البرهان: نضرب D بـِ A، فنحصل على K. والعدد D هو نتيجة قسمة A بـِ B. ولقد ضُربت D بـِ A، فحصلنا على K، فتكون K مساوية لمربَّع A المقسوم على B. ولكنَّ مربَّع A هو T. وهكذا قسمنا T على B، فحصلنا على K.

وقسمنا بنفس الطريقة A بـِ G، فحصلنا على E؛ وضربنا D بـِ E، فحصلنا على H المساوي لمضروب A بـِ D المقسوم على G؛ <ومضروب> A بـِ D هو K؛ وهذا يعني بعبارة أخرى أنَّ هذا المضروب مساوٍ لقسمة K علىِ G، أي لـِ H.

ولقد قُسم T على B، فحصلنا على K. ولكنَّ نتيجة قسمة T على B المقسومة على G تساوي نتيجة قسمة T على مضروب B بـِ G؛ ومضروب B بـِ G هو Z؛ فتكون نتيجة قسمة T على Z مساوية لـِ H. فيكون، بالتالي، مضروب H بـِ Z مساوياً لـِ T. وهذا ما أردنا أن نـبيِّن.

وليكن العددُ A، بعد هذا البرهان، قطرَ الدائرة، في القضيّة السابقة. لقد قسمناه إلى قسمين DL وَ LB، في النقطة L. فتكون نتيجة قسمة DB على كلّ قسم من القسمين DL وَ LB معلومة، فهي مساوية لنسبة KT إلى كلّ خطٍّ من الخطّين KM وَ MT، أي إلى نتيجة قسمة KT على كلّ قسمٍ من قسميه[٥٨]، أي إلى 5 وإلى واحد وربع. ويكون، من جهة أخرى، مضروب كلٌّ قسم من <القسمين> بالآخر، معلوماً ومساوياً لـِ 16. فيكون، بالتالي، مضروب 5 بواحد وربع – أي 6 وربع – مضروباً بـِ 16 مساوياً لمربَّع DB، كما برهنّا ذلك. وهذا ما أردنا أن نـبيِّن.

---

[٥٨] نستخرج من $\frac{KM}{MT}=\frac{DL}{LB}$ بالتركيب، $\frac{KM+MT}{MT}=\frac{DL+LB}{LB}$، كما نحصل، إذا قلبنا على $\frac{MT}{KM}=\frac{LB}{DL}$. ثمّ نحصل بالتركيب على: $\frac{KM+MT}{KM}=\frac{DL+LB}{DL}$. وهذا ما يعطي النتيجة المطلوبة.

هذا كلُّ ما وجدته بالعربيّة، أنا قلونيموس، فترجمته كلّه. ولقد أنهيت الترجمة في *25* طيبيت *72*، وفقاً للحساب الصغير<الموافق ليوم ٩ كانون الثاني سنة ١٣١٢ للميلاد>. الحمد للـه تعالى.

أنا يوسف بن يوِل بيباس، أنهيت <النسخة>، هنا في القسطنطينية، فجر يوم الجمعة في *24* طيبيت سنة *5267* من خلق الكون<الموافق ليوم الجمعة ٩ كانون الأوَّل ١٥٠٦ للميلاد >.

فليُعظَّم اسم اللـه المقدَّس وليتبارك. آمين.

الفصل السابع

ابن هود: مساحة القطع المكافئ ومسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

٧ـ١ مقدِّمة

٧ـ١ـ١ "كتاب الاستكمال"، ملخَّص ريّاضيٌّ

خلَف عامر يوسف بن هود، الملقّب بالمؤتـَمَن[١]، والدَه مَلك سرقوسَّة بعد وفاة والده سنة ١٠٨١/٤٧٤. وكانت مدَّة مُلك المؤتـَمَن قصيرة، إذ إنـَّه توفـّيَ بعد ذلك بأربع سنوات، سنة ١٠٨٥/٤٧٨[٢]. ويُنسَب إلى هذا الملك الكتابُ الضخم "الاستكمال"[٣] الذي حرَّره، كما يبدو، عندما كان وليّاً للعهد. يُشكِّل هذا الكتاب، بسبب تعدُّد المواضيع التي يدرسها، وبسبب حجمه، موسوعة حقيقيّة للتدرُّب على الرياضيّات؛ ولم يكن، إذاً، بإمكان مَلك أو حتّى مُلـَيْك أن يؤلّف مثل هذا الكتاب خلال أوقات الاستراحة التي تسمح بها أعباؤه. فيكون من الأنسَب أن نتكلّم على وليّ عهد ريّاضيّ بدلاً من الكلام على مَلك ريّاضيّ، ولو أنَّ الصورة الأخيرة أكثر إثارة.

---

[١] لم يكن "المؤتـَمَن" لقباً فحسب، بل كان اسم الخليفة مثل "المأمون" وَ "المقتدِر"، وما إليه. ولقد انتشرت هذه العادة بين ملوك الأندلس بعد زوال الدولة الأموية. انظر حول هذا الموضوع، عبد الواحد المراكشي : "المُعْجِب في تلخيص أخبار المغرب"، نشر م. س. العريان وَ م. العربي، الطبعة السابعة (الدار البيضاء ١٩٧٨)، ص. ١٠٥. يورِد هذا المؤلّف أبيات الشاعر ابن رشيق الذي يسخـَر من هذه العادة:

مما يُزهِّدني في أرض أندلس　　　سماع مُقتـَدِرٍ فيها ومُعتـَضِدِ

ألقابُ مملكة في غير موضعها　　　كالهِرِّ يحكي انتفاخاً صوْلة الأسدِ

[٢] انظر ابن الأبّار، الحُلّة السِّيَراء، نشر حسين مونِس(القاهرة، دون تاريخ)، المجلّد الثاني، ص. ٢٤٨.

ولقد ترجم ه. سوتر(*H. Suter*) بعض أجزاء قصيرة من مراسلة مهمّة جرت بين أندلسيّ وبين شخصٍ من طنجة – أوردها المَقّري – حيث يمدح كلٌّ منهما بلده. ويظهر من هذه المراسلة أنَّ ابن هود كان يتمتّع بسُمعة جيِّدة. وقد لفت ه. سوتـَر النظر، أيضاً، إلى أعمال شتاينشنايدر (*Steinschneider*) الخاصّة بيوسف بن أكنين الذي سنرى أهمّيّة شهادته أدناه. انظر:

Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (Leipzig, 1900)، ص. ١٠٨.

- انظر ابن الخطيب، كتاب "أعمال الأعلام"، وهو نصّ نشره بالعربية، مع مقدّمة وفهرس بالمحتويات، أ. ليفي بروفنسال (*E. Lévi-Provençal*)، (بيروت، ١٩٥٦)، ص. ١٧٢.
- انظر: المقّري، "نفح الطيب من غصن الأندلس الرطيب"، نشر إحسان عباس، ثمانية مجلّدات، المجلّد الأوَّل، ص. ٤٤١.
- انظر: صاعد الأندلسي ، طبقات الأمم، نشر هـ. بوعلوان (بيروت، ١٩٨٥)، ص. ١٨١.

ولنلاحظ أنَّ صاعد الأندلسي يضع ابن هود ، مثلما يضع أيضاً الرياضيّ الثاني الذي يهمُّنا هنا وهو عبد الرحمان بن سيِّد، بين معاصريه؛ وهذا ما هو مؤكّد جيِّداً بالتواريخ والمصادر. ولكنَّ صاعد الأندلسي يلاحظ أنَّ ابن السيِّد يُعدُّ بين الريّاضيّين الأكثر شهرة وأنّ ابن هود كان يهتمُّ أيضاً بالمنطق والفيزياء وما بعد الطبيعة. وهو يكتب، على الصفحة ١٨١، ما يلي: " وأمّا أبو عامر بن الأمير بن هود فهو، مع مشاركته لهؤلاء في العلم الريّاضي، منفرد دونهم بعلم المنطق والعناية بالعلم الطبيعي والإلهي". لم ينتبه أحدٌ لملاحظة صاعد هذه، وهو كاتب السِّيَر المعاصر له، مع أنّها ذات أهمّيّة خاصّة لفهم مشروع ابن هود.

[٣] انظر، إلى جانب مصادر أخرى، الأكفاني، إرشاد القاصد إلى أسنى المقاصد، ص. ٥٤ للنصّ العربي، ضمن ج. ويتكام (*J. Witkam*)، *De egyptische Arts ibn al- Akfānī (Leiden, 1989)* ، الذي يذكُر "استكمال المؤتـَمَن ابن هود".

ولقد تمَّ مؤخـَّراً، لحسن الحظّ، العثور على عدَّة أجزاء كانت مفقودة من هذا الكتاب الذي لا يوجَد لدينا بكامله حتـّى الآن، مع أنـَّه كان معروفاً ومنتشراً في الماضي. تتضمَّن الأجزاءُ الهندسيّة التي عُثِرَ عليها[٤]، بالتحديد، دراسة حول مساحة القطع المكافئ ودراسة حول مسألة أخرى في الإحاطات المتساوية. سنقوم، هنا، بتحقيق هاتين الدراستين. إنَّ نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود مؤكّدة. ولكنَّ الحذر الشديد يفرض نفسه، نظراً إلى غياب البرهان المباشر لنسبة هذا الكتاب إليه؛ وذلك أنـَّه لا توجَد أية مخطوطة لكتاب "الاستكمال"، أو لجزء منه، حاملة لاسم ابن هود[٥]. ولقد عثرنا، مقابل ذلك، على استشهاد مباشر بهذا الكتاب، نسبه مؤلّفه إلى أحد أسلاف ابن هود، الريّاضيّ المشهور عبد الرحمان بن سيِّد[٦]. تـُعزى هذه الشهادة المهمّة إلى مؤلّف مجهول، شارحٍ لكتاب "الأصول" لأقليدس، وماهرٍ في دراسة التقاليد التي كان يشرحها. فهو يورد القضيّة الخامسة من المقالة الأولى على الشكل التالي: تكون الزاويتان، على قاعدة كلّ مثلّث متساوي الساقين، متساويتين؛ فإذا مدَّدنا على استقامة هذين الساقين تحت القاعدة نحصل على زاويتين متساويتين تحت القاعدة[٧]؛ ثمَّ يكتب: "وبرهن النيريزي على هذا الشكل برهاناً[برهان، في المخطوطة] آخر لم يحتـَج فيه إلى ذلك، وتابعه على ذلك ابن سيِّد في كتابه المعروف بالاستكمال"[٨]. ولكنَّ شرحَ المقالة الأولى وبداية المقالة الثانية من

---

[٤] انظر: ج. ب. هوجنديجك:
J. P. Hogendijk: The geometrical of the Istikmāl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hūd(11th century). An analytical table of contents, Archivesinternationales d'histoire des sciences, vol. 41, n° 127(1991)
ص. ٢٠٧-٢٨١. يتناول المؤلّف ثانية، على الأخصّ، مقالاً آخر كان قد نشره سنة ١٩٨٦ في المجلّة *Historia Mathematica* تحت عنوان:
*Discovery of an 11th-centu*ry geometrical compilation : The Istikmāl of Yusuf *al-Mu'taman ibn Hūd , King of Saragossa*
ص. ٤٣-٥٢.

[٥] يوجد لدينا، حاليّاً، المقاطع التالية من كتاب الاستكمال: ١) الأجزاء الهندسية التي هي الأهمّ، إلى حدٍ بعيد، ضمن المخطوطة Or. 82 في المكتبة الملكية في كوبنهاغن وضمن المخطوطة Or. 123-a في لايد (Leyde). ٢) المقطع الحسابي، ضمن مخطوطة دار الكتب في القاهرة، رياضة ٤٠. توجد نسخة وحيدة من هذه المخطوطة – كما أثبتنا ذلك – في دمشق، الظاهرية ٥٦٤٨.٣. ٣) وأخيراً، المقطع القصير الذي ذكره أحد الشرّاح في مخطوطة المكتبة العثمانية في حيدرأباد، والذي عثرنا عليه، انظر لاحقاً. ولا يشير أيُّ مقطع من هذه المقاطع، باستثناء المقطع الأخير الذي ذُكِرَ فيه كتاب "الاستكمال"، إلى العنوان أو إلى المؤلّف.

[٦] عبد الرحمان بن سيِّد معاصر لصاعد الأندلسيّ[انظر الحاشية ٢]. وُلِد هذا الأخير سنة ١٠٢٩/٤٢٠. ونعلم، من جهة أخرى، من الفيلسوف ابن باجَّة أنّه تلميذ لابن السيِّد[انظر رسالة ابن باجَّة إلى الوزير أبي الحسن بن الإمام، ضمن "رسائل فلسفيّة لأبي بكر بن باجَّة، نشرة جمال الدين العلوي(بيروت، ١٩٨٣)، ص. ٨٨]. ولكنَّ ابن باجَّة قد توفـِّي حوالى سنة ١١٣٩. يمكن أن نفترض أنَّ ابن السيِّد كان أكبر سنّاً من ابن باجَّة بجيل واحد، وأنّه كان ناشطاً خلال العقود الأخيرة من القرن الحادي عشر. ويقول ابن الأبّار، من جهة أخرى، في "كتاب التكملة لكتاب الصلة" [انظر، المجلّد الثاني، ص. ٥٥٠] إنَّ عبد الرحمن بن عبد الله بن السيِّد الكلبي من بلنسيا كان عالماً مبرِّزاً في نظرية الأعداد وفي الحساب؛ وأنَّ أحداً من معاصريه لم يصل إلى مستواه في الهندسة؛ ولم يُشر إليه سوى صاعِد من طليطية. ثمَّ يُذكّر بعد ذلك أنَّ ابن السَّيِّد قد ألّف في "الفرائض" وأنّه كان طالباً سنة ١٠٦٤/٤٥٦[انظر: Complementum Libri Assilah, Ed. F. Codera et Zaydin, 2 vol.(Madrid, 1887-89، المجلّد الثاني، ص. ٥٥٠] - وهذا يؤكّد التواريخ المذكورة. يتعلّق الأمر إذاً بمعاصر لابن هود.

[٧] يورد ت. هيث (*Th. Heath*) الشروح التي أثارتها هذه القضيّة – أرسطو، بابوس، بروقلوس – انظر:
The Thirteen Books of Euclid's Elements, 3 vol.(Cambridge 1926; Dover, 1956)
المجلد الأوَّل، ص. ٢٥١-٢٥٥.

[٨] انظر: مخطوطة حيدرأباد، عثمانيّة ٩٩٢، الورقة ٤٦و. وانظر أيضاً : رشدي راشد:
=«Ibn al-Haytham et les nombres parfaits», Historia Mathematica, 16(1989),

كتاب "الأصول"، الذي هو على غاية من الأهمّيّة، والموجود ضمن "الاستكمال"، لم يُعثر عليه حتّى الآن؛ وهذا ما يحرمنا من التحقّق من الأمر بشكل مباشر. ويبقى أنَّ الكاتب المجهول يستشهد بكتاب "الاستكمال" عشر مرات ويورِد منه على الأخصّ مقطعاً طويلاً مكرَّساً للأعداد المتحابَّة، كنّا قد لفتنا الانتباه إليه[٩]. ولا تترك لدينا مقابلةُ هذا المقطع مع نصّ "الاستكمال"، أيَّ شكٍّ، فالأمر يتعلّق بنفس النصّ الذي وصل إلينا[١٠]. أمّا الإشارات الأخرى إلى "الاستكمال" التي قام بها المؤلّف المجهول، فهي تـرُجِع إلى الأجزاء المفقودة من الكتاب أو تورد المعنى فقط[١١].

يكون لدينا إذاً نسبة، ما زالت وحيدة حتّى الآن، لكتاب "الاستكمال" إلى ابن سيِّد؛ ولا يُمكننا أن نهملها أو نرفضها؛ غير أنَّ عدّة مصادر مستقلّة تتّفق على أنَّ ابن هود هو الذي ألّف "الاستكمال". أقدم هذه المصادر التي نعرفها هو كتاب القفطي[١٢] الذي يؤكّد نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود، كما يُشير إلى ابن ميمون الذي هذّب هذا الكتاب. ولا يُشير ابن أكنين من برشلونة[١٣]، تلميذ ابن ميمون، في كتابه "طبُّ النفوس"، إلى نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود فحسب، بل إنـّه يعطي نوعاً من الفهرس المبسَّط لمحتوياته[١٤]. فهو، بعد أن يكتب "هذا هو كتاب "الاستكمال" للمؤتـمَن بن هود، مَلك سرقوسّة"، يُعدِّدُ الفصول الخمسة التي

= ص. ٣٤٣-٣٥٢، وخاصّة ص. ٣٥١.

٩ انظر الحاشية السابقة.

١٠ يتعلّق الأمر بمقطع حول الأعداد المتحابَّة، يُعزَى إلى ثابت بن قرّة، موجود ضمن "الاستكمال". يوجد هذا المقطع ضمن مخطوطة دار الكتب، رياضة ٤٠ في القاهرة، على الأوراق ٣٦و-٣٧ظ؛ ولقد ذُكِر في مخطوطة حيدرأباد، عثمانية ٩٩٢، الأوراق ٢٩٥و-٢٩٧ظ؛ وهي تبدأ بـِ " وقال صاحب الاستكمال...؛ وسنتناول ثانية هذه المسألة في موضع آخر.

١١ انظر مثلاً الأوراق ٣٤ظ،٣٦و، ٣٨و، ٤٦، ٤٧، ٥٠و، ٦٨و، ١٥١و، ٢٩٥و.

١٢ انظر: القفطي، تاريخ الحكماء، نشر يوليوس ليبَّرت (*Julius Lippert*)، (ليبزغ، ١٩٠٣)، ص. ٣١٩، حيث يقول بخصوص ابن ميمون: "هذب كتاب الاستكمال لابن أفلح الأندلسيّ في الهيئة فأحسن فيه وقد كان في الأصل تخليط وهذب كتاب الاستكمال لابن هود في علم الريّاضة وهو كتاب جامع جميل يحتاج إلى تحقيق فحقّقه وأصلحه وقرئ عليه."

١٣ إنَّ شهادة ابن أكنين، حول ابن هود وكتاب "الاستكمال"، ذات أهمّيّة قصوى؛ ولقد لفتت نظر المؤرِّخين منذ أكثر من قرن. لنذكّر أوّلاً بالكتابات الأساسيّة حول هذا الموضوع:

M. Steinschneider, Die hebraeischen Übersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher
صدر في برلين ١٨٩٣(*Berlin, 1893*)، وصدرت طبعة ثانية سنة ١٩٥٦ (*Graz, 1956*)، ص. ٣٣-٣٥ ؛

M. Steinschneider, Diarabische Literatur der Juden
صدر في فرانكفورت ١٩٠٢(*Frankfurt, 1902*)، وصدرت طبعة ثانية سنة ١٩٨٦ (*Hildscheim/Zürich/New York, 1986*)، ص. ٢٢٨- ٢٣٣.

١٤ تكمن أهمِّيّة شهادة ابن أكنين في أنّه يقدِّم فهرساً مبسَّطاً بمحتويات كتاب "الاستكمال"، في كتابه المكتوب بالعربية – ولكن بأحرف عبريّة – "طبّ النفوس"، الذي حقّق وترجمَ إلى الألمانية في القرن التاسع عشر من قِبَل م. غودمان:

M. Güdemann, Das Jüdische Unterrichtsween während der spanisch-arabischen Periode(Vienne 1873),
انظر ص. ٢٨-٢٩ وَ ٨٧-٨٨. ولقد لفت ت. لانغرمان(*T. Langermann*) النظر مجدَّداً إلى هذا النصّ مترجماً إيّاه إلى الإنكليزيّة ؛ انظر:

« The mathematical writings of Maïmonides », The Jewish Quarterly Review, LXXV, n° 1(July, 1984),
انظر ص. ٥٧-٦٥، وخاصّة ص. ٦١-٦٣. ولقد قدَّم ج. هوجنديجك (*J. Hogendijk*) سنة ١٩٨٦ بدوره ترجمة إنكليزيّة لنفس النصّ ضمن *Archives internationales*(ورد هذا المرجع في الحاشية ٤)، ص. ٢١٠.

يتألّف منها الكتاب[١٥]. ويخصُّ المصدرُ الثالث ريّاضيَّاً من القرن الرابع عشر، هو محمَّد سرتاق المراغي[١٦] الذي كتب تحت عنوان "الإكمال" شرحاً لكتاب "الاستكمال". وهذا الشرح ما زال مفقوداً؛ لكنَّ المؤلِّف ذكره في تعليقات على المخطوطة ٤٨٣٠ من مجموعة أيا صوفيا. ينسب المراغي، هو أيضاً، كتاب "الاستكمال" إلى ابن هود. ويُمكن أيضاً أن نُضيف إلى كلّ هذا إشارات غير مباشرة حيث تُنسَب إلى ابن هود نتيجة من النتائج التي نجدها في "الاستكمال"؛ وهذا ما نجده في كتاب ابن هَيدور[١٧]، على سبيل المثال. تتضافر هذه الشهادات كلّها لترسِّخ تحقّقنا، بما يُشبه اليقين، من نسبة هذا الكتاب إلى ابن هود. إنَّ لدينا حجَّة أخرى لدعم هذه النسبة؛ وهي ترُجعنا إلى المحتوى الريّاضيّ للكتاب. لنذكّر بأنَّ ابن سيِّد، كما تدلُّ الشهادات الغير مباشرة حول أعماله المفقودة للأسف، كان في طليعة الباحثين الريّاضيِّين في عصره. ولقد بيَّنـّا[١٨] أنـَّه قد توصَّل إلى دراسة بعض المسائل التي تتطلّب الاستعانة بالقطوع المتكافئة المُعمَّمة وبالمنحنيات ذات الأبعاد الثلاثة. لم يكن هذا المستوى، بالتأكيد، مستوى كتاب "الاستكمال" الذي كان الهدف من كتابته مختلفاً، كما سنرى. لا تشكو نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود، كما يبدو، من أيّة شائبة؛ ولكن يبقى لدينا، سؤالٌ أساسيٌّ حول دور ابن سيِّد. فهل يتعلّق الأمر بخطأ بسيط؟ أم بمؤلَّف آخر يحمل نفس العنوان، كتبه ابن سيِّد ثمَّ تناوله ابن هود في تجميع مُوسَّع؟ أم بخلط قديم فقط، بين مؤلّفيْن معاصريْن؟ إنَّ الأجوبة عن هذه الأسئلة تتعلّق بنتائج البحوث المستقبليّة. ولكنـّنا، حاليّاً، نميل بشدَّة نحو نسبة "الاستكمال" إلى ابن هود.

ولنذكّر، لأجل فهم مشروع "الاستكمال" من دون أن ننقص أو نزيد من أهمِّيّته، برأي القفطي، كاتب السِّيَر في القرن الثالث عشر، وبواقعة تاريخية مؤكّدة. يقول القفطي عن هذا

[١٥] انظر: *M. Güdemann, Das Jüdische Unterrichtsween während der spanisch-arabischen Periode(Vienne 1873)*، ص. ٢١٠.

[١٦] انظر الفصل الخاصّ بالقوهي ، ص. ٨٤١، الحاشية ١٩؛ وانظر أيضاً:
J. P. Hogendijk: The geometrical of the Istikmāl of Yusuf al-Mu'taman ibn Hūd ، ص. ٢١٩

[١٧] انظر: ابن هَيدور(المتوفـّى سنه ٨١٦)، التمحيص في شرح التلخيص، مخطوطة الرباط، الحسنيّة ٢٥٢، ورقة ٧٢؛ ولقد حقّق رشدي راشد هذا الكتاب وحلّله في المقال:
Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire, Journal for the History of Arabic Science, 6, n°1&2(1982),
ص. ٢١٣ وما يليها.

[١٨] انظر: شرف الدين الطوسي، الأعمال الرياضيّة، الجبر والهندسة في القرن الثاني عشر(بيروت: مركز دراسات الوحدة العربية، ١٩٩٨).

الكتاب: "هو كتاب جامع جميل يحتاج إلى تحقيق"[١٩]. أمّا الواقعة التاريخيّة، فليست سوى الانتشار الواسع لكتاب "الاستكمال"، خاصّة في وسط الفلاسفة وفي وسط الريّاضيّين من الدرجة الثانية. هذا الرأي وهذه الواقعة مترابطان بينهما بشدَّة. فرأي القفطي – أو الرأي الذي نقله – يتوافق تماماً مع الوضع الحقيقيّ للأجزاء التي وصلت إلينا من هذا الكتاب ، كما يتوافق مع المشروع الذي يظهر من تفحُّصها. يقدِّم لنا "الاستكمال" ملخَّصاً للمهندس في الحساب وفي هندسة أقليدس (المقتبَسة مباشرة من كتاب "الأصول" ومن كتاب "المعلومات" ومن الشُّارحين مثل النيريزي) وفي نظريّة الأعداد المتحابَّة(المقتبَسة مباشرة من مؤلّف ثابت بن قرّة) وفي هندسة المخروطات (من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس) والكرويّات، وبطريقة مماثلة في الميادين الأخرى. لقد حصلت هذه الاقتباسات من الكتب المختلفة، في أغلب الأحيان، بشكل مكثّف ودون تحوير؛ وهذا ما يدلُّ على أنَّ كتابَ "الاستكمال" شبيهٌ بموسوعة هندسيّة، أو أنـَّه، بشكل أدقّ، موسوعة ريّاضيّة بمعنى الرباعيّة (الحساب والموسيقى والهندسة والفلك)؛ وذلك أنـَّه صِيغَ بحيث يكون حاوياً الفلك والمناظر والتوافقيّات الموسيقيّة[٢٠]. كانت هذه الموسوعة الريّاضيّة، وفقاً لهذا المعنى، موجَّهة إلى القرّاء المطّلِعين على الريّاضيّات من دون أن يكونوا بالضرورة ريّاضيّين مُبتكِرين؛ كما كانت موجَّهة إلى الفلاسفة الذين كان لهم مع ابن هود العديد من الاهتمامات المشترَكة، كما أخبرنا بذلك صاعد الأندلسيّ. هذا هو، باختصار، مشروع "الاستكمال"، كما يبدو لنا. ويجب علينا أن نتجنَّب الوقوع في الخطأ بخصوص هذا المشروع وبخصوص ابن هود: لم يكن "الاستكمالُ" بأيّ حال من الأحوال مؤلَّفاً يهدف إلى توحيد الريّاضيّات في ذلك العصر، كما يُمكن أن نظنَّ بسذاجة[٢١]، بل هو ببساطة تجميع للأعمال الريّاضيّة الضروريّة لاكتساب تكوين جيِّد في هذا

---

[١٩] انظر القفطي، تاريخ الحكماء، ص. ٣١٩.

[٢٠] لفت ت. لانغرمان النظرَ إلى تعداد قام به الأكفاني وإلى قول له، مما يجعلنا نفهم أنَّ تحرير "الاستكمال" لم يكن تامّاً وفقاً لمخطّط ابن هود الخاصّ، وأنَّ هذا المخطّط يحتوي على فصول غير موجودة في "الاستكمال". يقول الأكفاني ، بعد أن يُحصي أجزاء الهندسة العشرة(إرشاد القاصد، ص. ٥٤) إنـه لم يرَ حتّى الآن أيّ كتاب يحتوي على هذه الأجزاء العشرة، ثمَّ يكتب: "لكن لو كمل تصنيف الاستكمال للمؤتـَمَن بن هود رحمه الله لكان كافياً ومغنياً". ونلاحظ، أيضاً، أنَّ المقّري يتكلّم عن "كتاب الاستكمال والمناظر"، مما يدلُّ على أنَّ "الاستكمال" كان يتضمَّن قسماً في علم المناظر(ذُكِرَ المقّري في الحاشية ٢). لا يتحدَّث الأكفاني، هنا، إلا عن الهندسة، ولكنّه كان يعلم أنَّ هذا الكتاب يحتوي على جزء مهمّ في الحساب لم يكن موجوداً ضمن الأجزاء العشرة التي أحصاها.

[٢١] سيقع القارئ، هنا وهناك، على مثل هذه الأقوال، كما قد يقع على أقوال أكثر إفراطاً؛ فقد وصف بعضهم ابن هود بأنّه أعظم الهندسيّين ضمن التقليد الأندلسيّ، ولم يتردَّد البعض الآخر، بفعل شطحة حماسيّة، عن اعتباره سلفاً لِـ "بورباكي"(*Bourbaki*)... ولكنَّ هذا لا يبدو مرتكزاً على أيّ أساس، ما أن يتمَّ الاطلاع على أعمال الريّاضيّين الأندلسيّين؛ ويكفي أن نقرأ، هنا في كتابنا هذا، الصفحات الخاصّة بابن السَّمْح، أو أن نقرأ في مكان آخر الاستشهادات بابن سيِّد، أو أن نقرأ، ببساطة، ما كان يقول عنها المعاصرون لابن هود.

الميدان. أمّا ابن هود، فلم يكن بوسعه أن يتصوَّر هذه المهمَّة المُوَحِّدة أو أن يقوم، بالأحرى، بمثلها. فقد كان يلزم من يريد القيام بهذه المهمَّة أن يكون لديه مفهومٌ آخر للجبر ولدوره ولعلاقاته، على الأخصّ، بالهندسة؛ وهذا ما لم يكن لابن هود أيَّة فكرة عنه. ويبقى علينا، مقابل ذلك، أن نعرف متى ولماذا اقتبس رياضيّو المغرب الإسلاميّ، مثل ابن هود، هذا الأسلوبَ الموسوعيَّ الذي كان، حتّى ذلك الوقت، حَكْراً على الفلاسفة، مثل ابن سينا في كتابه "الشفاء". لقد كان باستطاعة ابن هود، وريث الرياضيّين الكبار – وهم بنو موسى وابن قرّة وابن سنان وابن الهيثم وابن السَّمْح... – أن يقوم بهذا التحرير الموسوعيّ.

ويتضمَّن كتابُ "الاستكمال"، على كلّ حال بوصفه "كتاباً جامعاً"، دراستين في الريّاضيّات اللامتناهية في الصغر. ولقد أثَّر الشكلُ الموسوعي للتحرير في مظهر هاتين الدراستين وفي اتساعهما أيضاً. وتَستوحي الدراسة الأولى، التي تعالج مساحة القطع المكافئ، بشكل قويّ، من مؤلّف ابن سنان حول نفس الموضوع. وتتناول الدراسة الثانية، المكرَّسة لمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، من جديد كما سنرى، قضيّة لابن الهيثم. وهكذا تكمُن قيمة هاتين الدراستين، كما تَمثـُلان لنا، في أهمِّيّتهما التاريخية وليس في جِدَّة النتائج الريّاضيّة المدوَّنة فيهما. وهذا يعني أنَّ عمل ابن هود، هنا، يتعلّق بمسألة عرض النتائج وليس بمسألة اكتشاف هذه النتائج؛ كما أنَّ التحرير الموسوعيّ يحدُّ من مستوى النتائج الأوَّليّة؛ وهذا ما سنراه لاحقاً. وقد يبدو هذا القول مُقلِّلاً من قيمة عمل ابن هود الذي لم يكن نهجُه، على الإطلاق، نهجَ من ينقل حرفيّاً. فقد يحدث أن يحاول القيام بصياغة مختلفة أو أكثر عموميّة. ولكنـّنا سنرى أيضاً، في الحالتين اللتين تـُهِمّاننا على الأقلّ، أنَّ هذا التعميمَ لا ينجح وأنَّ البراهينَ المستوحاة من أسلافه هي أقلُّ دِقّة من براهين هؤلاء. وهكذا، فإنـَّه، على سبيل المثال، عندما يُعمِّم النتيجة التي برهنها ابن سنان للقطع المكافئ، إلى حالتي القطع الناقص والقطع الزائد (المقارنة بين قِطَع القطع المكافئ والمثلّثات)، لم يستطع استخدام هذه المقارنة ليُعمِّم بنفس الطريقة نتيجة ابن سنان، الخاصّة بمساحة قطعة للقطع المكافئ، تلك القطعة التي لأجلها أجرِيَت المقارنة الأولى، على القطعين المخروطيّين الآخريْن.

٧-١-٢ النقل المخطوطيّ للنصوص

لقد وصل إلينا النصّ الخاصّ بمساحة القطع المكافئ في مخطوطة وحيدة(سنرمز إليها بِـ C) موجودة في المكتبة الملكيّة في كوبنهاغن تحت الرمز (Or. 82)؛ أمّا النصّ الآخر الخاصّ بمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، فهو موجود في هذه المخطوطة وفي مخطوطة أخرى في مكتبة لايد (*Or. 123a, Leyde*). ولقد استندنا إلى هاتين المخطوطتين لنحقّق للمرّة الأولى هذين النصّين من كتاب "الاستكمال".

ومخطوطة كوبنهاغن هي من بين المخطوطات العربيّة النادرة المكتوبة والمنظّمة بعناية فائقة؛ وهذا ما نقرأه في الجدول:

Codices Orientales Bibliothecae Regiae Hafniesis Jussu et auspiciis regiis enumerati et descripti/ Pars Altera : Codices Hebraicos et Arabicos Continens(1852),

المجلّد الثاني، ص. ٦٤-٦٧. يُعطي مؤلّف هذا الجدول بدقّة وعناية كلّ المعلومات التي كانت لديه استناداً إلى المخطوطة. فهو يعرض بكلِّ وضوح مُخَطَّط "الاستكمال"، ويذكر بالعربيّة مختلف أقسامه. ويُسجِّل على المخطوطة، نفسها، كلّ العناصر المُهِمَّة. ونحن نعلم أنَّ هذه المخطوطة صادرة عن مجموعة باريس للجمعية اليسوعية؛ ونقرأ على وجه ورقتها الأولى في الهامش الداخليّ ، وكذلك على المجموعة ٨١ من نفس المكتبة، "وُقِّعَ وفقاً لقرار الخامس من تمّوز سنة ١٧٦٣، مسنيل (*Mesnil*)". ولنلاحظ أنـّنا نجد توقيع هذا الأخير في الهامش الخارجيّ على وجه الورقة الأولى. وهكذا تكون هذه المخطوطة منقولة من فرنسا قبل هذا التاريخ. وكان مؤلّف الجدول، من جهة أخرى، قد أشار إلى وجود تعليقات باللغة اليونانيّة، بخطّ لا يرجع إلى ما بعد عصر النهضة؛ وهذا ما يوحي بأنَّ المخطوطة قد انتقلت إلى الشرق اليونانيّ قبل أن تصل إلى باريس. وتخصُّ هذه التعليقات، كلّها، (الأوراق ١٢و، ١٦و،

٢١و، ٢٣ظ، ٣٢ظ، ١٢٢و)[٢٢] عناوين الفصول، أو محتوياتها بطريقة أو بأخرى. وهذا ما يدلُّ على أنَّ هذه التعليقات قد كتبت بيد يونانيّ كان يفهم محتوى المخطوطة، جزئيّاً على الأقلّ. وهكذا تكون هذه المخطوطة القديمة، الأندلسيّة الأصل على الأرجح، قد انتقلت إلى الشرق اليونانيّ قبل أن تصل إلى باريس ثمَّ إلى كوبنهاغن.

تحتوي المخطوطة على ١٢٨ ورقة. ولقد تَلِفت عدّة مواضع منها بسبب دود الخشب وتأثير الرطوبة. ولقد فُقِدت منها عدّة أجزاء ، وخاصّة البداية المكرَّسة لشرح المقالة الأولى، وقسمٌ من المقالة الثانية من كتاب "الأصول" لأقليدس. ونحن على علم، من المؤلّف المجهول للمخطوطة العثمانيّة، بوجود شرح لمُصادرة المتوازيات إلى جانب مواضيع أخرى مهمّة. وكتابة هذه المخطوطة القديمة، كتابة مغاربيّة. ونجد فيها، هنا وهناك، تعاليق على الهوامش مكتوبة بيد أكثر حداثة، فيجب أن لا نخلط بينها وبين يد النَّسّاخ. ولقد كتب هذا الأخير، في الهامش، إضافاته الخاصّة؛ وهذا ما يُبيِّن أنـَّه قابل نسخته، بعد أن انتهى من نقلها، بالنسخة الأصليّة. ويكتب النسّاخ، أخيراً، الأحرفَ في القضايا الريّاضيّة كما تـُلفظ : ألف، باء، الخ.

يحتلُّ النصُّ حول مساحة القطع المكافئ الأوراق ١٠٠ظ-١٠٢ظ. ولقد رأينا أن نكتـُب الأحرف كما تكتب عادة وليس كما تـُلفظ، لعدم وجود أي التباس ممكن.

والمخطوطة الثانية (التي سنرمز إليها بِـ L) هي مخطوطة مكتبة لايد (*Or. 123a, Leyde*). نجد وصفاً صحيحاً لها، مع أنـَّه مُختصَر، في الجدول :

M. J. de Goeje, Catalogus Codicum Orientalium Bibliothecae Academiae Lugduno-Batavae(1873),

---

[٢٢] نجد على الصفحة ١٢و περὶ τῶν ἀριθμῶν ἀναλογίας καὶ πρὸς τὰ σώματα ἐπίπεδα καὶ γραμμὰς συγκρίσεως
أي "في التشابه بين الأعداد ومقارنتها بالأجسام والسطوح والخطوط".
نجد على الصفحة ١٦و: περὶ ἀριθμῶν ἰδιότητος καὶ τοῦ πρὸς τὰ μέρη συγκρίσεως
أي "في خواصّ الأعداد والمقارنة بين الشيء نفسه والأجزاء".
يُشير الجدول (*Codices Orientaales*) على الصفحة ٦٥، إلى وجود الكلمات التالية على الهامش، ὧδε πολὺ λείπει التي تعني "هكذا يترك كثيراً". ولكنّنا نلاحظ أنَّ الكلمة πολὺ لا تظهر على الميكروفيلم.
نجد على الصفحة ٢٣ظ: περὶ τῶν κύκλων περιφερίας ، أي "في إحاطات الدوائر".
نجد على الصفحة ٣٢ظ: διάπραξις τῶν σχημάτων καὶ ἡ ἐν αὐτοῖς ἄσκησις ، أي "عمل الأشكال ودراستها".
نجد على الصفحة ١٢٢و: περὶ στερεῶν ، أي "في المجسَّمات".

المجلّد الخامس، ص. ٢٣٨-٢٣٩[٢٣]. يتعلّق الأمر بمقطع من ٨٠ ورقة من "الاستكمال". والخطّ هو الخطُّ النسخيُّ الشرقيُّ؛ والمخطوطة هي، بلا شكّ، أحدث من المخطوطة السابقة. وتُبيِّن المقارنة بين المخطوطتين أنّـهما تنتميان إلى تقليدين مخطوطيَّين مختلفين. ولا شيء يدُلُّ على أنَّ نـَسَّاخ مخطوطة لايد قد قابل نسخته بالنسخة الأصليّة. ويبدو أنَّ الملاحظات الهامشيّة قد أضيفَت خلال النسخ – انظر الأوراق ٤٩ظ، ٥٥ظ، ٥٦و – أو أنَّ ليس لها علاقة بالنصّ؛ الملاحظة، المضافة على الورقة ٦٩ظ، ليست سوى آية قرآنيّة. ويبقى الجدول صامتاً حول تاريخ النصّ؛ فهو يُخبرنا فقط أنَّ المخطوطة تنتمي إلى مجموعة غوليوس[٢٤](*Golius*). ويحتلُّ النصُّ، الخاصّ بمسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية والذي نحققِه، هنا، الأوراقَ ٧ظ-١١و، والأوراق ٥٠و-٥٠ظ، من مخطوطة كوبنهاغن.

٧-٢ مساحة القطع المكافئ

٧-٢- ١ خاصّة اللامتناهيات في الصغر أو الخاصّة المخروطيّة

توجَد دراسة مساحة القطع المكافئ لابن هود ضمن فصل من كتاب "الاستكمال" يعالِجُ قطوع الأسطوانة وقطوع المخروط الدورانيّ. ينقسم هذا الفصل إلى قسمين؛ عنوان القسم الأوَّل هو: "في وجود القطوعَ وخواصّها الأول من غير إضافة بعضها إلى بعض"؛ أمّا عنوان القسم الثاني فهو: "في خواصّ خطوط وزوايا وسطوح القطوع بإضافة بعضها إلى بعض[٢٥]. يُشير هذان العنوانان، وحدهما، بشكل تامّ إلى السياق الذي يجري فيه عرض ابن هود. فهذا الأخير لا يريد بالتأكيد أن يُحدِّد مساحة قطعة من القطع المكافئ لذاتها، بل لأجل التعرُّف على خاصَّة للقطع المخروطيّ. وهذا يعني أنَّ الدراسة في الهندسة اللامتناهية في الصغر لا تبدو في المقام الأوَّل، بل إنَّ دراسة القطوع المخروطيّة تأخذ الأهمّيّة الأولى. ولنذكّر، لكي نقدِّر أهمِّيّة هذه النقطة الأخيرة، بأنـّها تـُميِّز بين منظور ابن هود ومنظور الذي استوحى منه ابن هود كثيراً وهو ابن سنان. كان هذا الأخير، كما رأينا، يهتمُّ، كالماهاني

[٢٣] انظر أيضاً، ص. ٤٣٢ من: *P. Voorhoeve, Manuscripti VII. Handlist of Arabic Manuscripts in the Library of the University of Leiden and other Collections in the Netherlands*, (The Hague/Boston/London, 1980, 2ème Ed).

[٢٤] سيكون مُهِمّاً أن نعرف إذا كانت المخطوطة قد نـّسِخـَت في الشَّرق، أو في هولندا، كما حصل لمجموعات أخرى من المخطوطات في عصر غوليوس.

[٢٥] انظر مخطوطة كوبنهاغن، المكتبة الملكيّة، (Or. 82)، الورقة ٩٠ظ.

وكَجَدِّه ثابت بن قرّة، بمسألة مساحة القطع المكافئ المتريّة لذاتها. ويصبح هذا الاختلاف، من جهة، والاقتباسُ المكثّف من كتاب "المخروطات"، من جهة أخرى، صفة مميِّزة لأسلوبُ ابن هود ولطبيعة مساره. فيجب علينا، لأجل فهم هذين الأخيرين أن نتوقّف قليلاً عند عرضه لمساحة القطع المكافئ.

يجري عرض ابن هود على الشكل التالي: يقتبس ابن هود، بعد أن يُذكّرَ ببعض تعاريف القطوع الثلاثة وعناصرها، عدداً من القضايا من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، حرفيّاً على التقريب في بعض الأحيان، وبكتابة جديدة في أحيان أخرى، قبل أن يتوصَّل إلى تحديد مساحة قطعة من قطع مكافئ – القضايا ١٨ إلى ٢١ – مقتبساً هذه المرّة عن إبراهيم بن سنان. فليس الاقتباسُ من كتاب "المخروطات" مكثّفاً، فحسب، بل هو يتبع، إجمالاً، ترتيبَ أبلونيوس.

ويجب علينا، لأجل توضيح سياق هذه الدراسة، أن نرجع إلى القضايا التي وردت قبل القضايا التي سنحقّقها هنا – ١٨ إلى ٢١ – وإلى تلك التي ترد بعدها. نلاحظ، عندئذ، أنَّ ابن هود يستعير قضاياه من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات"، حسب الترتيب، قبل أن يرجع إلى إبراهيم بن سنان.

وليست القضيّة العاشرة (وفقاً لترقيم المخطوطة) سوى استعادة للقضيّتين الأولَيَيْن من هذه المقالة السادسة[٢٦]. وذلك أنَّ ابن هود يُبرهن فيها ما يلي:

"القطوع المكافئة إذا كانت أضلاعها القائمة متساوية وزوايا خطوط ترتيبها متساوية، فإن القطوع متساوية متشابهة؛ وإن كانت القطوع متساوية متشابهة، كان أضلاعها القائمة متساوية؛ وإن كانت القطوع غير مكافئة وكانت أشكالها التي تعمل على أقطارها المجانبة متساوية متشابهة .فإن القطوع متساوية متشابهة؛ وإن كانت القطوع متساوية متشابهة، فإن الأشكال التي تعمل على أقطارها المجانبة متساوية ووضعها متشابه".

ولكنّنا نلاحظ أنَّ ابن هود، في حالة القطع المكافئ، يتناول الأضلاع القائمة الخاصّة بأقطار اختياريّة، بينما يتناول أبلونيوس فقط الأضلاع الخاصَّة بالمحاور؛ ولهذا السبب يُدخِل

[٢٦] انظر المرجع السابق، الورقة ٩٦ظ.

ابن هود زوايا الترتيب. ولنلاحظ، أيضاً، أنَّ ابن هود، في حالة قطع ذي مركز، يميِّز، بخلاف ما فعله في حالة القطع المكافئ، بين حالة القطر الرئيسيّ وحالة القطر الاختياريّ التي يدرسها في القضيّة ١٥ الموافقة للقضيّة ١٣ عند أبلونيوس.

القضيّة التالية من كتاب "الاستكمال" هي استعادة للقضيّة السادسة من كتاب "المخروطات" نفسه:

" إذا كان جزء من قطع يقع على جزء من قطع، فينطبق عليه، كان القطع مساويًا للقطع"[٢٧].

والقضيّة ١٣، من هذا الفصل من كتاب "الاستكمال"، هي استعادة للقضيّة ١١ من كتاب "المخروطات": كلُّ القطوع المكافئة متشابهة. والقضيّة التالية من كتاب "الاستكمال" هي القضيّة ١٢ من كتاب "المخروطات". ويكتب ابن هود ما يلي:

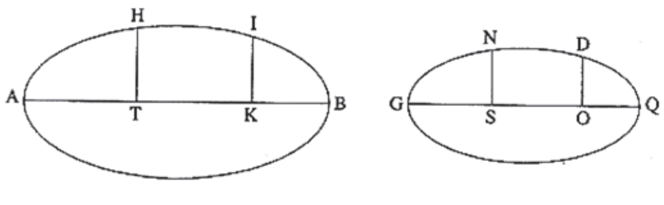
" القطوع غير المكافئة، التي أشكالها التي تعمل على سهامها متشابهة، فهي أيضاً متشابهة؛ وإن كانت القطوع متشابهة، فإنَّ أشكالها التي تعمل على سهامها متشابهة متساوية"[٢٨].

يُبيِّن ابن هود، بعد ذلك، نتيجة يحتاج إليها في مساحة القطع المكافئ – القضيّة ١٨. وهي:

ليكن معنا قطعان مخروطيّان من نفس النوع، وليكن قطراهما على التوالي AB وَ GQ؛ ولتكن K وَ T نقطتين على AB، ولتكن O وَ S نقطتين على GQ، بحيث يكون:

$$\frac{QG}{GS}=\frac{BA}{AT} \quad \text{وَ} \quad \frac{QG}{GO}=\frac{BA}{AK}. \qquad (١)$$

ولتكن KI، TH، OD وَ SN خطوط الترتيب لهذه النقاط، فيكون: $\frac{KI}{TH}=\frac{OD}{SN}$.



[٢٧] انظر المرجع السابق، الورقة ٩٧و.

[٢٨] انظر المرجع السابق، الورقة ٩٧ظ. ولنلاحظ أنَّ هذه الأشكال غير متساوية، خلافاً لما يقوله ابن هود؛ ولذلك وضعنا العبارة بين قوسين معقوفتين.

يكون معنا: $\frac{AK}{AB}\left(1\pm\frac{AK}{AB}\right)/\frac{AT}{AB}\left(1\pm\frac{AT}{AB}\right)=\frac{AK(AB\pm AK)}{AT(AB\pm AT)}=\frac{BK.AK}{BT.AT}=\frac{KI^2}{TH^2}$ ؛

ويكون أيضاً: $\frac{GO}{GQ}\left(1\pm\frac{GO}{GQ}\right)/\frac{GS}{GQ}\left(1\pm\frac{GS}{GQ}\right)=\frac{OD^2}{SN^2}$، فنحصل على النتيجة بواسطة العلاقتين (١).

والقضيّة الخامسة عشرة، من هذا الفصل من "الاستكمال"، هي القضيّة ١٣ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات":

" إذا كانت أشكال القطوع غير المكافئة المعمولة على أقطار غير السهام متشابهة وكانت زوايا خطوط ترتيبها متساوية، فإن القطوع متشابهة. "[٢٩].

يرجع ابن هود، أخيراً، إلى عكس هذه القضيّة. ثمَّ ينتقل إلى القضيّة السادسة عشرة التي هي استعادة للقضيّتين ٢٦ وَ ٢٧ من نفس مقالة "المخروطات":

" إذا قطعت سطوح متوازية مخروطًا، فإن القطوع الحادثة فيها متشابهة. "[٣٠].

والقضيّة ١٧، من "الاستكمال"، مستوحاة من القضيّتين ٤ وَ ٧ ومن القضيّة ٨ خاصّة، من نفس كتاب أبلونيوس؛ وتعاد كتابتها كما يلي: "ليكن معنا قطعٌ مخروطيٌّ، فيقسم سهمُه سطحَه إلى نصفين؛ وإذا فصلنا منه قطعة، يُمكن أن نجد فيه قطعة أخرى مساوية لها ومشابهة لها. كلُّ قطر من أقطار القطع الناقص يفصل سطحَه إلى نصفين ويفصل محيطَه أيضاً إلى نصفين".

تتبع هذه القضايا، عندئذ، القضايا، المرَقّمة من ١٨ إلى ٢١، التي سنتناولها في التفصيل. وهذه القضايا متبوعة، بدورها، بالقضيّتين التاليتين:

" نريد أن نبيِّن كيف نعمل قطعاً مساوياً لقطع معلوم شبيهاً بقطع معلوم آخر "؛

وهي القضيّة الثانية والعشرون. ثمَّ يُثبت:

---

[٢٩] انظر المرجع السابق، الورقة ٩٨ظ.
[٣٠] انظر المرجع السابق، الورقة ٩٩ظ.

" كل قطعتين متشابهتين من قطعين متجانسين فإن نسبة الخط المحيط بإحداهما من القطع إلى الخط لمحيط بالأخرى من القطع كنسبة قطرها إلى قطرها. "[31].

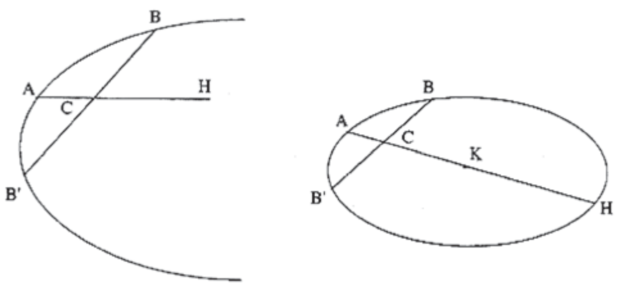
يُظهر هذا الموجَزُ السياقَ الذي يجري فيه تحديد قطعة من القطع المكافئ في كتاب "الاستكمال"؛ مما يدلُّ على أنَّ دراسة خواصّ القطوع المخروطيّة مقتبسة في القسم الأعظم منها من كتاب أبلونيوس. ويُلقي هذا الموجَزُ ، أيضاً، الضوءَ على نهج ابن هود الذي تنطبق عليه صفة العرض أكثر من صفة الاكتشاف. وسنلقى ثانية هذا النهج في دراسة مساحة القطع المكافئ، أي في القضايا الأربع التي نحقّقها هنا والتي سنحلّلها فيما يلي.

٧-٢-٢ الشرح الرياضي للقضايا ١٨ إلى ٢١

يبدأ ابن هود بصيغة تخصُّ القطر والقطر المجانب.

تـُحدَّد كلُّ قطعة، من قطع مكافئ أو ناقص أو زائد، بقوس ووتر.

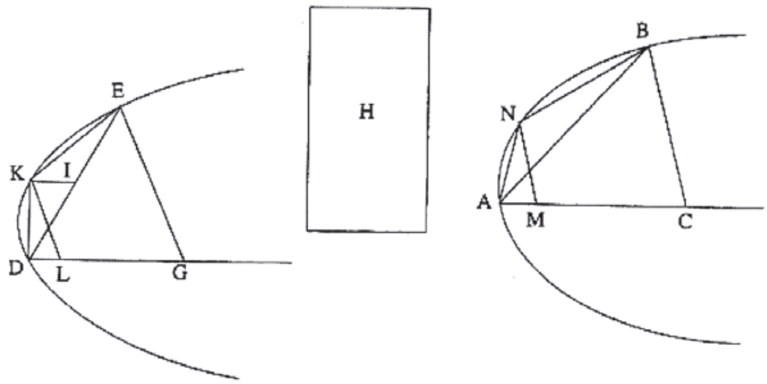
لتكن BAB' قطعة مثل هذه القِطَع؛ تمرُّ في C، وسط القطر BB'، قطرٌ AH للقطع، يقطع القوسَ $\widehat{BB'}$ على نقطة A تـُسمّى رأس القطعة؛ فتسمَّى القطعة AC قطر القطعة ذات القاعدة BB'. يكون القطر AH، في حالة القطع المكافئ، موازياً للمحور؛ ويمرُّ AH في حالة القطع الناقص أو القطع الزائد، بمركز القطع K، فيكون AH قطراً مجانباً.



والأقسام المدروسة في القضيّتين ١٨ وَ ١٩ ليست قِطَعاً، بل أقساماً من قِطَعٍ، مثل ABC؛ وبالرغم من ذلك، يتمُّ الاحتفاظ بالعبارات: الرأس A، القطر AC، قاعدة هذا القسم BC، والقطر المجانِب.

[31] انظر المرجع السابق، الأوراق ١٠٢ظ – ١٠٣ظ.

القضيّة ١٨- لنأخذ، في قطعين مكافئين أو ناقصين أو زائدين، القطعتين ABC وَ DEG. القطعة الأولى محدودة بالقطر الذي يمرُّ بالنقطة A وخطّ الترتيب BC الخاصّ بهذا القطر؛ القطعة الثانية محدودة بالقطر الذي يمرُّ بالنقطة D وبخطّ الترتيب EG الخاصّ بهذا القطر.



نبيِّن أنَّ:

ا) إذا كانت ABC وَ DEG قطعتين من قطعين مكافئين،

أو

ب) إذا كانت ABC وَ DEG قطعتين من قطعين ناقصين أو زائدين، وإذا كان Δ وَ Δ' القطرين اللذين يمرّان على التوالي بالنقطتين A وَ D، نفرض أنَّ: $\frac{\Delta}{AC} = \frac{\Delta'}{DG}$، فيكون معنا:

$$\frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{\text{مساحة قطعة } (DGE)} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(DGE)}.$$

١) لنفرض

$$\frac{\text{مساحة قطعة } (ABC)}{H} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(\quad)} \qquad (*)$$

حيث تكون H مساحة أصغر من مساحة القطعة DEG[٣٢].

ليكن I وسط DE وليكن IK قطر القطع؛

[٣٢] يجب أن نفترض أنَّ: مساحة قطعة (DGE) > H > مساحة مثلّث(DGE)، لأنَّ المتساوية (*) تصبح مستحيلة إذا كان: $H \leq$ مساحة مثلّث(DGE)

ا) إذا كان القطع مكافئاً، يكون $IK // DG$ ؛ ب) إذا كان القطع ناقصاً أو زائداً، يتقاطع IK مع DG على مركز القطع.

نحن نعلم أنَّ مساحة مثلّث(DGE) > $\frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DGE)، وأنَّ:

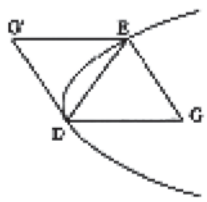
مساحة مثلّث(DEK) > $\frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DEK)[٣٣].

وإذا أخذنا وسطي الوترين KD وَ KE، وقمنا بالعمل بنفس الطريقة، نحصل على سطح مضلّع أعظم من H. فليكن $DKEG$ المضلّع الذي نحصل عليه. وليكن KL خطّ الترتيب للنقطة K، ولتكن M نقطة على AC بحيث يكون:

$$\frac{DL}{GL} = \frac{AM}{CM} \quad (١)$$

[٣٣] وردت هاتان المتباينتان بدون تعليل.

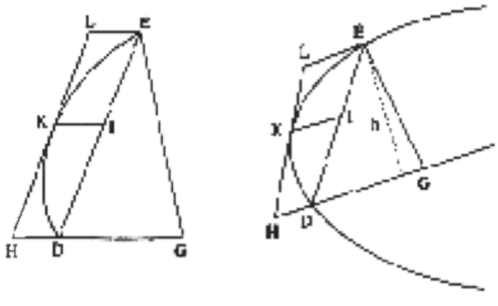
ا) مساحة مثلّث(DGE) > $\frac{1}{2}$. مساحة قطعة (DGE):



إذا أكملنا رسم متوازي الأضلاع $DGEG'$، مهما كان نوع القطع المعنيّ بالأمر، يكون DG' مماسّاً للقطع، ويكون معنا:

2 .مساحة مثلّث(DGE) = مساحة متوازي الأضلاع$(DGEG')$ > مساحة قطعة (DGE)، فنحصل على النتيجة.

ب) مساحة مثلّث(DGE) > $\frac{1}{2}$ مساحة قطعة (DGE)،



إذا كان القطع مكافئاً، يكون KI قطراً، ويكون خطُّ التماسّ في النقطة K موازياً للخطّ DE ويقطع DE على النقطة H. إذا أكملنا رسم متوازي الأضلاع $DHLE$، يكون DG' مماسّاً للقطع، يكون معنا:

2 .مساحة مثلّث(DEK) = مساحة متوازي الأضلاع$(DHLE)$ > مساحة قطعة (DKE)،

فنحصل على النتيجة.

ولنلاحظ أنَّ ابن سنان، في مقدّمة القضيّة ٢، يعطي برهاناً للمتباينة ب) عندما يكون القطع مكافئاً. ويصلح برهانه في حالة القطع الناقص أو الزائد.

فنحصل على

$$\frac{DL}{GL}=\frac{AC}{AM}. \qquad (٢)$$

ا) إذا كان القطعان مكافئين، يكون معنا وفقاً للقضيّة ٢٠ من المقالة الأولى لكتاب "المخروطات" لأبلونيوس، $\frac{AC}{AM}=\frac{BC^2}{NM^2}$ وَ $\frac{DG}{DL}=\frac{EG^2}{KL^2}$، ويكون معنا، وفقاً لـِ (٢):

$$\frac{EG}{KL}=\frac{BC}{NM}.$$

ب) إذا كان القطعان ناقصين أو زائدين، يكون معنا، وفقاً للقضيّة ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات":

$$\frac{AC(\Delta\pm AC)}{AM(\Delta\pm AM)}=\frac{BC^2}{NM^2} \text{ وَ } \frac{DG(\Delta'\pm DG)}{DL(\Delta'\pm DL)}=\frac{EG^2}{KL^2}،$$

(حيث يكون "+" للقطع الزائد ويكون "–" للقطع الناقص.

ويكون لدينا، وفقاً للفرضيّات:

$$\frac{\Delta'}{DG}=\frac{\Delta}{AC}. \qquad (٣)$$

يمكننا أن نكتب: $\frac{AC}{AM}\frac{\left(\frac{\Delta}{AC}\pm 1\right)}{\left(\frac{\Delta}{AC}\pm\frac{AM}{AC}\right)}=\frac{BC^2}{NM^2}$ وَ $\frac{DG}{DL}\frac{\left(\frac{\Delta'}{DG}\pm 1\right)}{\left(\frac{\Delta'}{DG}\pm\frac{DL}{DG}\right)}=\frac{EG^2}{KL^2}$؛ ويكون معنا، وفقاً لـِ (٢) وَ (٣):

$$\frac{EG}{KL}=\frac{BC}{NM}. \qquad (٤)$$

ولكنّ (١) تتضمَّن: $\frac{DG}{GL}=\frac{AC}{CM}$ وَ (٤) تتضمَّن $\frac{EG}{EG+KL}=\frac{BC}{BC+NM}$، فنحصل على:

(٥) $$\frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مضلّع }(B)} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(DGE)}{\text{مساحة مضلّع }(LKEG)}.$$

ولكنّ $\frac{DG}{GL}\frac{EG}{KL} = \frac{AC}{AM}\frac{BC}{NM}$، فنحصل على:

(٦) $$\frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(\quad)} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(EDG)}{\text{مساحة مثلّث }(DLK)}.$$ [٣٤]

يكون معنا، إذاً، $\frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مضلّع }(A)} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(EDG)}{\text{مساحة مضلّع }(DKEG)}$، فنحصل على:

$$\frac{\text{مساحة قطعة }(ABC)}{H} = \frac{\text{مساحة مضلّع }(ANBC)}{\text{مساحة مضلّع }(DKEG)} = \frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(EDG)}،$$

فنحصل على: $\frac{\text{مساحة مضلّع }(DKEG)}{} = \frac{\text{مساحة مضلّع }(ANBC)}{\text{مساحة قطعة }(ABC)}$؛ وهذا مستحيل لأنَّ المتباينة:

مساحة مضلّع$(ANBC)$ > مساحة قطعة (ABC)، تعطينا المتباينة: مساحة مضلّع $(DKEG) > H$،

في حين أنـّنا فرضنا أنَّ مساحة مضلّع $(DKEG)<H$.

٢) إذا افترضنا أنَّ $\frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(EDG)} = \frac{\text{مساحة قطعة }(ABC)}{H}$، مع مساحة قطعة $(DEG)<H$، فإنَّ

هذا يعادل الافتراضَ $\frac{\text{مساحة مثلّث}(EDG)}{\text{مساحة مثلّث}(ABC)} = \frac{\text{مساحة قطعة }(EDG)}{H_1}$، مع مساحة قطعة $(ABC)<H_1$.

يبيِّن الاستدلال السابق أنَّ هذا مستحيل، فنحصل على النتيجة.

ملاحظة ١: يقوم ابن هود بالبرهان مستخدماً رباعيّيْ الأضلاع $DKEG$ وَ $ANBC$ الحاصليْن من القسمة الأولى للقوسين $\widehat{DE}$ وَ $\widehat{AB}$ في النقطتين K وَ N، على التوالي، إذا فرضنا، من بداية هذه المرحلة، أنَّ مساحة $(DKEG) < H$.

---

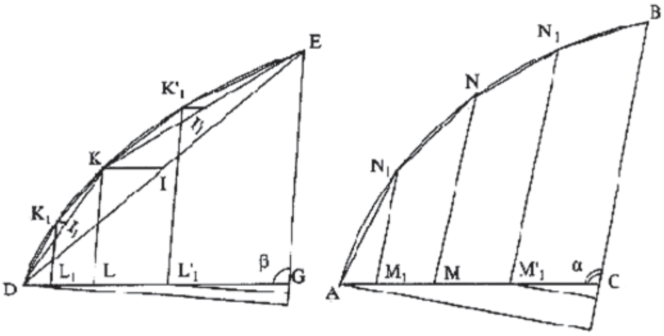
[٣٤] تعليل العلاقتين (٥) وَ (٦): إذا وضعنا $\alpha = \widehat{ACB}$ وَ $\beta = \widehat{DGE}$، يكون معنا:

مساحة مثلّث(ABC) $= \frac{1}{2}BC.AC\sin\alpha$، مساحة مضلّع $(BCMN)$ $= \frac{1}{2}(BC+NM).CM\sin\alpha$ ،

مساحة مثلّث (EGD) $= \frac{1}{2}EG.DG\sin\beta$، مساحة مضلّع $(LKEG)$ $= \frac{1}{2}(EG+KL).GL\sin\beta$ ، فنحصل على (٥).

ويكون معنا أيضاً: مساحة مثلّث (ANM) $= \frac{1}{2}MN.AM\sin\alpha$، وَ مساحة مثلّث (DLK) $= \frac{1}{2}KL.DL\sin\alpha$، فنحصل على (٦).

ولم يُبيِّن أنَّ نفسَ الاستدلال قابلٌ للتطبيق، إذا كان ضرورياً أن تُقسَم القوسان $\widehat{DE}$ وَ $\widehat{AB}$ إلى 2^n جزءاً للحصول على مضلّع P_n، بحيث يكون: مساحة $H < (P_n)$.



ونـُرفِق، في المرحلة التالية، بالنقطة I_1، وسطِ KD، نقطة التقاطع K_1 بين الخطّ، المارّ بالنقطة I_1 والموازي للخطّ DG، وبين القوس $\widehat{KD}$؛ ولتكن L_1 نقطة على DG بحيث يكون $K_1L_1//KL//EG$؛ وكذلك نـُرفِق بالنقطة I'_1، وسطِ KE، نقطة التقاطع K'_1 بين الخطّ، المارّ بالنقطة I'_1 والموازي للخطّ DG، وبين القوس $\widehat{EK}$؛ ولتكن L'_1 نقطة على DG بحيث يكون $K'_1L'_1//KL//EG$. ونـُرفق بالنقطتين L_1 وَ L'_1 النقطتين M_1 وَ M'_1، بحيث يكون:

$\frac{AC}{DG} = \frac{AM_1}{DL_1} = \frac{AM'_1}{DL'_1}$، فيكون معنا: $\frac{AC}{DG} = \frac{AM_1}{DL_1} = \frac{M_1M}{L_1L} = \frac{MM'_1}{LL'_1} = \frac{M'_1C}{L'_1G} = \lambda$،

أي أنَّ القسمتين، على القطعتين DG وَ AC، متشابهتان.

ونـُرفق بالنقطتين M_1 وَ M'_1 النقطتين N_1 وَ N'_1 على القوس $\widehat{AB}$، بحيث يكون: $M_1N_1//MN//M'_1N'_1//CB$.

وإذا استخدمنا معادلتيْ القطعين المخروطيّين، نبيِّن، كما فعلنا بالنسبة إلى النقطتين K وَ N، أنَّ

$\frac{BC}{N_1M_1} = \frac{EG}{K_1L_1}$ وَ $\frac{BC}{N'_1M'_1} = \frac{EG}{K'_1L'_1}$، فيكون معنا: $\frac{BC}{EG} = \frac{N_1M_1}{K_1L_1} = \frac{N'_1M'_1}{K'_1L'_1} = \mu$.

يتألّف كلّ مضلَّع من المضلَّعين P_1 وَ P'_1، الحاصلين من قسمة القوسين $\widehat{DE}$ وَ $\widehat{AB}$ إلى 2^2 من الأجزاء المتساوية، من مثلّث وثلاثة مربَّعات منحرفة. فإذا رمزنا بـِ h_1، h_2، h_3 وَ h_4

إلى الارتفاعات الخاصّة، على التوالي، بالمثلّث DL_1K_1 وبالمربّعات المنحرفة (K_1L)، (KL'_1) وَ (K'_1G)، وإذا رمزنا بـِ h'_1، h'_2، h'_3 وَ h'_4 إلى الارتفاعات المماثلة الخاصّة بالشكل الثاني، يكون معنا: $\frac{h'_i}{h_i} = \frac{AC \sin \alpha}{DG \sin \beta} = \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} \lambda$، لكلّ $i \ni \{1,2,3,4\}$.

فتكون خواصّ المضلّعين P_2 وَ Q_2 المعرَّفين بهذه الطريقة، مطابقة لخواصّ المضلّعين A وَ B اللذين درسهما ابن سنان في القضيّة (١)[انظر أعلاه، ابن سنان، الشرح الريّاضيّ، صفحة ٤٨٣ وما يليها].

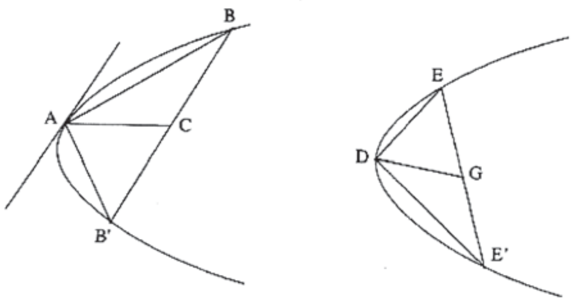
وتكون النتيجة مشابهة، بالنسبة إلى المضلّعين P_n وَ Q_n الحاصلين من القوسين $\widehat{DE}$ وَ $\widehat{AB}$ إلى 2^n من الأجزاء المتساوية، بالطريقة المشار إليها؛ نبيِّن، عندئذ، أنَّ:

$$\frac{\text{مساحة } (P_n)}{\text{مساحة مثلّث}(EDG)} = \frac{\text{مساحة } (Q_n)}{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}.$$ [انظر ابن سنان، الشرح الريّاضيّ]

٢) توجد القطعتان ABC وَ DEG ضمن القطعتين BAB' وَ EDE' الحاصلتين من رسم الوترين BB' وَ EE' اللذين لهما الوسطين C وَ G حسب الترتيب. ويكون للمثلّثين ABC وَ ACB' نفس المساحة وتكون مساحتا المثلّثين DEG وَ DGE' متساويتين.

إنـَّه من الواضح أنَّ النتيجة، المبرهنة في القضيّة ١٨ لقطعتين موجودتين ضمن قطعين مختلفين من نفس النوع، صالحة أيضاً لقطعتين موجودتين ضمن نفس القطع. يكون معنا، إذاً:

$$\frac{\text{مساحة مثلّث}(ABC)}{\text{مساحة مثلّث}(ACB')} = \frac{\text{مساحة قطعة}(ABC)}{\text{مساحة قطعة}(ACB')}$$، فيكون، بالتالي : مساحة قطعة (ABC)= مساحة قطعة (ACB').

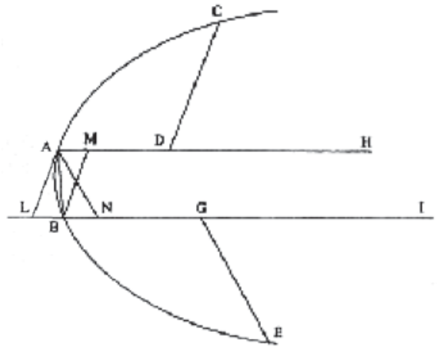


ويكون، أيضاً، مساحة قطعة (EDG)= مساحة قطعة (DGE').

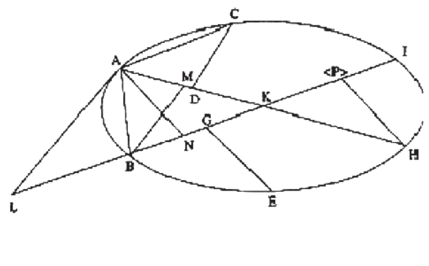
فتكون مساحة كلّ من القطعتين ABC وَ DGE مساوية لنصف مساحة كلّ من القطعتين BAB' وَ EDE'.

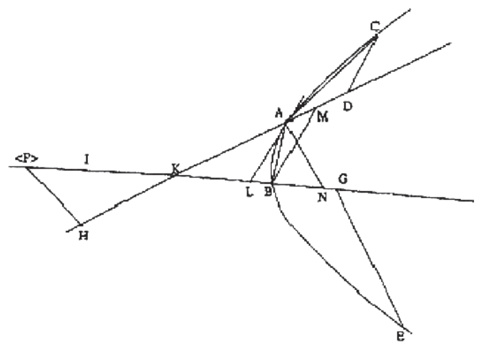
القضيّة ١٩- لتكن القطعتان المدروستان على نفس القطع؛ ولتكن AC وَ BE هاتين القطعتين.

ا) إذا كان القطع المخروطيُّ مكافئاً، وإذا كان القطرُ AD الذي يحدُّ القطعةَ الأولَى مساوياً للقطر BG الذي يحدُّ القطعة الثانية، تكون القطعتان AC وَ BE متساويتين.



ب) إذا كان القطع المخروطيُّ ناقصاً أو زائداً، وإذا كان Δ وَ Δ' القطرين المجانبين الخارجين من A وَ B، وإذا كان $\frac{\Delta}{AD}=\frac{\Delta'}{BG}$، تكون القطعتان ACD وَ BEG، عندئذ، متساويتين.





ليكن AN خطّ الترتيب للنقطة A بالنسبة إلى BG، وليكن BM خطّ الترتيب للنقطة B بالنسبة إلى AD، وليكن AL خطّ التماس في النقطة A الذي يقطع BG على النقطة L.

ا) إذا كان القطع مكافئاً، يكون معنا $BL=BN$، وفقاً للقضيّة ٣٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات". يكون معنا، إذاً، $BL=BN=AM$، وبالتالي تكون مساحتا المثلّثين ABM وَ ABN متساويتين.

ب) إذا كان القطع ناقصاً أو زائداً، يكون معنا $BL=BN$، وفقاً للقضيّة ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات":

$$\frac{LI}{LB}=\frac{IN}{NB}. \qquad (١)$$

نستخرج من (١) أنَّ: $\frac{LI}{IN}=\frac{BL}{BN}$، فنحصل على $\frac{LI+\varepsilon BL}{IN+\varepsilon BN}=\frac{BL}{BN}$، حيث يكون $\varepsilon = 1$، إذا كان القطع زائداً، ويكون $\varepsilon = -1$، إذا كان القطع ناقصاً.

ليكن HP موازياً لِـ AN؛ والنقطة K مركز التناظر للقطعين المخروطيّين، فيكون معنا إذاً: $IP = BN$. فيكون معنا عندئذ: $\frac{BK}{KN}=\frac{BI}{PN}=\frac{BI}{IN+\varepsilon IP}=\frac{BL}{BN}$، فيكون $\frac{BK}{BL}=\frac{KN}{BN}$. ولكنَّ BM موازياً لِـ AL، فنحصل على $\frac{KA}{AM}=\frac{KL}{LB}$، فيكون معنا $\frac{KA}{AM}=\frac{KB}{NB}$. ولكنَّ $\frac{\text{مساحة مثلّث }(ABM)}{\text{مساحة مثلّث }(ABK)}=\frac{AM}{AK}$، وَ $\frac{\text{مساحة مثلّث }(ABN)}{\text{مساحة مثلّث }(ABK)}=\frac{BN}{BK}$، فتكون مساحتا المثلّثين ABM وَ ABN متساويتين.

يكون معنا، وفقاً للفرضيّات: $\frac{AD}{AH}=\frac{BG}{BI}$ أو $\frac{AD}{AK}=\frac{BG}{BK}$ ويكون معنا أيضاً $\frac{AK}{AM}=\frac{BK}{BN}$، فيكون معنا، إذاً: $\frac{AD}{AM}=\frac{BG}{BN}$.

تتحقّق هذه المتساوية الأخيرة في القطوع المخروطيّة الثلاثة.

ونستخرج من ذلك، مثلما حصل في القضيّة ١٨ – أي باستخدام معادلة القطع المخروطيّ المعنيّ بالأمر، في كلّ حالة –، أنَّ: $\frac{CD}{BM}=\frac{EG}{AN}$. يكون معنا، بالتالي: $\frac{CD}{BM}.\frac{AD}{AM}=\frac{EG}{AN}.\frac{GB}{BN}$، فنحصل على: $\frac{\text{مساحة مثلّث}(ACD)}{\text{مساحة مثلّث}(ABM)}=\frac{\text{مساحة مثلّث}(EGB)}{\text{مساحة مثلّث}(ANB)}$؛

ولكنَّ مساحة مثلّث(ABN) = مساحة مثلّث(ABM)،

فيكون، نتيجة لذلك، مساحة مثلّث(ACD) = مساحة مثلّث(EGB)، ولكنَّ معنا، وفقاً للقضيّة ١٨،

$\frac{\text{مساحة مثلّث}(ACD)}{\text{مساحة مثلّث}(EGB)} = \frac{\text{مساحة قطعة }(ACD)}{\text{مساحة قطعة }(BGE)}$، فتكون مساحتا القطعتين ACD وَ BGE متساويتين.

لنتناول القضيّة العكسيّة – إذا كانت مساحتا القطعتين ACD وَ BGE متساويتين، حيث يكون الخطّان، AD وَ BG، القطرين Δ وَ Δ' الخارجين من A وَ B، ويكون CD وَ EG خطّا الترتيب للنقطتين C وَ E بالنسبة إلى هذين القطرين، يكون معنا، عندئذ:

* إذا كان القطع مكافئاً، يكون معنا $AD = BG$.

* إذا كان القطع زائداً أو ناقصاً، يكون معنا: $\frac{AD}{\Delta} = \frac{BG}{\Delta'}$.

ملاحظة – تخصُّ القضيّتان ١٨ وَ ١٩، المدروستان هنا، القطعتين التابعتين لقطعين مكافئين أو لقطعين ناقصين أو لقطعين زائدين أو لقطع واحد؛ وتساوي مساحة كلّ قطعة من القطعتين المدروستين، نصف مساحة القطعة المرفقة بها (انظر الملاحظة ٢، القضيّة ١٨).

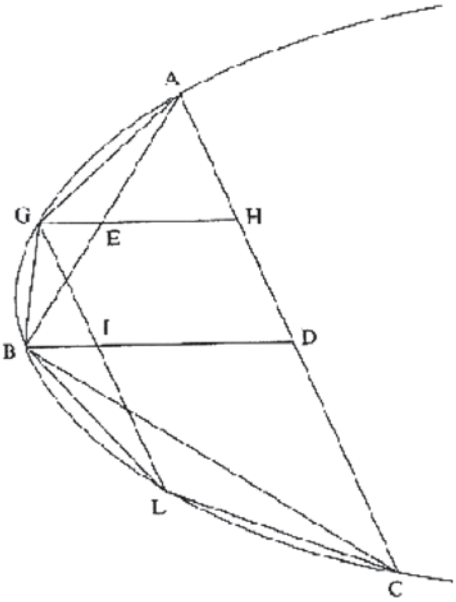
لنذكّر بأنَّ ابن سنان يهتمُّ فقط بالقطع المكافئ ويدرس في قضيّته الثانية نسبة مساحتي قطعتين من القطع المكافئ مستخدماً قضيّته الأولى كمقدّمة.

ولنلاحظ أن ابن هود يستخدِم في القضيّة ١٨، دون تعليل، متباينتين خاصّتين بمساحتي قطعتين وبمساحتي المثلّثين المرفقين بالقطعتين (انظر الحاشية ٣٣)؛ كما أنّه يستخدِم، في القضيّتين ١٨ وَ ١٩، دون ذكر القضايا التي برهنها أبلونيوس، متساوياتٍ حاصلة من تطبيق مباشر لهذه القضايا أو ناتجة عنها.

ولكنَّ دراسة العلاقة التضمينيّة $\frac{AC}{AM} = \frac{DG}{DL} \Leftarrow \frac{BC}{NM} = \frac{EG}{KL}$، المستخدَمة في القضيّة ١٨، كانت – في حالة القطع الناقص أو الزائد – موضوع القسم الأخير من القضيّة ١٤ التي لا نوردها في هذا الفصل.

القضيّة ٢٠ - لتكن ABC قطعة من قَطع مكافئ ذي الرأس B والقاعدة AC؛ يكون معنا:

مساحة القطعة $(ABC) = \frac{4}{3}$. مساحة المثلّث (ABC).



ليكن BD القطر المزاوج للقطر AC. نخرِج من وسط AB الخطّ الموازي للخطّ BD، وليكن GEH، ولنخرِج من G خطّ الترتيب GIL. يكون معنا: $2DH = AD \Leftarrow 2BE = AB$؛ ولكنَّ $GI = HD$، فنحصل على $2GI = AD$، $\frac{AD^2}{GI^2} = \frac{BD}{BI} = \frac{4GI^2}{GI^2} = 4$، فنحصل على $4BI = BD$. ويكون معنا، عندئذ: مساحة المثلّث $(BGI) = \frac{1}{8}$. مساحة المثلّث (ABD). ويكون معنا أيضاً: $3BI=$ و $2BI = \frac{1}{2} ID = EH$، فيكون $BI = GE$، فنحصل على:

مساحة المثلّث $(BGI) = \frac{1}{8}$. مساحة المثلّث $(BGE) = \frac{1}{2}$. مساحة المثلّث (AGB)،

فيكون مساحة المثلّث $(AGB) = \frac{1}{4}$. مساحة المثلّث (ABD). ويكون معنا كذلك :

مساحة المثلّث $(BLC) = \frac{1}{4}$. مساحة المثلّث (BDC)، فيكون مجموعُ مساحتي المثلّثين BLC وَ AGB، مساوياً لربع مساحة المثلّث ABC، فيكون مجموع مساحتي القطعتين BLC وَ AGB،

مساوياً لربع مساحة القطعة ABC؛ ولكنَّ الفرق بين مساحة القطعة ABC ومجموع مساحتي القطعتين BLC وَ AGB مساوٍ لمساحة المثلّث ABC، فيكون:

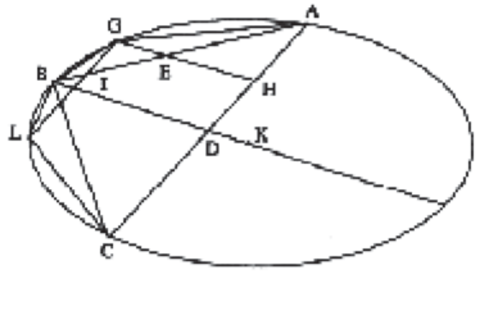
$\frac{3}{4}$.مساحة القطعة (ABC) = مساحة المثلّث (ABC)،

أو مساحة القطعة $(ABC) = \frac{4}{3}$. مساحة المثلّث (ABC).

ملاحظة ١ – يكاد البرهان أن لا يختلف عن برهان ابن سنان في القضيّة ٣. ونحصل هنا على المقارنة بين مساحتي المثلّثين ذويْ نفس القاعدة، وهما BGA وَ BDA، من المتساويتين: $GE = BI = \frac{1}{4} BD$، دون إدخال الارتفاعات. أمّا ابن سنان، فهو يُبيِّن أنَّ النسبة بين ارتفاعي المثلّثين المعنيَّين بالأمر تساوي $\frac{1}{4}$، فتكون النسبة بين المساحتين مساوية لـِ $\frac{1}{4}$ أيضاً.

ملاحظة ٢ – إنَّ تطبيقَ الخاصّة، المدروسة في القضيّة ٢٠، ممكنٌ على قِطَع القطوع المكافئة فقط، في حين أنَّ الخواصَّ المدروسة في القضيّتين ١٨ وَ ١٩، قابلة للتطبيق على قطع القطوع المكافئة والناقصة والزائدة.

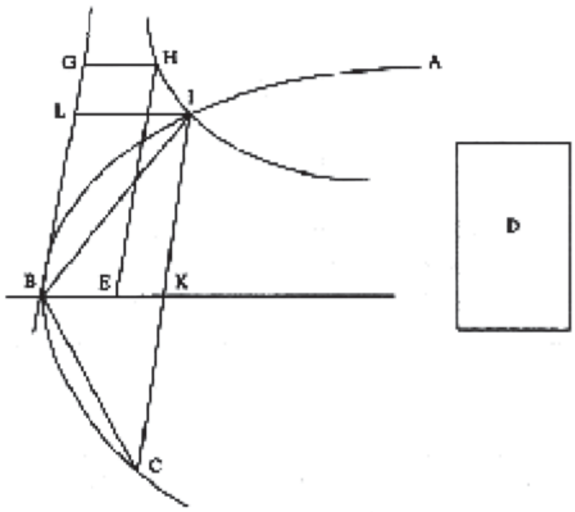
فإذا قمنا فعلاً، في قطع ناقص ذي قطر Δ، بالعمل المشار إليه في القطع المكافئ، نحصل بوضوح على: $\frac{AD^2}{GI^2} = 4 = \frac{BD(\Delta - BD)}{BI(\Delta - BI)}$، فلا يكون $\frac{BD}{BI} = 4$.



فلا يمكن، إذاً، تطبيق بقيّة الاستدلال على حالة القطع الناقص.

القضيّة ٢١ – كيف نفصل، من قطع مكافئ ABC ذي رأس معلوم B، قطعة بحيث تساوي مساحتها لمساحة معلومة D.

لنخرج من B القطر BE وخطّ التماسّ BG، ولنرسم على BG، متوازياً للأضلاع $GBEH$، بحيث تكون مساحته مساوية لـِ $\frac{3D}{4}$.



نرسم قطعاً زائداً يمرُّ بالنقطة B بحيث يكون BG وَ BE خطّيه المقارَبين؛ وهو يقطع القطع المكافئ على النقطة I. يقطع خطُّ الترتيب IK القطعَ المكافئ على النقطة C، ويقطع القطرَ على النقطة K؛ ونرسم الخطّ IL الموازي للخطّ BK. وتكون مساحتا متوازييْ الأضلاع (BI) وَ (BH) متساويتين (خاصّة القطع الزائد؛ القضيّة ١٢ من المقالة الثانية لأبلونيوس)، يكون معنا:

مساحة (BH)= مساحة (BI) $= \frac{3D}{4}$، مساحة المثلّث (IBC)= مساحة (BI) $= \frac{3D}{4}$؛

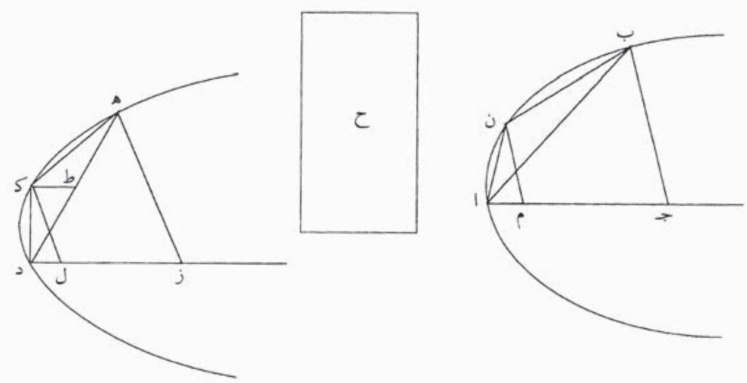
ولكنَّ مساحة المثلّث(IBC)= $\frac{3}{4}$.مساحة القطعة (IBC) ، وفقاً للقضيّة ٢٠، فتكون مساحة القطعة (IBC) مساوية للمساحة D.

٣-٢-٧ نص من «كتاب الاستكمال» لابن هود حول مساحة القطع المكافئ

– يح – كلُّ قطعتين من قطعين مكافئين، أو قطعتين من قطعين زائدين أو ناقصين تكون نسبة مجانب إحداهما إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، فإن نسبة سطح إحدى القطعتين إلى سطح القطعة الأخرى كنسبة المثلث الذي قاعدته قاعدة القطعة ورأسه رأسها إلى المثلث الذي في القطعة الأخرى الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها. ١٠٠ – ظ

مثال ذلك: أن قطعتي ا ب وهـ د من قطعين متجانسين، وقطر قطعة ا ب خط ا ج وخطُّ ترتيبها خط ب ج، وقطر قطعة د هـ خط د ز وخطُّ ترتيبها خط هـ ز؛ وإن كانتا بين قطعتين غير مكافئتين، فنسبة مجانب قطعة ا ب إلى / ا ج كنسبة مجانب قطعة د هـ إلى خط د ز. ونصل ا ب د هـ. ١٠١ – و

فأقول: إن نسبة سطح قطعة ا ب ج إلى سطح قطعة د هـ ز كنسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د هـ ز.



برهانه: أنه لا يمكن غيره. فإن أمكن، فلتكن نسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د هـ ز كنسبة قطعة ا ب ج إلى سطح هو أصغر أو أعظم من سطح قطعة د هـ ز، فلتكن إلى سطح ح.

1 قطعتين: قد تقرأ «قطعين» / قطعتين (الثانية): وسطها مطموس / تكون: مطموسة – 3 رأسه: أثبتها في الهامش – 5 كتب الناسخ الحروف الهندسية كما ينطق بها، فكتب زَ: زاي واَ ألف، وهكذا، ولم نأخذ بهذه الكتابة حتى لا يطول النص دون أية فائدة – 6-8 تآكلت ورقة المخطوطة في عدة مواضع ومعها بعض حروف الكلمات، وأعدنا ترميمها.

وليكن أولاً أصغر من سطح قطعة د هـ ز. ولنقسم خط د هـ بنصفين على نقطة ط، ونخرج من نقطة ط قطر ط ك يلقى القطع على نقطة ك، ونصل هـ ك ك د. فلأن سطح مثلث د هـ ز أعظم من نصف قطعة د هـ ز ومثلث د ك هـ أعظم من نصف قطعة د هـ ك، فإذا فعلنا مثل ذلك دائمًا، فقد يُنتهى إلى سطح كثير الأضلاع هو أعظم من سطح ح؛ وليكن ذلك سطح د ك هـ ز. ونخرج من نقطة ك خط ك ل على الترتيب. ونقسم خط ا ج على نقطة م حتى تكون نسبة ا م إلى م ج كنسبة د ل إلى ل ز. ونخرج من نقطة م خط م ن على الترتيب، ونصل ا ن ن ب. فلأن نسبة المجانب إلى ا ج كنسبة المجانب إلى د ز ونسبةَ ا ج إلى ج م كنسبة د ز إلى ز ل، تكون نسبة ب ج إلى ن م كنسبة هـ ز إلى ك ل. فنسبة ا ج إلى ج م مثناة بنسبة ب ج إلى ب ج ون م مجموعين كخط واحد – التي هي كنسبة مثلث ا ب ج إلى سطح م ن ب ج ذي الأربعة الأضلاع – كنسبة د ز إلى ز ل مثناة بنسبة هـ ز إلى هـ ز وك ل مجموعين كخط واحد – التي هي كنسبة مثلث د هـ ز إلى سطح ل ك هـ ز ذي الأربعة الأضلاع. ونسبة ا ج إلى ا م مثناة بنسبة ب ج إلى ن م – التي هي كنسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث ا ن م – كنسبة د ز إلى د ل مثناة بنسبة هـ ز إلى ك ل التي هي كنسبة مثلث د هـ ز إلى مثلث د ل ك، فنسبة مثلث ا ب ج إلى جميع سطح ا ن ب ج الكثير الزوايا كنسبة مثلث د هـ ز إلى سطح د ك هـ ز الكثير الزوايا. وإذا بدلنا، كانت نسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د هـ ز – التي هي كنسبة سطح قطعة ا ب ج إلى سطح ح – كنسبة سطح ا ن ب ج الكثير الزوايا إلى سطح د ك هـ ز الكثير الزوايا. فنسبة سطح ا ن ب ج الكثير الزوايا إلى سطح د ك هـ ز كنسبة سطح قطعة ا ب ج إلى سطح ح. وإذا بدلنا، فنسبة سطح ا ن ب ج الكثير الزوايا إلى قطعة ا ب ج كنسبة سطح د ك هـ ز الكثير الزوايا إلى سطح ح. وسطح ا ن ب ج الكثير الزوايا أصغر من سطح قطعة ا ب ج، فسطح د ك هـ ز الكثير الزوايا أصغر من سطح ح، وقد كان فرض أعظم منه، هذا خلف لا يمكن.

وليست نسبة مثلث ا ب ج إلى مثلث د هـ ز كنسبة قطعة ا ب ج إلى سطح هو أصغر من سطح قطعة د هـ ز.

8 كنسبة: نجد في الهامش «تبين ذلك في الشكل الرابع عشر في هذا الفصل» – 9 التي هي: نجد في النص كلمة «مجموعين» التي ضرب عليها الناسخ بالقلم وأثبت الصحيح في الهامش – 13 د ل: زاي لام، ثم ضرب بالقلم على زاي وأثبت دال في الهامش / د ل ك: دال زاي، ثم ضرب بالقلم على زاي وأثبت لام كاف في الهامش – 16 ا ن ب ج: الف با جيم – 18 د ك هـ ز: دال كاف وها زاي – 19 ا ن ب ج: الف با نون جيم.

وأقول أيضًا: ولا إلى ما هو أعظم منه. لأنه لو كان كذلك، لكانت نسبة مثلث د ه ز إلى مثلث ا ب جـ كنسبة سطح قطعة د ه ز إلى سطح هو أصغر من سطح قطعة ا ب جـ. وقد تبين أن ذلك خلف، فنسبة مثلث / ا ب جـ إلى مثلث د ه ز كنسبة سطح قطعة ا ب جـ إلى سطح ١٠١ - ظ قطعة د ه ز؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

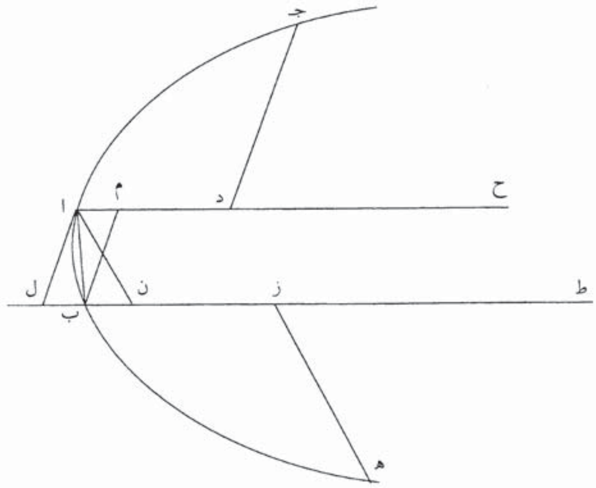
– **يط** – كل قطعتين من قطع واحد، إن كان القطع مكافئًا وكان قطراهما متساويين، فإن القطعتين متساويتان، وإن كان غير مكافئ وكانت نسبة مجانب إحداهما إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، فإن القطعتين متساويتان.

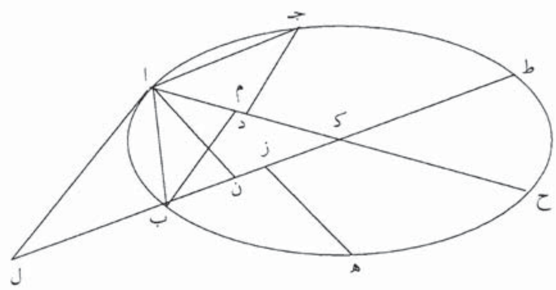
مثال ذلك: أن قطعَ ا ب ⟨المكافئ⟩ قطر قطعة ا جـ منه وهو ا د مساوٍ لقطر قطعة ب ه الذي هو ب ز؛ وإن كان غير مكافئ، فليكن قطر قطعة ا جـ المجانب خط ا حً وقطرُ قطعة ب ه المجانب أيضًا خط ب ط والمركزُ نقطة ک، ولتكن نسبة ح ا إلى ا د كنسبة ط ب إلى ب ز.

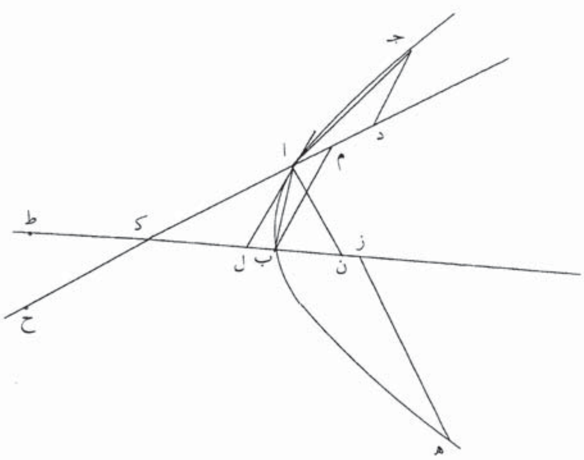
فأقول: إن قطعة ا جـ مساوية لقطعة ب ه.

برهان ذلك: أنا نخرج من نقطة ا على قطر ب ز خط ا ن على الترتيب، ومن نقطة ب على قطر ا د خط ب م على الترتيب؛ ونصل ا ب ا جـ ب ه، ونخرج من نقطة ا خط ا ل مماسًا يلقى قطر ب ط على نقطة ل. فإن كان القطع مكافئًا، كان خط ب ل مساويًا لخط ب ن، ويكون خط ب ل مساويًا لخط ا م؛ فيكون لذلك مثلث ا م ب مساويًا لمثلث ا ب ن. وإن لم يكن القطع مكافئًا، كانت نسبة ط ن إلى ن ب كنسبة ط ل إلى ل ب. فإذا ركبنا، كانت نسبة ط ن ون ب إلى ن ب كنسبة ط ل ⟨و⟩ب ل إلى ب ل؛ وأنصاف المقدمات تكون أيضًا متناسبة، فنسبة ک ن إلى ن ب كنسبة ک ب إلى ب ل. وإذا فصلنا، كانت نسبة ک ب إلى ب ن كنسبة ک ل إلى ل ب، التي هي كنسبة ک ا إلى ا م، التي هي كنسبة مثلث ا ب ک إلى كل واحد من مثلثي ا ب ن ب ا م. فمثلثا ا ب ن ب ا م متساويان. ولأن نسبة د ا إلى ا ح كنسبة ز ب إلى ب ط ونسبة ح ا إلى ا ک كنسبة ط ب إلى ب ک ونسبة ک ا إلى ا م كنسبة ک ب إلى ب ن، فبالمساواة تكون نسبة د ا إلى ا م كنسبة ز ب إلى ب ن؛ فتكون لذلك في جميع القطوع نسبة جـ د إلى ب م كنسبة ه ز إلى ا ن. فخط جـ د إلى خط ب م مثناة بنسبة د ا إلى ا م – التي هي كنسبة مثلث ا جـ د إلى مثلث ب ا م – كنسبة ه ز إلى ا ن مثناة بنسبة ز ب إلى ب ن التي هي

17 ط ل: طا / وأنصاف: الفاء مطموسة – 22 كنسبة: نجد في الهامش «تبين ذلك في الشكل الرابع عشر في هذا الفصل ...» / نسبة: كنسبة


ج
ح
م
د
ا
ل
ن
ز
ط
ب
ه


ج
ط
ا
م
ك
د
ز
ن
ح
ب
ه
ل

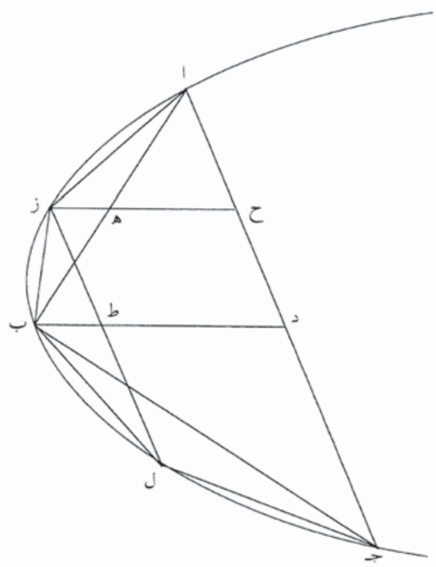

ج
د
ا
م
ط
ك
ز
ل
ب
ن
ح
ه

نسبة مثلث زه ب إلى مثلث ا ن ب؛ ومثلثا ا ب م ا ن ب متساويان، فمثلثا ا جـ د ب هـ ز متساويان، فقطعتا ا جـ ب هـ متساويتان.

وهنالك استبان: إذا كانت قطعتان متساويتين، تكون نسبة مجانب إحداهما إلى قطرها كنسبة مجانب الأخرى إلى قطرها، / أو زيد في إحداهما قطعة أو نقص من إحداهما قطعة، كيف ١٠٢ - و
نزيد في إحداهما مثل القطعة المزيدة أو ننقص منها مثلها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

- كـ - كل قطعة من قطع مكافئ فإن سطحها مثل وثلث سطح المثلث الذي قاعدته قاعدتها ورأسه رأسها.

مثال ذلك: قطعة ا ب جـ رأسها نقطة ب وقاعدتها خط ا جـ. ونصل ا ب ب جـ.



فأقول: إن سطح قطعة ا ب جـ مثل وثلث سطح مثلث ا ب جـ.

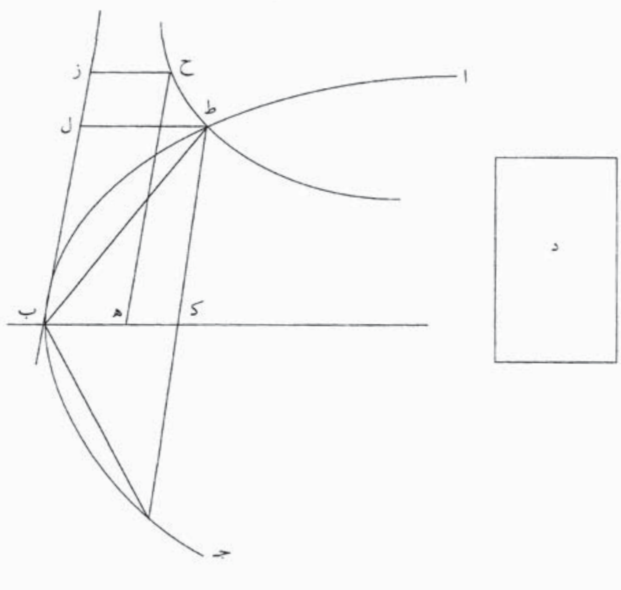
برهانه: ليكن خط ب د قطر القطعة، ونقسم خط ا ب بنصفين على نقطة هـ، ونخرج منها قطر زه ح يلقى القطع على نقطة ز وخطَّ ا جـ على نقطة ح، ونخرج من نقطة ز خط ز ط ك ل على الترتيب يلقى قطر ب د على نقطة ط والقطع على نقطة ل، ونصل ا ز ز ب ب ل ل جـ. فلأن ب ا ضعف ب هـ، يكون ا د ضعف د ح المساوي لـ ز ط؛ ونسبة مربع ا د إلى مربع ز ط كنسبة

10 هـ: أثبتها في الهامش - 13 كنسبة: نجد في الهامش «تبين ذلك في الشكل السادس في الفصل الذي قبل هذا».

د ب إلى ب ط ؛ ومربع ا د أربعة أمثال مربع ز ط ، ف د ب أربعة أمثال ب ط ، فمثلث ز ب ط ثمن مثلث ا ب د ؛ ومثلث ز ب ط مساوٍ لمثلث ز ب هـ ، ومثلث ا ز ب ضعف مثلث ز ب هـ ، فمثلث ا ز ب ربع مثلث ا ب د. وكذلك مثلث ب ل جـ ربع مثلث ب جـ د، فمثلثا ا ز ب ب ل جـ ربع مثلث ا ب جـ ، فقطعتا ا ز ب ب ل جـ ربع قطعة ا ب جـ. فجميع سطح قطعة ا ب جـ مثل وثلث سطح مثلث ا ب جـ ؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

– **كا** – نريد أن نبيّن كيف نفصل من قطع مكافئ قطعة يكون سطحها مساويًا لسطح معلوم مستقيم الخطوط ويكون رأسها نقطة معلومة.

فليكن القطع قطع ا ب جـ والسطحُ المعلوم سطح د. ونريد أن نفصل من قطع ا ب جـ قطعة يكون سطحها مساويًا لسطح د ⟨و⟩يكون رأسها نقطة ب.



فلنخرج من نقطة ب قطر ب هـ ، ونخرج من نقطة ب خط ب ز يماسّها ونضيف إلى خط ب ز سطحًا مساويًا لثلاثة أرباع سطح د ، ونرسم سطح ب ز ح متوازي الأضلاع زاويته ح مساوية لزاوية ب ، ونجيز على نقطة ح / قطعًا زائدًا يكون الخطان اللذان لا يقعان عليه خطي ١٠٢ - ظ
ز ب ب هـ يلق قطع ا ب على نقطة ط ، ولنخرج من نقطة ط خطي ط ك ط ل موازيين لخطي

زب ب ه، فيكون سطح ب ط مساويًا[1] لسطح ح ب المساوي لثلاثة أرباع سطح د، ونخرج ط ك حتى يلقي القطع على نقطة ج. ونصل ط ب ب ج. فمثلث ط ب ج مساوٍ لثلاثة أرباع سطح د، وهو ثلاثة أرباع قطعة ط ب ج، فقطعة ط ب ج مساوية لسطح د.

ومن هنالك يستبين: إذا كانت قطعة مفروضة في قطع مكافئ، كيف نفصل من القطع قطعة تكون نسبتها إلى القطعة المفروضة كنسبة مفروضة؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

1 مساويًا: نجد في الهامش «تبين من ذلك في الشكل التاسع عشر في الفصل الذي قبل هذا».

٧-٣ مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

٧-٣-١ الخاصَّة الأقصويّة أو الخاصّة الهندسيّة

توجَد مسألة السطوح ذات الإحاطات المستوية ضمن فصل من كتاب "الاستكمال" حول خواصّ الدوائر بالنسبة إلى الزوايا والسطوح المحاطة بها [انظر: C-٤٤ظ]. وهذا يعني أنَّ ما يُهِمُّ المؤلّف، هذه المرّة أيضاً، ليست خواصّ الدوائر الأقصويّة لذاتها، بل تلك التي تتعلّق بالهندسة الابتدائية. ونلاحظ، بالتالي، وحدة منهج ابن هود. فهو، هنا، مثلما فعل في دراسة مساحة القطع المكافئ، لا يهتمُّ بالخواصّ المتعلّقة بالهندسة اللامتناهية في الصغر لذاتها، بل لتحسين المعرفة بالأشكال الهندسية. ولقد اعتمد، هنا كما فعل هناك، على الاقتباس المُكثّف؛ ولكنَّ هذا الاقتباس كان منظَّماً. وكان قد استعان، في كتابة "مساحة القطع المكافئ"، بأعمال أبلونيوس وابن سنان؛ أمّا هنا، في مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية، فقد استعان على الأخصّ بأعمال أرشميدس وبطلميوس وابن الهيثم.

ولكنَّنا إذا توقّفنا عند عرض هذه الاقتباسات فقط، لن نلمس العنصرَ المُوَحِّد في عرض "الاستكمال"، ولن نفهم الإسهام الخاصّ لابن هود. وهذا العنصر يظهر بجلاء عندما يتَّضح في هذه الحالة هدف ابن هود، وهو دراسة، بواسطة المضلّعات المحاطة في الدائرة أو المحيطة بها، للعلاقات بين الأوتار أو بين الأوتار والأقواس، أي للعلاقات التي ترجع غالباً إلى علاقات مثلّثاتيّة. ولنتابع بإيجاز، لكي نفهم مسار ابن هود على أحسن وجه، تداولَ عرضه، وخاصَّة من بداية إدخاله للمضلّعات، أي بدءاً من القضيَّة ١١. أمّا مسألة الإحاطات المتساوية فهي مدروسة في القضيّتين السادسة عشرة والتاسعة عشرة اللتين نحقّقهما لاحقاً.

تُصاغ القضيّة ١١، المقتبَسة من كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس – القضيّة ٣ من المقالة الأولى – كما يلي : ليكن معنا مقداران ودائرة، بَيِّنْ كيف نرسم مضلّعاً محاطاً ومضلّعاً محيطاً بالدائرة، بحيث يكونا متشابهين، وبحيث تكون نسبة ضلع المضلّع المحيط إلى ضلع المضلّع المحاط ، أصغر من نسبة أعظم مقدار من المقدارين المعلومين إلى أصغرهما [انظر: C-٤٨و- ظ، L - ٣ و- ظ]. يتعلّق الأمر، إذاً، برسم مضلّع متساوي

الأضلاع P ذي ضلع c محاط بالدائرة ومضلّع متساوي الأضلاع P' ذي ضلع c' محيط بالدائرة بحيث يكون $1<\frac{c}{c'}<k$ (حيث تكون النسبة k معلومة مع $1 < k$).

يرجع البرهان إلى أخذ زاوية حادَّة α بحيث يكون $\frac{1}{k}<\cos\alpha$. ونريد أن يكون $\cos\alpha\leq\frac{c}{c'}$.

ولكن يوجد n، مع $N < n$، بحيث يكون $\alpha\geq\frac{\pi}{2^n}$[1]، فنحصل على $\cos\alpha\leq\cos\frac{\pi}{2^n}$، فيكون $\frac{\pi}{2^{n-1}}$ القوسَ التي يكون وترها مساوياً للضلع المطلوب c. إنَّ لدينا بالفعل $2R\sin\frac{\pi}{2^n}=c$، وَ $2Rtg\frac{\pi}{2^n}=c'$، فنحصل على $\cos\alpha\leq\cos\frac{\pi}{2^n}=\frac{c}{c'}$ أو $\frac{c}{c'}\leq\frac{1}{\cos\alpha}<k$.

يكون للمضلّعين 2^n ضلعاً. ويخصُّ القسم الثاني، من هذه القضيّة ١١ نفسها، نسبة مساحتي المضلّعين اللذين نحصل عليهما كما جرى في القسم الأوَّل؛ وهذا مُقتبَس من القضيّة ٥ من المقالة الأولى من كتاب "الكرة والأسطوانة" لأرشميدس.

والقضيّة ١٢ [انظر: C ـ ٤٨ظ ـ ٤٩و، L ـ٤و-٥و] مقتبَسة هي أيضاً عن أرشميدس [القضيّة ٢١ والقضيّة ٢٢]. ولنلاحظ مع ذلك أنَّ أرشميدس يتناول في القضية ٢١ من المقالة الأولى مضلّعاً متوازي الأضلاع ذي عدد مزدوج من الأضلاع دون أن يكون مضاعِفاً للعدد ٤، كما يفرض ذلك ابن هود. ولا يستخدِم برهان ابن هود، من جهة أخرى، هذه الفرضيّة ولا يختلف عن برهان أرشميدس. ولقد أثبت أرشميدس النتيجة الواردة في الفقرة الأخيرة من قضيّة ابن هود التي تخصُّ المعادلة (٢)، ضمن القضية ٢٢ من المقالة الأولى من نفس الكتاب (انظر أيضاً القضيّة ١٢ لبني موسى).

ويمكن إعادة كتابة هذه القضيّة على الشكل التالي:

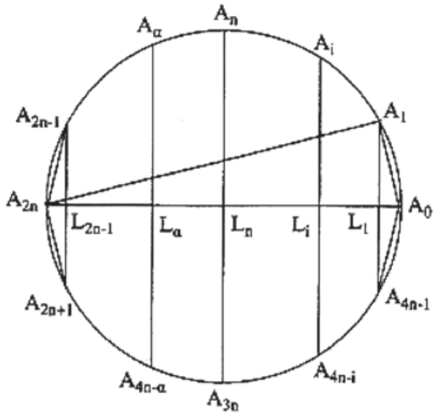
ليكن معنا مضلّعٌ متوازي الأضلاع ذو $4n$ من الأضلاع وهي A_1A_0، A_2A_1،...، $A_{2n}A_{2n+1}$، ...، A_0A_{4n-1}. والخطُّ $A_{2n}A_0$ هو خطٌّ للتناظر، والخطوط A_iA_{4n-i} ($1\leq i\leq 2n-1$)

---

[1] يتعلّق الأمر بتطبيق لازمة ضمنيّة للقضيّة الأولى من المقالة العاشرة لكتاب "الأصول" لأقليدس، وهي اللازمة الضمنية التي ناقشها ابن الهيثم (انظر المجلّد الثاني ص. ٤٦٣ وما يليها).

عموديّة على $A_{2n}A_0$ في النقاط L_1،...، L_{2n-1}، حيث تكون النقطة L_n وسط $A_{2n}A_0$؛ يكون معنا:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n-1} A_i A_{4n-i}}{A_0 A_{2n}} = \frac{A_1 A_{2n}}{A_0 A_1} \Leftrightarrow \left[\sum_{i=1}^{2n-1} \sin i \frac{\pi}{2n} = \cot g \frac{\pi}{4n}\right] \qquad (١)$$



ويُبيِّن أنـَّه إذا كان $1< \alpha \leq 2n-1$، يكون معنا:

$$\frac{\sum_{i=1}^{2n-1} A_i A_{4n-i} + A_\alpha L_\alpha}{A_0 A_{2n}} = \frac{A_1 A_{2n}}{A_0 A_1} \Leftrightarrow \left[\frac{2\left[\sum_{i=1}^{2n-1} \sin i \frac{\pi}{2n} + \frac{1}{2}\sin \alpha \frac{\pi}{2n}\right]}{1-\cos \alpha \frac{\pi}{2n}}\right] = \cot g \frac{\pi}{4n}. \qquad (٢)$$

ولنلاحظ أنَّ هذه المساواة تعطي، عندما يكون $1 = \alpha$، المتطابقة: $\frac{\sin \frac{\pi}{2n}}{1-\cos \frac{\pi}{2n}} = \cot g \frac{\pi}{4n}$.

والقضيّة الثالثة عشرة [C – ٤٩ظ، L – ٥و – ظ] مُقتبَسة من المجسطي [هايبرغ (*Heiberg*)، القضيّة العاشرة من المقالة الأولى؛ ترجمة هالما (*Halma*) إلى الفرنسيّة، المجلّد الأول ص. ٢٩]؛ وهذه صيغتها: " يكون، في كلّ رباعيّ للأضلاع محاط بدائرة، مجموعُ مضروبيْ كلّ ضلع بالضلع المماثل والمقابل له مساوياً لمضروب القطرين أحدهما بالآخر". والقضيّة التالية هي مقدّمة يُبرهن فيها أنَّ نسبة زاويتين مركزيَّتين(أو زاويتين محاطتين) في دائرة واحدة أو في دائرتين متساويتين، مساوية لنسبة القوسين الموتـَّرتين

بهما. والقضيّة الخامسة عشرة [انظر: C -٤٩ظ -٥٠و، L - ٦ظ - ٧ظ] مُقتبَسة من المجسطي [هايبرغ (*Heiberg*)، القضيّة العاشرة من المقالة الأولى، ص. ٤٣-٤٥؛ ترجمة هالما (*Halma*) إلى الفرنسيّة، المجلّد الأول ص. ٣٤]؛ وهي ترجع إلى تبيين أنـّه إذا كانت قوسان $\widehat{AB}$ وَ $\widehat{BC}$ في دائرة مع $\widehat{BC}+\widehat{AB} < 180°$ ومع $AB < BC$، يكون معنا:

$\frac{\widehat{BC}}{\widehat{BA}} < \frac{BC}{BA} < 1$؛ وهذا ما تمكن كتابته على الشكل التالي، إذا وضعنا $2\alpha = \widehat{BA}$ وَ $2\beta = \widehat{BC}$ مع

$\frac{\pi}{2} < \alpha + \beta$ و $\alpha < \beta$: $\frac{\beta}{\alpha} < \frac{\sin\beta}{\sin\alpha} < 1$.

وتـُكتَب القضيّة ١٧ثانية [انظر: C-٥٠ظ -، L- ٨و – ٩و]: إذا كان معنا، في مثلّث ABC، $\frac{\pi}{2} > \widehat{B}$ وَ $\frac{\pi}{2} > \widehat{C}$ وَ $AC < AB$، يكون معنا، عندئذ، $\frac{\widehat{C}}{\widehat{B}} < \frac{AB\cos\widehat{B}}{AC\cos\widehat{C}}$ أو $\frac{\widehat{C}}{\widehat{B}} < \frac{\cot g\widehat{B}}{\cot g\widehat{C}}$.

وهذا يعني أنَّ نسبة مسقطي الضلعين AC وَ AB على الضلع BC، أعظم من نسبة الزاوية $\widehat{C}$ إلى الزاوية $\widehat{B}$.

وتـُكتَب القضيّة ١٨ثانية [انظر: C -٥٠ظ -، L- ٩و – ١٠ظ]، وهي المقتبَسة من المجسطي [هايبرغ (*Heiberg*)، المجلّد الثاني، القضيّة الأولى من المقالة الثانية عشرة، ص. ٤٥٦-٤٥٨؛ ترجمة هالما (*Halma*) إلى الفرنسيّة، المجلّد الثاني، ص. ٣١٧]: ليكن معنا مثلّث ABC مع $BC > AC$، يكون معنا، عندئذ: $\left[\frac{\widehat{B}}{\widehat{C}} < \frac{AC}{CB-AC}\right] \Leftrightarrow \left[\frac{\sin\widehat{B}}{\sin\widehat{A}-\sin\widehat{B}} > \frac{\widehat{B}}{\widehat{C}}\right]$.

وهكذا نرى، على الأقلّ، النهج الكامن لابن هود وأسباب اقتباساته المتتابعة. فلندرس الآن القضيّتين ١٦ وَ ١٩.

٧-٣-٢ الشرح الرياضي للقضيّتين ١٦ و ١٩

القضيّة ١٦- إذا كان معنا، في مثلّث ABC، $AC < AB$ وَ $AD \perp BC$ ، يكون معنا، $\frac{BD}{DC} < \frac{\widehat{BAD}}{\widehat{DAC}}$.

يفترض ابن هود أنَّ D موجودة بين B وَ C (انظر الملاحظة).

تقطع الدائرة (A, AC) الخطَّ AD على النقطة H، وتقطع الخطَّ AB على النقطة E. يكون معنا: مساحة المثلّث (ABE) > مساحة القطاع (GAE)،

مساحة المثلّث (AED)<مساحة القطاع (EAH)،

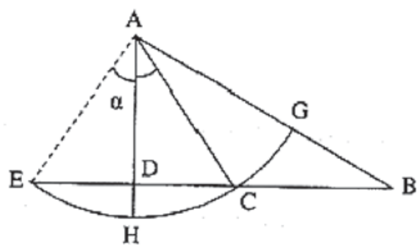
فيكون $\frac{\text{مساحة القطاع}(ABE)}{\text{مساحة القطاع}(AED)} > \frac{\text{مساحة المثلّث}(ABE)}{\text{مساحة المثلّث}(AED)}$ ،

فنحصل على $\frac{\text{مساحة القطاع}(GAH)}{\text{مساحة القطاع}(EAH)} > \frac{\text{مساحة المثلّث}(ABD)}{\text{مساحة المثلّث}(AED)}$؛ فيكون، بالتالي، $\frac{BD}{DE} < \frac{\widehat{BAD}}{\widehat{EAD}}$، ولكنَّ $CD = ED$ وَ $\widehat{DAC} = \widehat{EAD}$ ، فنحصل على $\frac{BD}{DC} < \frac{\widehat{BAD}}{\widehat{DAC}}$. [انظر الشكل ص. ٧٧٥]

ملاحظة - $AB < AC \Leftarrow \hat{B} > \hat{C}$. وإذا كانت D بين B وَ C ، تكون الزاويتان $\hat{B}$ وَ $\hat{C}$ حادَّتين.

ولكنَّ القضيّة تبقى صحيحة إذا كانت الزاوية $\hat{C}$ منفرجة؛ لأنّنا إذا وضعنا:

$\alpha = \widehat{DAC} = \widehat{EAD}$ و $\beta = \widehat{DAB}$،



يكون معنا في كلتا الحالتين: $AD.tg\ \alpha = CD = ED$ ، $AD.tg\ \alpha = DB$، فتكتب النتيجة كما يلي: $\frac{tg\beta}{tg\alpha} < \frac{\beta}{\alpha}$ مع α و β ∍ $]0, \frac{\pi}{2}[$، وهذه مقدَّمة معروفة ومنتشرة باليونانيّة وبالعربيّة[٢] (انظر مؤلّف الخازن).

[٢] انظر: و. ر. كنورّ (W. R. Knorr)، ص. ٢٣٠-٢٦٤ : « The medieval tradition of a Greek mathematical lemma », *Zeitschrift für Geschichte der Arabisch-Islamischen WissenschaftenK 3(1986).*

القضيّة ١٩- ليكن معنا مضلّعان متساويا الأضلاع، هما P_1 ذو n_1 ضلعاً وكل ضلع له طوله c_1، وَ P_2 ذو n_2 ضلعاً وكل ضلع له طوله c_2، بحيث يكون $c_1n_1 = n_2c_2$ مع $n_2 > n_1$، فيكون $c_1 > c_2$.

يستخدم ابن هود، للمقارنة بين الدائرتين المحاطتين O_2 وَ O_1، دائرة، J، مساوية لـِ O_1. نأخذ على خطّ التماسّ لهذه الدائرة، في النقطة P، النقطة Q بحيث يكون $PQ = \frac{1}{2}c_1$؛ ونخرِج من هذه النقطة خطّ التماس الآخر QZ. يكون معنا، عندئذ، $\widehat{PJZ} = \frac{2\pi}{n_1}$ وَ $\widehat{PJQ} = \frac{\pi}{n_1}$،

[انظر الشكل ص. ٧٧٦]، لأنَّ الشكل $PJQZ$ مساوٍ للشكل المرفق بالرأس A للمضلّع P_1. ونأخذ على خطّ التماسّ، في النقطة P، النقطة S ونخرِج منها خطّ التماس الآخر SX، بحيث يكون الشكل $PSXJ$ مشابهاً للشكل المرفق بالرأس D للمضلّع P_2. يكفي أن نأخذ $\widehat{PJS} = \frac{\pi}{n_2}$؛ وهذا ما يُحدِّد النقطة S. ويكون معنا: $n_1 < n_2 \Leftarrow \widehat{PJS} < \widehat{PJQ} \Leftarrow PQ > PS$.

يحقّق المثلّث SJQ فرضيّات القضيّة ١٦، فيكون $\frac{PQ}{PS} < \frac{\widehat{QJP}}{\widehat{SJP}}$، فنحصل على $\frac{2PQ}{2PS} < \frac{\widehat{PZ}}{\widehat{PX}}$.

فيكون معنا $\frac{PQ+QZ}{\widehat{PZ}} < \frac{PS+SX}{\widehat{PX}}$، فنحصل على $\frac{c_1}{\widehat{PZ}} < \frac{c_2}{\widehat{PX}}$.

وإذا كان p_2 وَ p_1 محيطَي الدائرتين المحاطتين O_2 وَ O_1 على التوالي، يكون معنا: $\frac{n_1c_1}{p_1} < \frac{n_2c_2}{p_2}$؛ ولكنَّ $n_1c_1 = n_2c_2$، فنحصل على $p_1 < p_2$. يكون معنا، إذاً كان r_2 وَ r_1 نصفيْ قطريْ الدائرتين المحاطتين O_2 وَ O_1 على التوالي، $r_1 < r_2$.

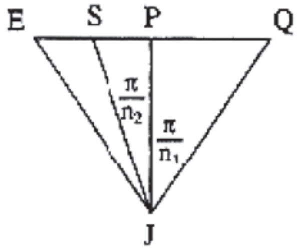
ولكنَّ ضعفيْ مساحة P_1 يساوي $n_1c_1r_1$، كما أنَّ ضعفيْ مساحة P_2 يساوي $n_2c_2r_2$، فتكون مساحة P_2 أعظم من مساحة P_1.

المقارنة مع القضيّة ٢ من مؤلّف ابن الهيثم في الإحاطات المتساوية للأشكال المستوية وللأشكال المجسَّمة

يتعلّق الأمر، بالرغم من الاختلاف في الصيغة، بنفس القضيّة[انظر أيضاً الخازن، القضيّة ٩].

ويستخدِم البرهانان نفس الخواصّ، دون أن يكونا متطابقين.

نـُرفِق بكلّ ضلع، في كلّ مضلّع من المضلّعين P_1 وَ P_2، مثلّثاً متساوي الساقين مقسوماً إلى مثلّثين قائميْ الزاوية. تساوي زاوية الرأس في كلِّ مثلّث من المثلّثات المتساوية الساقين $\frac{2\pi}{n_1}$ وَ $\frac{2\pi}{n_2}$ على التوالي؛ وتكون زاوية الرأس في كلِّ مثلّث قائم الزاوية مرفـَق بكلّ مثلّث متساوي الساقين، حادّة ومساوية لـِ $\frac{\pi}{n_1}$ وَ $\frac{\pi}{n_2}$ على التوالي.



يتناول المؤلّفان شكلاً متضمِّناً لمثلّث قائم الزاوية مساوياً لمثلّث مرفـَق بالمضلّع P_1 ولمثلّث قائم الزاوية مساوٍ لمثلّث مرفـَق بالمضلّع P_2، ويكون لهذين المثلّثين ضلع مشترَكٌ وهو ضلع للزاويتين القائمتين وعامدُ P_1. يكون معنا:

$$EP = PQ = \frac{1}{2}c_1 \text{ ؛ } a_1 = JP \text{ وَ } \frac{SP}{PJ} = \frac{\frac{1}{2}c_1}{a_2}.$$

يُدخِل ابن هود الدائرتين المحاطتين بالمضلّعين، وهما ذواتا نصفيْ القطرين r_2 وَ r_1 اللذين هما أيضاً عامدا المضلّعين a_2 وَ a_1 ، على التوالي. ويُطبِّق القضيّة ١٦ فيبيِّن أنَّ $a_1 < a_2$.

ويُبيِّن ابن الهيثم مستخدِماً – كما فعل ابن هود في القضيّة ١٦– المتباينات بين مساحتي المثلّثين ومساحتي القطـاعين، أنَّ $\frac{EP}{PS} > \frac{c_1}{c_2}$ [انظر المجلّد الثاني، ص. ٣٩٧]، فيحصل على $\frac{1}{2}c_2 > PS$. ولكنَّ $a_1 = JP$، فيكون العامد a_2، المُرفَق بِـ c_2 محقّقاً للمتباينة $a_1 < a_2$، فنحصل على النتيجة.

إنَّ من الواضح أنَّ ابن هود يتناول ثانية برهان ابن الهيثم مع بعض التغييرات البسيطة. ويبقى البرهان الذي قدَّمه ابن الهيثم أكثر رشاقة. أمّا إدخال الدائرتين المحاطتين، عند ابن هود، فليس ضروريّاً.

وقد نتساءل لماذا يتوقّف ابن هود، هنا، دون أن يتناول المضلّعين، ذوَيْ الإحاطتين المتساويتين، اللذين لهما عددٌ من الأضلاع يتعاظم شيئاً فشيئاً، حتـّى يتمّ التوصّل إلى النتيجة الخاصّة بالقرص، كما فعل ابن الهيثم والخازن اللذان استوحى منهما كما رأينا. فهل قام بهذه الدراسة في أحد الأقسام المفقودة من كتابه؟ أم هل وجد أنَّ هذه المسألة، التي تتطلّب السعي إلى النهاية، ذات مستوى غير ملائم لكتابه الجامع؟ لو كان الأمر كذلك لاستخرج، من نظريّة السطوح ذات الإحاطات المتساوية المعروضة جيِّداً في كتاب ابن الهيثم، هذه المقدّمة التي يعالجها كخاصّة للهندسة الابتدائية، وفقاً للأسلوب الذي حرَّر به كتابه الجامع.

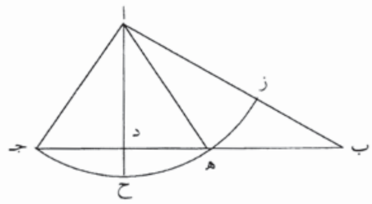
٧-٣-٣ نص من «كتاب الاستكمال»
حول مسألة السطوح ذات الإحاطات المتساوية

ل – ٧ – ظ
ج – ٥٠ – و

– يو – كل مثلث مختلف الضلعين يخرج من زاويته التي يحيط بها الضلعان المختلفان عمود إلى قاعدته، فإن نسبة القسم الأطول من قاعدته إلى القسم الأصغر أعظمُ من نسبة قسم الزاوية – التي يخرج منها العمود – التي يوترها القسم الأطول إلى القسم الآخر منها.

مثال ذلك: مثلث ا ب ج، ضلع ا ب أطول من ضلع ا ج، وخرج من زاوية آ منه على ضلع ب ج عمود ا د.

فأقول: إن نسبة ب د إلى د ج أعظم من نسبة زاوية ب ا د إلى زاوية د ا ج.



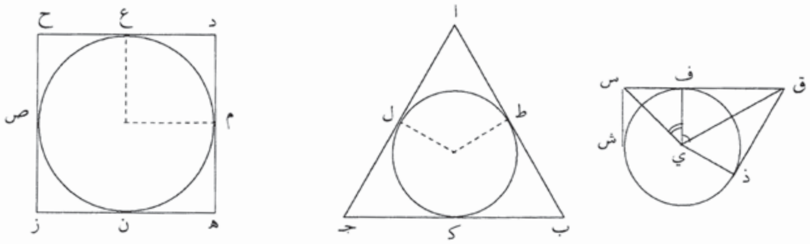
برهان ذلك: أنا نتخذ نقطة آ مركزًا، ونديرببعد ا ج الأقصر دائرة ج ح ه ز تقطع خط ب د على نقطة ه وا ب على ز، ويلقاها عمود ا د على نقطة ح. فلأن مثلث ا ب ه أعظم من قطاع ا ز ه، تكون نسبته إليه أعظم من نسبة مثلث ا ه د إلى قطاع ا ه ح، ⟨لأن مثلث ا ه د أصغر من قطاع ا ه ح⟩. فإذا بدلنا، كانت نسبة مثلث ا ب ه إلى مثلث ا ه د أعظم من نسبة قطاع ا ز ه إلى قطاع ا ه ح. وإذا ركبنا، كانت نسبة مثلث ا ب د إلى مثلث ا ه د أعظم من نسبة قطاع ا ز ح إلى قطاع ا ه ح. ونسبة مثلث ا ب د إلى مثلث / ا ه د كنسبة خط ب د إلى خط د ه المساوي لخط د ج، ونسبة قطاع ا ز ح إلى قطاع ا ه ح كنسبة زاوية ز ا ح إلى زاوية ه ا د المساوية لزاوية د ا ج؛ فنسبة خط ب د إلى خط د ج أعظم من نسبة زاوية ب ا د إلى زاوية / د ا ج؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن. ل – ٨ – و ج – ٥٠ – ظ

1 يو: يه [ج] – 4 ا ب ج: الف با جيم، ولن نشير إليها فيما بعد [ج] – 7 تقطع: يقطع [ج].

– يط – كل شكلين كثيري الزوايا متساويي الإحاطة والأضلاع في دائرة، فإن الذي عدد أضلاعه أكثر تكون الدائرة المعمولة فيه أعظمَ من الدائرة المعمولة في الذي عدد أضلاعه أقلّ. ل – ١٠ – و

مثال ذلك: شكلا ا ب جـ ود هـ ز ح، ⟨و⟩الخط المحيط بشكل ا ب جـ مساوٍ للخط المحيط بشكل د هـ ز ح، وكل واحد منها متساوي الأضلاع في دائرة، وشكل د هـ ز ح عدد أضلاعه أكثر.

فأقول: إن الدائرة المعمولة فيه أعظم من المعمولة في سطح ا ب جـ.



برهان ذلك: أنا نعمل في شكل ا ب جـ دائرةً يحيط بها، وهي دائرة ط ك ل، وفي شكل د هـ ز ح دائرة م ن ص ع يحيط بها، ونعمل دائرة ذ ف ش مساوية لدائرة ط ك ل، ونخرج من نقطة ف خطًا مماسًا لها وهو ق ف س، ونجعل خط ف ق مساويًا لخط ا ط وخطَّ ف س نصف ضلع الشكل المعمول عليها الشبيه بشكل د هـ ز ح، ونخرج من نقطتي ق س خطي ق ذ س ش مماسين للدائرة؛ وليكن مركزها نقطة ي. ونصل ف ي ي ق / ي س. فلأن شكل د ز أكثر أضلاعًا، يكون خط ف س أقصر من خط ف ق، فنسبة خط ق ف إلى خط ف س أعظم من نسبة زاوية ق ي ف إلى زاوية ف ي س، التي هي كنسبة نصف قوس ذ ف إلى نصف قوس ف ش. فنسبة خطي ذ ق ق ف إلى قوس ذ ف أعظم من نسبة خطي ف س س ش إلى قوس ف ش، ونسبة خطي ذ ق ق ف إلى قوس ذ ف كنسبة خطي ط ا ا ل إلى قوس ط ل. ونسبة خطي ف س س ش إلى قوس ف ش كنسبة خطي م د د ع إلى قوس م ع. فنسبة ط ا ا ل إلى قوس ط ل، التي هي كنسبة محيط شكل ا ب جـ إلى محيط دائرة ط ك ل، أعظم من نسبة م د د ع إلى قوس م ع، التي هي كنسبة محيط شكل د هـ ز ح إلى محيط دائرة ل – ١٠ – ظ

8 ذ ف ش: ذ ف س [ل] – 11 مركزها: مركزهما [ل] / ي: ب [ل] – 14 ف ش: ف س [ل] / ذ ق: ذ ف [ل] – 15 ف ش: ف س [ل] / ذ ق: ذ ف [ل] – 18 د هـ ز ح: د هـ ز ح ط [ل].

م ن ص ع. لكن محيط ا ب جـ فرض مساويًا لمحيط شكل د هـ ز ح، فدائرة ط ك ل أصغر من دائرة م ن ص ع، فنصف قطر دائرة ط ك ل أقصر من نصف قطر دائرة م ن ص ع. فمسطحه في نصف / محيط ا ب جـ المساوي لسطح ا ب جـ أصغرُ من مسطح نصف قطر دائرة م ص في (ل - ١١ - و) نصف محيط د هـ ز ح الذي هو مساوٍ لسطح د هـ ز ح.

وهنالك استبان أنه: إذا ماسّ دائرة خطان محيطان بزاوية، وماسّها أيضًا خطان أقصر منها يحيطان بزاوية، فإن نسبة الأطولين إلى القوس التي فصلا من الدائرة أعظم من نسبة الأصغرين إلى القوس التي فصلا منها؛ وذلك ما أردنا أن نبيّن.

تعليقات إضافيّة

[٩٢، ٥][1]: نجد على هامش المخطوطات [أ] ، [ب]، [د]، [هـ]، [ش]، [ص]، التعليق التالي:

يظهر من هذا الشكل ومن الشكل الأوّل أنَّ الدائرة أوسع الأشكال التي تساوي إحاطتها لإحاطتها، إذ عند ذلك لا تحيط الدائرة بالشكل ولا الشكل بها، وإلا يلزم عدم تساوي إحاطتها، فيقع بالضرورة بعض الشكل خارج الدائرة – كزواياه مثلاً – وبعضه داخلها وهو طائفة من أضلاعه وتكون مساحة الدائرة التي هي من ضرب نصف القطر في نصف المحيط أكثر من مساحة الشكل التي هي من ضرب عموده في نصف أضلاعه، لتساوي النصفين وكون نصف القطر أعظم من العمود. وهذا البرهان شامل للأشكال المتساوية الأضلاع والزوايا مثلثة كانت أو مربَّعة أو غير ذلك دون مختلفتها. وهذا يظهر أنَّ الكرة أوسع الأجرام المساوي إحاطتها لإحاطة الكرة لأنَّ نصف قطر الكرة المساوي إحاطته لإحاطة المجسَّم يكون أعظم من نصف قطر الكرة المعمولة في المجسَّم، الذي هو في سطح ثلث المجسَّم بكثير. وتتمة البرهان ظاهرة.

1 يظهر: ويظهر [هـ] / الأشكال: لاشكال [ص] – 2 لأحاطتها: ناقصة [هـ] / لا (الأولى): التي [أ] / وإلا: ولا [أ] – 3 وبعضه: وبعضها [هـ] – 4 في: ناقصة [ا، ب، ش] – 5 التي: الذي [هـ] – 6 البرهان: البرهان [هـ] / شامل: ناقصة [هـ] – 7 مختلفتها: مختلفها [ا، ب، د، ش] مختلفها [ص] مختلفة الأضلاع والزوايا [هـ] – 8 أعظم: عظم [أ] – 9 بكثير: تكسيره [ا، ب، د، ش، ص، هـ] / وتتمة: وتمّ [أ].

صيغة إيرن الإسكندراني وفقاً لثابت بن قرّة

[٩٩، ١٤] يتساءل ثابت بن قرَّة، وهو مساعد بني موسى، بعد أن يُذكّر بالصيغة، عن أصلها. ويبدو، على أثر قراءة هذا النصّ، أن هذه الصيغة كانت منتشرة بكثرة، وأنَّ الريّاضيّين لم ينسبوها بصراحة إلى إيرن. وهذا، فيما يلي ما كتبه ثابت بن قرَّة:

"باب يعمُّ أصناف المثلّثات كلّها، وقد نسبه قوم إلى الهند وذكر آخرون أنـّه للروم. صفته: أن تجمع أضلاع المثلّث، ثلاثتها، ويؤخّذ نصف ذلك، وتؤخذ زيادة ذلك النصف على كل واحد من الأضلاع، ثمَّ يُضرَب ذلك النصف في الزيادة على ضلع من أضلاع المثلّث، ويُضرَب ما اجتمع في الزيادة على ضلع ثانٍ منها،

[1] الرقم الأوَّل هو رقم الصفحة، بينما يدلُّ الرقم الثاني على رقم السطر.

وما اجتمع في الزيادة على الضلع الثالث منها، وما اجتمع أخِذ جذره، وهو مساحة ذلك المثلّث. "
(الورقة ٤١ظ)

تعليق أبي جرّادة حول "في قطوع الأسطوانة" لثابت بن قرّة

[٣٩٤، ٨] تتطابق هذه النتيجة مع نتيجة القضيّة ٤ الخاصّة بالأسطوانة القائمة؛ وهي مذكورة هنا كمحصَّلة للنتيجة الخاصّة بالأسطوانة المائلة. وإذا كانت الأسطوانة قائمة، يكون كلُّ مستوٍ يمرُّ بالمحور GH مستويَ تناظر للأسطوانة ويلعب دور GHI، مستوي التناظر الوحيد للأسطوانة المائلة.

[٤٠١، ١٩] يدرس ابن جرّادة، في هذا التحرير الثاني للنصّ، الحالة التي تُستبدَل فيها الدائرة ABC بقطع ناقص، بحيث يكون AB قطراً له ويكون DC خطَّ ترتيب. ويفرِض، في هذه الحالة، أنَّ الخطَّ EH موازٍ للخطّ DC ؛ ويتابع البرهان ليُثبت أنَّ المثلّثين FHE وَ GDC متشابهان ويُبرهن أنَّ $\frac{AH.HB}{EH^2}=\frac{AD.DB}{DC^2}$ وَ $\frac{EH^2}{HF^2}=\frac{DC^2}{DG^2}$، فيحصل على $\frac{AH.HB}{HF^2}=\frac{AD.DB}{DC^2}$.

يكتب ابن أبي جرَّادة، عندئذ: " وهذا برهان يشمل الدائرة أيضاً وهو أحسن. فنجعل الدعوى عامَّة ونبرهن بهذا؛ ولو لم يكن د مركزاً لتمَّ البرهان ".

لقد عمَّم ابن جرّادة، إذاً، القضيّة ١٠ دارساً الإسقاط الأسطوانيّ للقطع الناقص. وهذا ما سمح له، في القضيّة ١١، بدراسة القطع المستوي لأسطوانة ذات قاعدة على شكل قطع ناقص. هذا هو نصّه [مخطوطة القاهرة، دار الكتب ٤١، الورقة ٤٠و]:

"قلت وكذلك يتبيَّن هذا المطلوب لو كان ا ب جـ قطعاً ناقصاً" بهذا البرهان: بأن نُخرِج د جـ على الترتيب ونجعل هـ ح موازياً له، ثمَّ نسلك البرهان حتّى يتبيَّن تشابه مثلّثي و ح هـ ز د جـ. وتكون نسبة ضرب ا ح في ح ب إلى مربَّع هـ ح كنسبة ضرب ا د في د ب إلى مربَّع د جـ ، كما يتبيَّن في ٢١، ١خ[٢]. ونسبة مربَّع هـ ح إلى ح و كنسبة مربَّع د جـ إلى مربَّع د ز، فبالمساواة: نسبة ضرب ا ح في ح ب إلى

[٢] ٢١/ ١ خ: يعني الشكل الواحد والعشرين من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

مربَّع ح و كنسبة ضرب ا د في د ب إلى مربَّع د ز؛ فيتمُّ المطلوب. وهذا برهان يشمل الدائرة أيضاً وهو أحسن. فنجعل الدعوى عامَّة ونبرهن بهذا؛ ولو لم يكن د مركزاً لتمَّ البرهان.

[٤٠١، ٢٠] يورد ابن أبي جرَّادة هذه القضيّة بمقدّمة[انظر الورقة ٤٠ظ-٤٠ظ] ليُثبت أنَّ: $SN//GM$ ، $MN = SG$ وَ $\widehat{GSN} = \frac{\pi}{2} \Leftarrow \widehat{MNS} = \frac{\pi}{2}$.

"مقدّمة: خطّا ا ب جـ د متوازيان، وقد وقع بينهما خطّا ا جـ ب د المستقيمان، فكانا متساويين، فأقول: إنَّ زاويتيْ ا وَ ب إما متساويتان أو مجموعهما كقائمتين.

برهان ذلك: إن كان ا جـ ب د متلاقيين، فليلتقيا على هـ، فمثلّث ا ب هـ خرج فيه جـ د على موازاة قاعدة ا ب. فنسبة هـ ا إلى ا جـ كنسبة هـ ب إلى ب د؛ وَ ا جـ ب د متساويان، فخطّا هـ ا هـ ب متساويان، فزاويتا ا وَ ب متساويتان.

وإن كان ا جـ ب د متوازيين، فزاويتا ا وَ ب كقائمتين. "

[٤٠٤، ٦] يلفت ابن أبي جرّادة النظر إلى أنـَّه ليس من الضروريّ أن نرسم IR، إذ يكون معنا بالفعل $MQ = ML$، فنحصل على $\widehat{MQL} = \widehat{MLQ}$ ، فنحصل على $\widehat{ILE} = \widehat{DEL}$. يمرُّ بالخطّ IL، إذاً، مستوٍ مخالف الوضع بالنسبة إلى مستوي القاعدة. وتبقى نهاية البرهان دون تغيير.[الورقة ٤١و-٤١ظ].

"قلت لا تحتاج إلى إخراج ط ر، بل تقول إنَّ الفصل المشترَك للدائرتين، الخطّ منه بين تقاطعها وبين نقطة م، نصف قطر لكلّ واحدة منهما، فهو يساوي م ق،نصف قطر الدائرة الموازية للقاعدتين، ويساوي م ل، نصف قطر دائرة ط كـ ل. فخطّا م ل م ق، متساويان، فزاويتا م ق ل م ل ق متساويتان، وزاوية د هـ ل كزاوية م ق ل، فزاويتا د هـ ل ط ل هـ متساويتان، فخطّ ط ل. يمرّ به قطع مخالف. وتمامه كما مرَّ."

[٤٠٥، ١٥] يبرهن ابن أبي جرّادة مقدّمة في البداية بثلاث طرائق.[الورقتان ٤١ظ -٤٢و].

١) إذا كان لقطعين ناقصين القطران الأعظمان AP وَ CQ والقطران الأصغران DH وَ BV والمركزان K وَ O، حسب الترتيب، وإذا كان $\frac{CQ}{DH}=\frac{PA}{BV}$، يكون القطعان الناقصان، عندئذ، متشابهين.

يكون لدينا: $\frac{DH}{CQ}=\frac{BV}{PA} \Leftrightarrow \frac{BK}{KA}=\frac{DO}{OC} \Leftarrow \frac{BK^2}{KA.KP}=\frac{DO^2}{QO.OC}$ ؛ ويكون معنا، إذاً، وفقاً للقضيّة ٢١ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $\frac{\text{الضلع القائم لـِ } PA}{PA}=\frac{\text{الضلع القائم لـِ } QC}{QC}$.

والبرهان يبقى بدون تغيير إذا كان AP، BV، CQ وَ DH أقطاراً مزاوجة بدلاً من أن تكون محاور للقطعين.

٢) لتكن A، B، C وَ D محاور قطعين ناقصين مع $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$، وليكن E وَ G الضلعين القائمين الخاصّين بـِ A وَ C حسب الترتيب. يكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $E.B = A^2$ وَ $G.D = C^2$. فيكون $\frac{E}{B}=\frac{E.B}{B^2}=\frac{A^2}{B^2}$ وَ $\frac{G}{D}=\frac{G.D}{D^2}=\frac{C^2}{D^2}$، فنحصل على $\frac{E}{B}=\frac{C}{D}$، فيكون القطعان الناقصان متشابهين، وفقاً للقضيّة ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

٣) يكون معنا، وفقاً للقضيّة ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، $\frac{E}{A}=\frac{A}{B}$ وَ $\frac{G}{C}=\frac{C}{D}$، كما يكون معنا وفقاً للفرضيّات $\frac{A}{B}=\frac{C}{D}$، فيكون $\frac{E}{A}=\frac{G}{D}$؛ فيكون القطعان الناقصان متشابهين، وفقاً للقضيّة ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

[٤٠٥، ١٦] إذا كان المستوي القاطع، المعنيّ بالأمر، موازياً لمستويَيْ القاعدة أو مخالف الوضع بالنسبة إلى مستويَيْ القاعدة، يكون قطع كل أسطوانة دائرة مساوية لدائرة القاعدة. وهذا ما يُذكّر به ثابت بن قرّة خلال البرهان.

[٤٠٧، ١١] يرجع ابن أبي جرّادة في جملته "وأطول أقطار كلّ قطع هو سهمه الأطول، وأقصر أقطاره هو سهمه الأقصر"، بحقّ إلى القضيّة ١١ من المقالة الخامسة من كتاب "المخروطات".

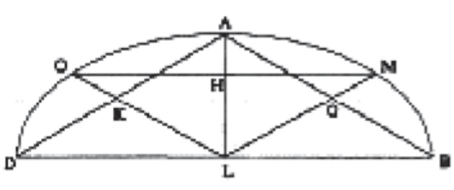
[٤٠٧، ١٦] يبيِّن أبلونيوس، في القضيّة ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات"، أنَّ كلّ قطعين ناقصين ذويْ المحورين $2a$ وَ $2a'$ والضلعين القائمين الخاصّين بهما c وَ c' بحيث يكون $\frac{2a}{c}=\frac{2a'}{c'}$، متشابهين؛ والعكس بالعكس.

وإذا كان $2b$ وَ $2b'$ المحورين الآخرين للقطعين الناقصين، يكون معنا، وفقاً للتعريف الثالث من التعريفات الثانية لأبلونيوس، $2a.c = 4b^2$ ، فنحصل على $\frac{2a}{c}=\frac{a^2}{b^2}$، وعلى $\frac{2a'}{c'}=\frac{a'^2}{b'^2}$، فيكون $\frac{a}{b}=\frac{a'}{b'} \Leftrightarrow \frac{2a}{c}=\frac{2a'}{c'}$.

هذا هو الشرط الذي يستخدمه ثابت بن قرّة. وهو لا يُدخِل الضلعين القائمين c وَ c' في برهانه، ولكنّه يستخدم، في القضيّة ٢٤، الخاصّة $\frac{2a}{c}=\frac{2a'}{c'}$.

[٤٠٨، ٩] يُورد ابن أبي جرّادة، خلال تحريره لنصّ ثابت بن قرّة وقبل القضيّة ١٤، مقدّمتين [الورقة ٤٣و].

المقدّمة الأولى: ليكن BAD نصفَ قطع ناقص مركزه L ومحوره الأعظم BD ورأسه A، ونصفا قطريه LO وَ LM اللذان يمرّان بـِ K وَ G وسطي الوترين AD وَ AB؛ فيكون OM عموديّاً على AL.

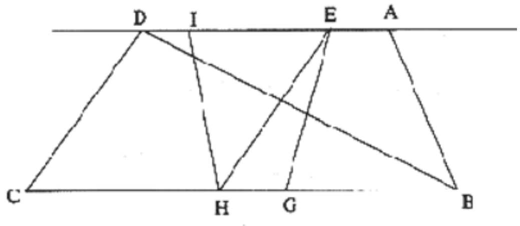


يكون البرهان مباشراً، إذا استخدمنا القضيّة الثامنة من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات".

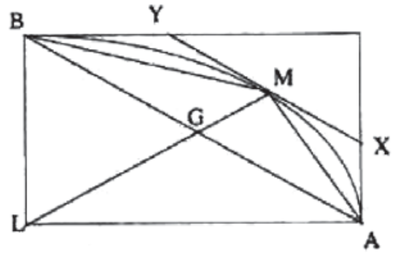
المقدّمة الثانية: إذا كان $ABCD$ وَ $EGHI$ رباعيّيْ أضلاع محدَّبين وموجودين بين خطّين متوازيين AD وَ BC، بحيث يكون EI على AD وَ HG على BC، يكون عندئذ:

$$\frac{(EGHI)\text{مساحة}}{(ABCD)\text{مساحة}} = \frac{EI + GH}{AD + BC}.$$

والبرهان مباشر، أيضاً، إذ إنَّ $ABCD$ وَ $EGHI$ مربَّعان منحرفان أو متوازيا أضلاعٍ لهما نفس الارتفاع.



[٤٠٩، ٦] يأخذ ثابت بن قرّة، لأجل مضاعفة عدد الأضلاع، الأقطارَ التي تمرُّ بأوساط الأوتار. وهكذا يقطع LG القطعَ الناقصَ على النقطة M، حيث تكون G وسط AB. وخطّ التماسّ في M موازٍ لِـ AB، وهو يقطع خطَّيْ التماسّ في A وَ B على النقطتين X وَ Y، بحيث يكون $AB > XY$؛ فيكون $AXYB$ مربَّعاً منحرفاً. ويكون معنا



مساحة المثلّث $(AMB) > \frac{1}{2}$. مساحة المنحرف $(ABYX)$،

فنحصل على مساحة المثلّث $(AMB) > \frac{1}{2}$.مساحة القطعة $(ABYX)$.

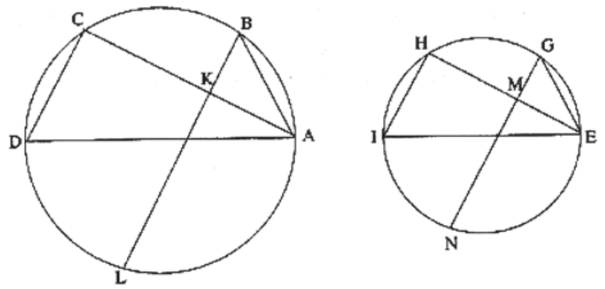
ونستخرِج من ذلك أنَّ الفرقُ بين مساحة القطعة (AB) ومساحة المثلّث (AMB) أصغرُ من مساحة القطعة (AB)؛ وتبقى هذه النتيجة صالحة إذا كانت القوسَ $\widehat{AB}$ قوساً من قطع ناقص أو قوساً من دائرة على السواء.

[٤١٢، ٢] إذا كان $2a$ وَ $2b$ محوري القطعين الناقصين، وإذا كان r نصف قطر الدائرة التي تعادل مساحتها مساحة القطع الناقص، يكون معنا $ab = r^2$، فنحصل على $\frac{r}{b}=\frac{a}{r}$ وَ $\frac{r^2}{b^2}=\frac{a^2}{r^2}$. فتكون مساحة القطع الناقص مساوية للمتوسِّط المتناسب بين مساحة دائرته العظمى ومساحة دائرته الصغرى.

[٤١٢، ٣] يُقدِّم ابن أبي جرّادة، أيضاً، مقدّمتين قبل القضيّة ١٥[الورقة ٤٤ظ].

المقدّمة الأولى – تكون القوسان AC وَ EH من دائرتين ذواتيْ القطرين d_1 وَ d_2 حسب الترتيب، متشابهتين إذا وفقط إذا كان: $\frac{AC}{d_1}=\frac{EH}{d_2}$.

المقدّمة الثانية – ليكن AC وَ EH وترين ذويْ وسطين K وَ M حسب الترتيب من دائرتين مختلفتين، وليكن BL وَ GN القطرين اللذين يمرّان بـِ K وَ M حسب الترتيب، فتكون القوسان $\widehat{AC}$ وَ $\widehat{EH}$ متشابهتين إذا وفقط إذا كان: $\frac{KB}{KL}=\frac{MG}{MN}$.

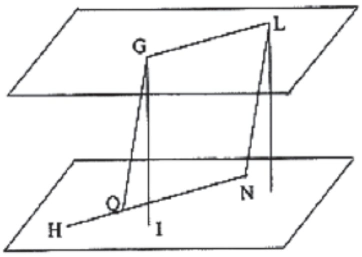


ونحصل على البراهين مباشرة إذا استخدمنا تعريف الأقواس المتشابهة التي تكون الزوايا القابلة لها متساوية والعكس بالعكس.

[٤٢٤، ٢] يُعرِّف أبلونيوس في القضيّة ١٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات"، القطر المزاوِج لقطر معلوم. ويصبح القطران المزاوَجان محوريْ القطع، إذا كانا متعامدين، وفقاً للتعريف الثامن من التعريفات الأولى لأبلونيوس.

[٤٢٧، ٢٠] يورِد ابن أبي جرّادة مقدّمة قبل القضيّة ٢٠، ويورد بعد هذه القضيّة برهاناً يختلف عن برهان ثابت بن قرَّة [الورقة٤٩و].

مقدّمة: ليكن P_1 وَ P_2 مستوييْن متوازييْن ولتكن G نقطة في P_1 ولتكن I نقطة في P_2، بحيث يكون GI عموديّاً على P_2. وليكن GL خطّاً في P_1 وَ HQ خطّاً في P_2 بحيث يكون $GL // HQ$ وَ تكون النقطة I خارج HQ. فتكون النقطة N، مسقط L العموديّ على P_2، خارج الخطّ HQ. يقام البرهان باستخدام استدلال بالخُلْف.



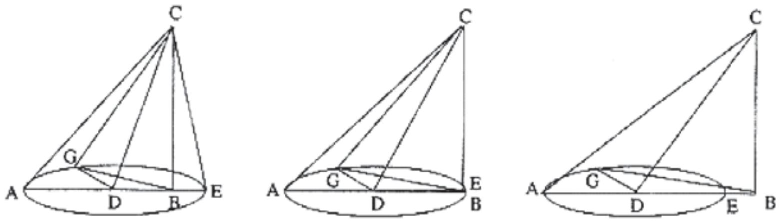
يقدِّم ابن جرّادة البرهان المُبسَّط التالي للقضيّة ٢٠[الورقة ٥٠ظ].

١) المعلومات لدينا هي: المستوي P، النقطة C الموجودة خارج P، والنقاط B، D وَ A الموجودة في المستوي P بحيث يكون الخطُّ BC عموديّاً على P وتكون النقاط B، D وَ A متسامتة وفقاً لهذا الترتيب. يكون معنا، عندئذ، لكلّ نقطة G في المستوي P:

$$\widehat{BDC} < \widehat{GDC} < \widehat{ADC}.$$

تقطع الدائرة (D, DG) الخطّ BDعلى النقطتين A وَ E. ويكون معنا $BE < BG < BA$، في الحالات الثلاث للشكل، وفقاً للقضيّتين السابعة والثامنة من المقالة الثالثة من كتاب

"الأصول" لأقليدس. فنستخرِج من ذلك $CB \leq CE < CG < CA$. ولكنَّ لدينا في المثلّثات CDA، CDG وَ CDE: $DE = DG = DA$؛ فنحصل على $\widehat{BDC} < \widehat{GDC} < \widehat{ADC}$.



٢) إذا كان متوازيا الأضلاع $ABCD$ وَ $IGEH$ يُحقّقان $AB = CD = EG = HI$ وَ $\widehat{IEG} \leq \widehat{EIH} \leq \widehat{ADC}$ و $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{ADC}$، على أن تكون مساحتاهما متساويتين، تكون، عندئذ، القطعة المستقيمة AC أعظم القطع التي يكون أحد طرفيها على AB ويكون طرفها الآخر على CD، أو أن يكون أحد طرفيها على EG ويكون طرفها الآخر على IH.

يكون ارتفاعا متوازيي الأضلاع متساويين، لأنَّ القاعدتان متساويتان، والمساحتان متساويتان أيضاً. يكون معنا: $\frac{\pi}{2} \leq \widehat{ADC} \Leftarrow BAD < ADC$ وَ $BD < AC \Leftarrow$ وَ $AD < AC$،

$\widehat{IEG} \leq \widehat{EIH} \Leftarrow \frac{\pi}{2} \leq \widehat{EIH}$ وَ $\widehat{EHI} < \widehat{EIH} \Leftarrow IG \leq EH$ وَ $EI < EH$

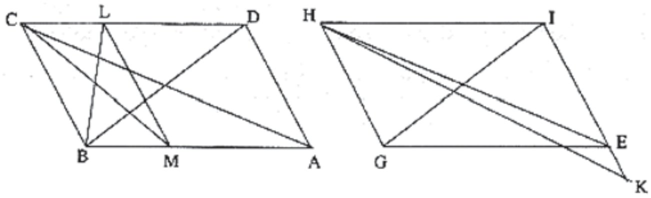
وليكن $L \in [CD]$ وَ $M \in [BA]$ بحيث يكون $AD \parallel ML$، فيكون معنا $BL < CM$ و $CM < AC$ لأنَّ $\frac{\pi}{2} < \widehat{AMC}$.

يُمكن أن نُرفق بكلّ قطعة مستقيمة يكون أحد طرفيها على AB ويكون طرفها الآخر على CD، قطعة مساوية لها، بحيث يكون أحد طرفيها على B أو C ويكون طرفها الآخر على CD أو على AB. فتكون AC أعظم هذه القطع. وكذلك تكون EH أعظم قطعة بين كلّ القطع التي يكون أحد طرفيها على EG ويكون طرفها الآخر على IH.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $\widehat{EIH} \leq \widehat{ADC} \Leftarrow EI \leq AD$.

إذا كان $\widehat{EIH} = \widehat{ADC}$، يكون معنا $EI = AD$، فنحصل على $EH = AC$.

إذا كان $\widehat{ADC} > \widehat{EIH} \geq \frac{\pi}{2}$، يكون معنا $EI < AD$. لتكن K بحيث يكون $AD = IK$ ، فيكون $HK < AC$. ولكنَّ $EH < HK$، لأنَّ $EI < IK$، فيكون $EH < AC$. فتكون AC أعظم القطع التي تناولناها في صيغة المقدّمة.



٣) لنرجع الآن إلى شكل ابن ثابت، الشكل ٢٠. يكون معنا، $\widehat{GHE} > \frac{\pi}{2}$، وفقاً للفرضيّات، ويكون $\widehat{GHD} < \widehat{GHF} < \widehat{GHE}$ ، مهما كانت النقطة F على الدائرة ذات القطر DE.

يكون AE، قطر متوازي الأضلاع $ABED$، أعظم من القطر LF في متوازي الأضلاع $LCFM$. فتكون AE أعظم قطعة تصل بين نقطة من خطّ مولّد إلى نقطة من الخطّ المولّد المقابل.

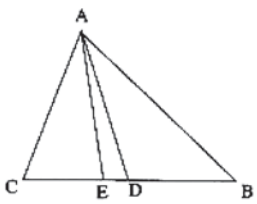
ويتمّ البرهان، بعد ذلك، بطريقة مماثلة لبرهان ثابت بن قرّة.

[٤٣٤، ٧] يعرِض ابن أبي جرّادة [الورقة ٥٢ظ]، ضمن تحريره لنصّ ثابت بن قرّة، طريقة أخرى تستخدِم الدائرة ذات نفس المساحة لكلٍّ من القطعين الناقصين، فيحصل على، $\frac{S_m}{S_M} = \frac{a_m b_m}{a_M b_M} = \frac{b_m}{a_M}$، لأنَّ $a_m = b_M =$ نصف قطر قاعدة.

[٤٣٦، ١٨] يعرِض ابن أبي جرّادة، قبل القضيّة ٢٥، المقدّمة التالية [الورقة ٥٣و]:

ليكن معنا ثلاث نقاط متسامتة A، B و C؛ إذا كانت D وسط BC وإذا كان $AC < AB$، يكون، عندئذ، $\widehat{DAB} < \widehat{DAC}$.

إنَّ لدينا بالفعل، $AC < AB$ وَ $DC = DB$ $DC = DB \Leftarrow \frac{AC}{AB} > \frac{DC}{DB}$.



ليكن E ∋ $[CB]$ بحيث يكون $\frac{EC}{EB}=\frac{AC}{AB}$، فيكون $EC < DC$، ولكنَّ الخطّ AE منصِّف الزاوية $\widehat{BAC}$، فيكون $\widehat{EAB}=\widehat{EAC}$، فنستخرِج من ذلك النتيجة.

[٤٥٠، ١٨] يعرِض ابن أبي جرّادة، قبل القضيّة ٣١، المقدّمتين التاليتين [الورقتان ٥٧ظ - ٥٨و].

المقدّمة الأولى: لتكن AB قطعة من خطٍّ مستقيم، ولتكن c وَ d مساحتين بحيث يكون $d > c$، ولتكن e وَ g قطعتين بحيث يكون $g > e$؛ توجدَ، عندئذ، نقطة، N، على AB بحيث يكون $\frac{NB}{AB}<\frac{e}{g}$ وَ $\frac{NB^2}{AB^2}<\frac{c}{d}$.

المقدّمة الثانية: إذا كان $d < c$ وَ $g < e$ ، توجدَ، عندئذ، نقطة، N، على الامتداد المستقيم لِـ AB بحيث يكون $\frac{NB}{AB}>\frac{e}{g}$ وَ $\frac{NB^2}{AB^2}>\frac{c}{d}$.

يستند برهان ابن أبي جرّادة على وجود نقطة L بحيث يكون $\frac{LB}{AB}=\frac{h}{k}$، على أن تكون h وَ k قطعتين مُحدَّدتين بِـ $c = h^2$ وَ $d = k^2$.

ولكنَّه لا يُتمُّ استدلاله الذي قد يتطلّب إدخال نقطة G بحيث يكون $\frac{GA}{AB}=\frac{e}{g}$.

ولنلاحظ أنَّ نقاطَ ابن أبي جرّادة، A، B و N موافقة لنقاط ثابت بن قرَّة، A، K و M؛ كما أنَّ النقطتين L و G موافقة للنقطتين M_1 و M_2 اللتين ستدخلان في التعليق التالي.

[٤٥٢، ٣] تحديد النقطة M في هذا القسم من البرهان.

يكون معنا $P > H$، فنحصل على $\frac{H}{P}<1$، ويكون معنا أيضاً $\frac{S-\frac{1}{2}I}{S}<1$. وإذا حقّقت النقطتان M_1 و M_2 المعادلتين $\frac{KM_1}{KA}=\frac{H}{P}$ وَ $\frac{KM_2^2}{KA^2}=\frac{S-\frac{1}{2}I}{S}$، يمكن أن يكون معنا حالتان:

$KM_2 \leq KM_1 < KA$ ؛ نأخذ في هذه الحالة M بين M_1 وَ A

$KM_1 \leq KM_2 < KA$ ؛ نأخذ في هذه الحالة M بين M_2 وَ A.

وتبقى الطريقة نفسها صالحة في الحالة التي يكون فيها $\frac{H}{P} > 1$ وَ $\frac{S - \frac{1}{2}I}{S} > 1$، والتي سترد لاحقاً.

[٤٥٧، ١٥] يعرِض ابن أبي جرّادة، قبل القضيّة ٣٢، المقدّمة التالية [الورقة ٦٠ و- ظ]، كما يورد بعدها ثلاث ملاحظات[الورقة ٦٢ و-ظ].

مقدّمة – لتكن a، b ، c و d أعداداً موجِبة بحيث يكون $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ وَ $c > a$، فيكون $d > b$.

يوجَد، بالفعل، عدد e بحيث يكون $\frac{a}{e} = \frac{c}{d}$، فيكون $d > e$ وَ $\frac{a}{e} > \frac{a}{b}$، وهذا ما يؤدّي إلى $b < e$، وبالتالي إلى $d > b$.

ملاحظات

١) يُمكِن أن نبَرهن بطريقة الخُلْف أنـَّه من غير الممكن أن تكون لدينا المتباينة $\frac{1}{2}p(IM + KN) < S$.

٢) يُمكِن أن نبُرهن بطريقة الخُلْف أنـّه إذا كانت LS أعظم قطعة لمولّد بين القطعين SMN وَ SL_cL_d، فلا يمكن أن يكون لهذين القطعين نقطة مشتركة غير النقطة S.

٣) نبُرهن، أيضاً بطريقة الخُلْف، أنَّ المضلّعَ، الذي نحصل عليه في المستوي MNS بواسطة الإسقاط الأسطوانيّ للمضلّع المحيط بالقطع IKL، والذي ليس له نقطة مشترَكة مع القطع XYZ، محاطٌ، هو نفسه، بالقطع MNS وليس له نقطة مشترَكة مع القطع $O'L_aL_b$.

أنظر، لأجل الرموز، النصّ والشكلَ b للقضيّة ٣٢.

[٤٦٨، ٢] يلاحظ ابن أبي جرّادة أنَّ لدينا نفس النتيجة إذا كان القطعان دائرتين مخالفتين في الوضع بالنسبة إلى القاعدة [الورقة ٦٣ ظ].

ليست هذه الملاحظة ضروريّة لأنَّ النتيجة التي برهنها ثابت بن قرّة صالحة مهما كان القطعان المعنيّان بالأمر.

[٤٦٩، ٢٠] يُقدِّم ابن أبي جرّادة، هنا، نفس الملاحظة السابقة. وهي، هنا أيضاً، ليست ضروريّة لنفس السبب الذي أشرنا إليه[الورقة ٦٤ و].

[٤٧١، ٢] يُبيِّن ابن أبي جرّادة[الورقة ٦٤ و]، أنَّ أصغرَ القطوع، في حالة الأسطوانة القائمة ذات القاعدة الدائريّة، هي دائرة القاعدة، ويؤكّد دون تعليل أنَّ أعظم قطع ناقص هو ذلك الذي يكون قطره الأعظم مطابقاً لقطر المستطيل الذي يمرُّ مستويه بالمحور.

يُمكن بالفعل، أن نبيِّن، كما جرى في القضيَّة ٢٠، أنَّ مثل هذا القطر هو أعظم قطعة يكون طرفاها على خطّين مولّدين متقابلين. فإذا أرفقنا، بكلِّ مستوٍ يمرُّ بالمحور، المستويين العموديين عليه واللذين يمرّان بالقطرين، يكون تقاطعُ كلٍّ منهما مع الأسطوانة مطابقاً للقطع الناقص الأعظم.

والخلاصة هي أنَّ كلَّ مستوٍ عموديٍّ على المحور، في حالة الأسطوانة القائمة أو الأسطوانة المائلة، يعطي قطعاً أصغريّاً؛ ولكن بينما يكون القطع الأعظميّ في الأسطوانة المائلة وحيداً، فإنَّ عدد القطوع الأعظميّة في الأسطوانة المائلة غير منتهٍ.

[٥٩٠، الحاشية ٤] إنَّ سيرة حياة القوهي التي يوردها البيهقي، كاتب السِّيَر، هي غير واقعيّة، بشكل مثير للدهشة. فما هو أصل هذه الأسطورة؟ وهل نشأت بسبب الميل العلمي والتقَنيّ للقوهي وبسبب اهتمامه بصناعة الأدوات العلميّة؟ ليس من المستبَعَد أن تكون هذه السِّمة في شخصيَّته قد شجَّعت ملفّقي الأكاذيب. لقد رأينا جوانب من هذه السمة عند مساهمته في بناء المرصد والأدوات اللازمة له، وفي عمله في البركار التامّ وفي بعض جوانب عمله في ميكانيكا السكون. ويظهر هذا الميل أيضاً من خلال المعلومات التي نقلها أبو حيّان التوحيديّ. ونرى ذلك أيضاً في محاولاته لدحض المبادئ الأرسطيّة للحركة. فهو، لأجل

رفض النظريّة القائلة بعدم إمكان حركة غير منتهية في زمن منتهٍ، يعمل جهازاً لاستخدام صفات الضوء. وهو يقوم، لأجل رفض الفكرة التي مفادها ضرورة وجود السكون بين حركتين مضادّتين، ببناء تركيب آليّ؛ وهذا ما يُخبرنا به خليفته الطبيب البغداديّ ابن بطلان [انظر:

Joseph Schacht et Max Meyerhof, The Medico-Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and ibn Ridwan of Cairo,

(القاهرة ١٩٣٧)، ص. ٦٥ للنصّ العربيّ ، ص. ١٠٠-١٠١ للنصّ الإنكليزيّ]؛ انظر أيضاً مقالنا: "القوهي ضدّ أرسطو: حول الحركة":

« *Al-Qūhī versus Aristotle : On motion », Arabic Sciences and Philosophy 9.1, 1999,*

ص. ٧-٢٤.

ملاحظات حول النصوص

أ- "كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكريّة لبني موسى"

١- ص. ٨٧، س. ٥: لقد اقتضب الطوسي نصَّ المقدّمة، فحذف منها ما بدا له بعيداً عن الرياضيّات، أي كلَّ القسم التاريخيّ والنظريّ الذي شرح فيه بنو موسى الأسباب التي دفعتهم إلى تأليف كتابهم. وهذا القسم المحذوف يتضمَّن ما يقرب من ثلاثين سطراً في ترجمة جيرارد دي كريمون اللاتينيّة التي حقّقها م. كلاجيت. انظر السطور ٤-٣٤، ص. ٢٣٨-٢٤٠. وهذه هي، فيما يلي، ترجمة هذا النصّ اللاتينيّ:

"لقد تحقّقنا من ضرورة ذاتيّة لوجود علم مساحة الأشكال المستوية ومقادير الأجسام، كما رأينا ضرورة أن تُدرَس بعض المسائل، من بين مسائل أخرى، علميّاً وفقاً لهذا النوع من العلم الذي لم يصل أحدٌ إلى معرفته، كما يبدو، حتّى أيّامنا هذه. ولقد سَبَقَنا بعض القدماء في البحث في عدد من هذه المسائل التي قمنا بالبحث فيها، ولكنَّ أبحاثهم لم تصل إلينا؛ بينما لم يفهم هذه الأبحاث أحدٌ ممّن رجعنا إليهم. وقد يكون بعض هؤلاء العلماء السابقين قد تمكّنوا من هذا العلم ووضعوا فيه كُتُباً، ولكنَّ عِلمهم هذا لم ينتشر جيِّداً بين أهل زماننا. وهكذا ارتأينا، لهذه الأسباب، أن نؤلّف كتاباً نُبيِّنُ فيه ما كان ضروريّاً لهذا العلم من ضمن ما اكتشفناه فيه. وإذا تناولنا مسألة من المسائل التي درسها القدماء والتي انتشر علمهم فيها خلال زماننا هذا والتي قد نكون بحاجة إليها لبرهنة قضيّة من القضايا التي نعرضها في هذا الكتاب، فإنّنا سنكتفي بالإشارة إليها ولن يكون من الضروريّ أن نعرضها في كتابنا هذا لأنَّ عِلمها منتشر، وذلك على سبيل الاختصار. ولكن إذا تناولنا مسألة، وضعها القدماء من بين المسائل التي لم تكن مشهورة ولا معروفة، وكنّا بحاجة إلي عرضها في كتابنا، سنعرضها في كتابنا وسننسبها إلى مؤلّفها. وسيكون ضروريّاً، بشكل بديهيّ وفقاً لما سنعرضه حول تركيب هذا الكتاب، لمن يريد أن يقرأ هذا الكتاب وأن يفهمه أن يكون مطّلِعاً على كتب الهندسة المعروفة بين الناس في زماننا هذا.

الخاصّة المشتركة بين السطوح هي أنَّ لكلّ سطح طولاً وعرضاً. ولكنَّ خاصّة الشكل المجسَّم هي أن يكون له طول وعرض وارتفاع. والطول والعرض والارتفاع هي المقادير التي تُحدِّد عِظَمَ أيِّ جسم.

٢- ص. ٨٧، س. ٦: قد تكون هناك قفزة من سطر إلى سطر بسبب تشابه الكلمات، أي قد يجب أن نقرأ "... وهو ما امتدَّ على استقامة في الجهتين جميعاً< وما امتدَّ على استقامة في الجهتين جميعاً> فإنّه لا يكون...". وقد يكون هذا التحرير مختصَراً ولكنّه مُلتبِسٌ، حيث يكون الضمير في "فإنّه" راجعاً إلى "ما".

٣ـ ص. ٨٨، س. ١: نقرأ في الترجمة اللاتينيّة، بعد الجملة الأولى في هذا السطر ما معناه: "فقد تبيّن إذاً ما الطول وما العرض وما السِّمك"، وهذا ما يدلّ على أنَّ الطوسي قد اختصر هذه الفقرة.

٤ـ ص. ٨٨، س. ١ـ٣: يوجد في الترجمة اللاتينية، بعد الجملة "وهذه...المجسَّم" جملة، قد يكون الطوسي قد أضافها على هذه الفقرة، مفادها أنَّه ليس هناك حاجة لمقدار رابع لتحديد المجسَّم.

٥ـ ص. ٨٨، س. ١١: يوجد في الترجمة اللاتينية، بعد "...باقياً"، فقرة لا توجَد في العربيّة.

٦ـ ص. ٨٩، س. ١: كلمة "الأشكال" ناقصة في النصّ اللاتينيّ.

٧ـ ص. ٨٩، س. ٢: يُفترَض ضمنيّاً في هذا النصّ أنَّ المضلّعَ متساويُ الأضلاع. ولن نشير إلى هذا في بقيّة النصّ.

٨ـ ص. ٨٩، س. ٤: نجد في أوّل هذا السطر في الترجمة اللاتينية، وفقاً للطريقة الاعتياديّة للعرض الرياضيّ، ما ترجمته "مثال ذلك". ولقد حذف الطوسي كلّ العبارات المشابهة لهذه العبارة في كلِّ النصّ. ولن نشير إلى هذا في بقيّة النصّ.

٩ـ ص. ٨٩، س. ٤: نجد في الترجمة اللاتينيّة بعد عبارة هـ ح، ما ترجمته:

فأقول: إنَّ سطح خطّ هـ ح في نصف جميع أضلاع مضلّع ا ب جـ هو مساحة شكل ا ب جـ. برهان ذلك: أنَّ...

ولقد حذف الطوسي في تحريره هذا النوع من الجمل. ولن نـُشير إلى مثل هذا الحذف فيما بعد.

١٠ـ ص. ٨٩، س. ٦: يبدو أنَّ الجملة السابقة مُلخَّصة من جملة أكثر طولاً، فقد أورد جيرارد دي كريمون باللاتينية ما ترجمته:

"ونعلم من مثل ذلك أنَّ سطح هـ ح في نصف ا ب هو مساحة مثلّث ا هـ ب وأنَّ سطح هـ ح في نصف ا ز هو مساحة مثلّث ب هـ ز".

١١ـ ص. ٨٩، س. ٩: نجد في الترجمة اللاتينية كلمة "جسم" بدلاً من كلمة "كرة". كما نجد في نهاية هذه الفقرة ما معناه باللاتينيّة: "وهذا ما أردنا أن نـُبيِّن"، وهي العبارة التي حذفها الطوسي. ولن نـُشير إلى مثلها فيما بعد.

١٢ـ ص. ٩٠، س. ١ـ٣: المقصود هو أنَّ حجم المجسَّم يساوي مجموع أحجام تلك الأهرام. وهذه الفقرة التي تبدأ بكلمة "أقول" هي شرح طويل من شروح الطوسي.

١٣- ص. ٩٠، س. ٨: الجملة "وهو اقلّ...هـ ب جـ" غير موجودة في النصّ اللاتيني. ونلاحظ أيضاً أنَّ الأحرف المستخدَمة في الأشكال ضمن النصّ اللاتيني تختلف عن الأحرف المستخدَمة في النصّ العربي.

١٤- ص. ٩٠، س. ٩: نقرأ في النصّ اللاتيني ما معناه:

"وبمثله نـُبيِّن أنَّ سطح نصف قطر دائرة ا ب جـ في نصف جميع أضلاع ا جـ ب جـ ا ب أقلّ من مساحة دائرة ا ب جـ . فقد تبيَّن أنَّ سطح نصف قطر دائرة ا ب جـ في نصف جميع أضلاع المضلّع الذي تـُحيط به الدائرة أقلّ من مساحة الدائرة".

وإنَّ من المحتمل أنَّ الطوسي قد وجد هذه الفقرة طويلة جدّاً، فاختصرها بجملة واحدة، تاركاً الشرح على مسؤولية القارئ.

١٥- ص. ٩١، س. ٨: يكون هذا باستخدام القضيّة ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس.

١٦- ص. ٩١، س. ٩: نقرأ في النصّ اللاتينيّ ما معناه:

" لكنَّ خطَّ هـ د ز مساوٍ لخطّ ح و، وقد تبيَّن أنّه يُمكن أن يعمل في دائرة ا ب جـ مضلّع ويكون جميع أضلاعه أطول من خطّ ح و، وذلك ما أردنا أن نـُبيِّن".

١٧- ص. ٩٢، س. ٣: انظر الشرح الرياضيّ.

١٨- ص. ٩٢، س. ٤: نجد في النصّ اللاتينيّ ما معناه "وهذه صورة الشكل"، وهذا ما حذفه الطوسي.

١٩- ص. ٩٢، س. ٥-٦: هذا شرح قام به الطوسي.

٢٠- ص. ٩٣، س. ٣: وفقاً للقضيّة ٣.

٢١- ص. ٩٣، س. ٣-٤: وفقاً للقضيّة ٢.

٢٢- ص. ٩٣، س. ٧: نقرأ في النصّ اللاتينيّ، بعد كلمة "دائرة"، ما معناه:

"فيكون خطّ هـ جـ في خطّ ح و مساوياً لدائرة ا ب جـ "

٢٣- ص. ٩٤، س. ١: نجد في النصّ اللاتينيّ، بعد عبارة "أقول..." التي حذفها الطوسي، ما معناه: "فإن لم تكن النسبتان واحدة، فـ...".

٢٤- ص. ٩٤، س. ٤: نجد في النصّ اللاتيني ما معناه "ولأنَّ خطّ ح ك مساوٍ لنصف خطّ د هـ وخطّ ح ط أصغر من نصف خطّ د ز هـ يكون سطح ك ط أصغر من مساحة دائرة د هـ ز ".

٢٥- ص. ٩٤، س. ٩: وفقاً للقضيّة الثانية من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس.

٢٦ـ ص. ٩٥، س. ٧: نورد فيما يلي بعبارات مماثلة المسار الذي اتّبِع في القسم الأوّل:

ليكن $\overline{\text{بد}}$ خطّ تماسّ الدائرة في النقطة $\overline{\text{ب}}$؛ إذا انطلقنا من الزاوية المركزية $\widehat{\text{بجد}} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2}$ وأخذنا بالتتابع نصفها وربعها وثمنها ونصف الثمن، يكون معنا: $\widehat{\text{بجح}} = \frac{1}{48} \times \frac{\pi}{2} = \frac{4}{192} \times \frac{\pi}{2}$ ؛ فيكون $\overline{\text{بح}}$ نصف ضلع المضلّع المتساوي الأضلاع المحيط بالدائرة والذي له ٩٦ ضلعاً: $\overline{\text{بح}} = \frac{1}{2}\text{ض}_{96}$. يكون معنا في المثلّث $\overline{\text{جبد}}$، $\overline{\text{بد}} = \frac{1}{2}\overline{\text{جد}}$ وَ $\overline{\text{جب}}^2 = \frac{3}{4}\overline{\text{جد}}^2$. ولكن إذا كانت $\overline{\text{هـ}}$ نقطة تقاطع منصِّف الزاوية $\widehat{\text{بجد}}$ مع خطّ التماسّ، يمكن أن نكتب:

$$(١) \qquad \frac{\overline{\text{هد}}}{\overline{\text{هب}}} = \frac{\overline{\text{جد}}}{\overline{\text{جب}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{\text{هد}}+\overline{\text{هب}}}{\overline{\text{هب}}} = \frac{\overline{\text{جد}}+\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{جب}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{\text{جد}}+\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{بد}}} = \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{هب}}}.$$

لنضع $\overline{\text{جد}} = 306$، $\overline{\text{بد}} = 153$، فنحصل على $\overline{\text{جب}} = 265{,}0037736 > 265$، فيكون 265 عدداً يقارب جيِّداً $\overline{\text{جب}}$. يكون من ذلك: $\overline{\text{جب}} + \overline{\text{جد}} > 571$ ، فيكون، وفقاً لِـ (١)، $\frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{هب}}} > \frac{571}{153}$.

يقوم بنو موسى، بعد ذلك، بمقابلة القِطع المستقيمة مع الأعداد:

إذا كان $\overline{\text{هب}} = 153u$، حيث تكون u وحدة الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\overline{\text{هب}} = 153$)، يكون عندئذ: $\overline{\text{جب}} > 571$ وَ $\overline{\text{جب}}^2 + \overline{\text{هب}}^2 = \overline{\text{جهـ}}^2$ ، فنحصل على $\overline{\text{جهـ}} > 591+\frac{1}{8}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلّث $\overline{\text{جهب}}$:

$(٢) \quad \frac{\overline{\text{جهـ}}+\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{هب}}} = \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{وب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{وب}}} > \frac{1162+\frac{1}{8}}{153}$ ؛ فإذا كان $\overline{\text{وب}} = 153u$، حيث تكون u وحدة الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\overline{\text{وب}} = 153$)، يكون عندئذ: $\overline{\text{جب}} > 1162 + \frac{1}{8}$ و $\overline{\text{جو}} > 1172 + \frac{1}{8}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلّث $\overline{\text{جوب}}$:

$(٣) \quad \frac{\overline{\text{جو}}+\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{وب}}} = \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{زب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{زب}}} > \frac{2234+\frac{1}{4}}{153}$ ؛ فإذا كان $\overline{\text{زب}} = 153$، يكون عندئذ:

$\overline{\text{جب}} > 2234 + \frac{1}{4}$ و $\overline{\text{جز}} > 2339 + \frac{1}{4}$.

وكذلك يكون معنا في المثلّث $\overline{\text{جزب}}$: $\frac{\overline{\text{جز}}+\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{زب}}} = \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{حب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{جب}}}{\overline{\text{حب}}} > \frac{4673+\frac{1}{2}}{153}$.

ولكنَّ القطعة $\overline{\text{جب}}$ هي نصف القطر وَ $\overline{\text{زب}}$ هي نصف أحد الأضلاع ض_{96}. وهكذا تحقّق نسبة محيط المضلّع م_{96} إلى القطر $\overline{\text{ق}}$، المتباينة $\frac{\text{م}96}{\text{ق}} < \frac{96\times153}{4673+\frac{1}{2}} < 3 + \frac{1}{7}$.

٢٦ـ ص. ٩٦، س. ١٢: نجد في الترجمة اللاتينية ١٣٥٠٥٣٤ وربع.

٢٧ـ ص. ٩٦، س. ١٣: نجد في الترجمة اللاتينية ١٣٧٣٩٤٣ وربع.

٢٨ـ ص. ٩٧، س. ٧: إنَّ من البديهيّ أنَّ النصّ العربيّ الوارد هنا غير كامل. ولكنَّ ورد على هذا الشكل في كل المخطوطات، دون استثناء؛ لذلك تركناه كما هو. ويبدو لنا أن الجملة الناقصة التي تجب إضافتها هي:

"...عند ١٤٦٨٨ < فقدر جميع أضلاع ذي ستة وتسعين ضلعاً يحيط بالدائرة عند القطر أقلُّ من قدر ١٤٦٨٨ عند ٤٦٧٣ ونصف >، وهو...".

فنحصل على: $0.3181818181 = \frac{7}{22} < 0.3181848526 = \frac{4673+\frac{1}{2}}{14688}$.

٢٩ـ ص. ٩٧، س. ٨: لنتناول ثانية برهان القسم الثاني. لتكن النقطة $\overline{\text{ط}}$ على الدائرة بحيث يكون $\widehat{\text{باط}} = \frac{1}{3} \times \frac{\pi}{2}$ ؛ وإذا أخذنا بالتتابع نصف وربع وثمن ونصف الثمن لهذه الزاوية، يكون معنا النقاط : $\overline{\text{ي}}$، $\overline{\text{ك}}$، $\overline{\text{ل}}$، $\overline{\text{م}}$ ، ويكون الوتر $\overline{\text{بم}}$ ضلع المضلّع، المحاط بالدائرة، وذي ٩٦ ضلعاً. يقطع $\overline{\text{اط}}$ منصِّفُ الزاوية $\widehat{\text{باط}}$، الخطّ $\overline{\text{طب}}$ على النقطة $\overline{\text{ع}}$؛ يكون معنا:

$$\frac{\overline{\text{اي}}}{\overline{\text{يب}}} = \frac{\overline{\text{اط}}}{\overline{\text{عط}}} = \frac{\overline{\text{اب}}+\overline{\text{اط}}}{\overline{\text{بط}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{\text{اب}}+\overline{\text{اط}}}{\overline{\text{اط}}} = \frac{\overline{\text{عب}}+\overline{\text{عط}}}{\overline{\text{عط}}} \Leftrightarrow \frac{\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{اط}}} = \frac{\overline{\text{عب}}}{\overline{\text{عط}}}$$ ،

لأنَّ المثلّثين $\overline{\text{عطا}}$ وَ $\overline{\text{عيب}}$ متشابهان.

لنضع $\overline{\text{اب}} = 1560$ وَ $\overline{\text{بط}} = 780$، فنستخرج $1351 < \overline{\text{اط}}$، وهذا العدد يقترب جيِّداً من $\overline{\text{اط}}$. ويكون معنا:

(١) $$\frac{2911}{780} > \frac{\overline{\text{اي}}}{\overline{\text{يب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{اي}}}{\overline{\text{يب}}} = \frac{\overline{\text{اب}}+\overline{\text{اط}}}{\overline{\text{بط}}}$$.

إذا وضعنا $\overline{\text{يب}} = 780u$، حيث تكون u وحدة الطول (التي يكون معنا، وفقاً لها، $\overline{\text{يب}} = 780$)، يكون عندئذ: $\overline{\text{اي}} > 2911$ وَ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اي}}^2 + \overline{\text{يب}}^2 > 9082321$ وَ $\overline{\text{اب}} > 3013+\frac{3}{4}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلّث $\overline{\text{ايب}}$ ، حيث يكون $\overline{\text{اك}}$ منصِّف الزاوية:

(٢) $$\frac{1823}{240} = \frac{5924+\frac{3}{4}}{780} > \frac{\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{اك}}}{\overline{\text{كب}}} = \frac{\overline{\text{اي}}+\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{يب}}}$$؛

(حيث يتمّ الاختزال بضرب الطرفين بـِ $\frac{4}{13}$).

ونحصل هنا على $\overline{\text{كب}} = 240$، فيكون:

$\overline{\text{اك}} > 1823$ وَ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{اك}}^2 + \overline{\text{كب}}^2 > 3380929$ وَ $\overline{\text{اب}} > 1838+\frac{9}{11}$.

ويكون معنا بطريقة مماثلة في المثلّث $\overline{\text{اكب}}$ ، حيث يكون $\overline{\text{ال}}$ منصِّف الزاوية:

$$\frac{1007}{66} = \frac{3661+\frac{9}{11}}{240} > \frac{\overline{\text{ال}}}{\overline{\text{لب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{ال}}}{\overline{\text{لب}}} = \frac{\overline{\text{كا}}+\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{كب}}} \qquad (٣)$$

(حيث يتمّ الاختزال بضرب الطرفين بـِ $\frac{11}{40}$).

ونحصل هنا على $\overline{\text{لب}} = 66$، فيكون : $\overline{\text{ال}} < 1007$ وَ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{ال}}^2 + \overline{\text{لب}}^2 < 10118405$ وَ $\overline{\text{اب}} < 1009+\frac{1}{6}$.

ويكون معنا أيضاً بطريقة مماثلة في المثلّث $\overline{\text{لاب}}$ ، حيث يكون $\overline{\text{ام}}$ منصِّف الزاوية:

$$\frac{12097}{396} = \frac{2016+\frac{1}{6}}{66} > \frac{\overline{\text{ام}}}{\overline{\text{مب}}} \Leftarrow \frac{\overline{\text{ام}}}{\overline{\text{مب}}} = \frac{\overline{\text{لا}}+\overline{\text{اب}}}{\overline{\text{لب}}} \qquad (٤)$$

ونحصل على $\overline{\text{مب}} = 66$، فيكون : $\overline{\text{ام}} < 2016 + \frac{1}{6}$ وَ $\overline{\text{اب}}^2 = \overline{\text{ام}}^2 + \overline{\text{مب}}^2 < 4069284$
ونحصل على $\overline{\text{اب}} < 2017+\frac{1}{4}$. ولكنَّ $\overline{\text{مب}}$ هو الضلع ضَ_{96}، فنحصل على المحيط:

$\text{مَ}_{96} = 96\times66 = 6336$؛ كما أنَّ $\overline{\text{اب}}$ هو $\bar{\text{ق}}$ قطر الدائرة؛ فنحصل على: $\frac{\text{مَ}_{96}}{\text{ق}} > \frac{6336}{2017+\frac{1}{4}} > 3 + \frac{10}{71}$.

إذا كان م محيط الدائرة، يكون معنا، إذاً، $\text{مَ}_{96} < \text{م} < \text{م}_{96}$، فنحصل على: $\frac{\text{مَ}_{96}}{\text{ق}} < \frac{\text{م}}{\text{ق}} < \frac{\text{م}_{96}}{\text{ق}}$،

فيكون: $3+\frac{1}{7} > \frac{\text{م}}{\text{ق}} > 3 + \frac{10}{71}$.

٣٠ـ ص. ٩٩، س. ١٦: انظر التعليق الإضافيّ الخاصّ بصيغة إيرن.

٣١ـ ص. ١٠٠، س. ٢ـ٣: لقد بُرهِنت هذه المتساويات، في الترجمة اللاتينية. ويبدو أنَّ الطوسي قد اعتبر برهان هذه المتساويات سهلاً إلى درجة بحيث لا يستحقُّ التوقّف عنده. غير أنَّ الطوسي قام بتحرير أكثر اقتضاباً، مع أنَّ الأفكار الواردة هنا وفي النصّ اللاتيني متطابقة؛ لنتناول هذا التحرير بسرعة:

ليكن P محيط المثلّث ABC ذي الأضلاع a، b وَ c؛ يمكن أن نبرهن أنَّ S، مساحة هذا المثلّث، تـُحقّق: $S^2 = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2}-a\right)\left(\frac{p}{2}-b\right)\left(\frac{p}{2}-c\right)$.

ليكن E مركز الدائرة المحاطة بالمثلّث؛ وليكن r نصف قطرها؛ ولتكن D، F وَ G نقاط تماسّ الدائرة مع أضلاع المثلّث AB، AC وَ BC. ولتكن H على AB وَ K على AC، بحيث يكون $BH = CG$ وَ $BG = CK$؛ فيكون $AK = AH = \frac{a+b+c}{2} = \frac{P}{2}$. يكون AE، منصِّف

الزاوية، محور التناظر للمثلّث HAK؛ لنأخذ العمود في H على AH والعمود في ILK على AK؛ يتقاطع هذان العمودان على نقطة I من القطعة AI ؛ويكون معنا $IH = IK$.

إذا كان $BL = BH = CG$ ، يكون عندئذ: $CL = GB = CK$ ، ويكون $BI^2 - CI^2 = BH^2 - CK^2 = BL^2 - CL^2$ ؛ فيكون IL متعامداً مع BC، ويكون معنا: $IL = IH = IK$ وَ $\widehat{HBI} = \widehat{IBL}$ ، وفقاً لتساوي المثلّثين القائما الزاوية HBI وَ IBL.

ويكون معنا، من جهة أخرى، $\widehat{HIL} = \widehat{DBG}$ ، فيكون $\widehat{EBD} = \widehat{BIH}$ ، ويكون المثلّثان القائما الزاوية BDI وَ BHI متشابهين. نستخرج من ذلك أنَّ $\frac{DE}{HI} = \frac{DE^2}{DE \times HI} = \frac{DE^2}{GB \times GC}$ ؛ ولكنَّ $\frac{DE}{HI} = \frac{AD}{AH}$ ، فنحصل على $DE^2 \times AH^2 = GB \times GC \times AD$ ، $DE^2 \times AH^2 = GB \times GC \times AD \times AH$.

ولكنَّ لدينا، وفقاً للقضيّة ١، $DE \times AH = \frac{1}{2}pr = S$ (لأنَّ $AH = \frac{1}{2}p$). ويكون معنا، من جهة أخرى: $GB = CK = \frac{1}{2}p - b$ ، $GC = BH = \frac{1}{2}p - c$ وَ $AD = \frac{1}{2}p - (BH + BD) = \frac{1}{2}p - a$ ،

فنحصل على: $S^2 = \frac{p}{2}\left(\frac{p}{2} - a\right)\left(\frac{p}{2} - b\right)\left(\frac{p}{2} - c\right)$.

أمّا طريقة بني موسى الأخرى، فهي ترجع إلى ما يلي:

$$\frac{ED}{DB} = \frac{BH}{HI} \Rightarrow \frac{ED}{HI} = \frac{ED}{DB} \times \frac{DB}{HI} = \frac{ED^2}{DB \times BH} = \frac{ED^2}{BG \times CG}$$

ولكنَّ $\frac{ED}{HI} = \frac{AD}{AH}$ ، فيكون $\frac{AD}{AH} = \frac{ED^2}{BG \times CG}$ ؛ ثمَّ ننهي البرهان كما جرى سابقاً.

انظر أيضاً التعليق الإضافيّ الخاصّ بصيغة إيرن.

٣٢ـ ص. ١٠٢، س. ٦: المثلّث المقصود هو المثلّث ابجـ.

٣٣ـ ص. ١٠٣، س. ٦: وذلك أنَّ هذه الخطوط، إذا كانت في سطح واحد، فإنَّ النقاط الأربع ب، جـ، د، هـ، تكون في سطح واحد، وهذا ما يتناقض مع الفرضيّات. يمكن أن تكون ثلاثة خطوط في سطح واحد، زب، زجـ و زد، على سبيل المثال، إذا كانت النقطة ز ضمن السطح بجـد ، ولكنَّ الخطَّ الرابع زهـ قد يقطع عندئذ هذا السطح.

٣٤ـ ص. ١٠٤، س. ٤: انظر لثاوذوسيوس، القضيتين الأولى والثانية من "الكرويات" التي ترجمها قسطا بن لوقا: "كتاب الأكر"، تحرير نصير الدين الطوسي، طبعة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية (حيدرأباد، ١٣٥٨ للهجرة)، ص. ٣ـ٤. لم ترد هذه الإشارة إلى ثاوذوسيوس، في الترجمة اللاتينية. فهل يكون الطوسي قد أضافها؟

٣٥- ص. ١٠٥، س. ٢- ٣: العبارة "وليماسّ الدائرة على نقط بَ جَ دَ" غير موجودة في النصّ اللاتيني.

٣٦- ص. ١٠٥، س. ٤- ٥: لقد ترجمت هذه الجملة إلى اللاتينية، بما معناه: "فالخطوط الواصلة بين نقط بَ زَ دَ والمركز أعمدة على خطوط حط طك كح لأنّها تماسّ الدائرة". وهكذا نرى أنَّ الطوسي قرأ نفس الفكرة ولكن من وجهة نظر أكثر عمومية.

٣٧- ص. ١٠٥، س. ٧: نجد في النصّ اللاتيني ما معناه "لأنَّ أحدهما يحيط بالآخر"؛ ولقد حذف الطوسي هذه العبارة لأنَّ هذا يظهر بالطبع من الشكل.

٣٨- ص. ١٠٥، س. ١٥-١٦: نجد في الترجمة اللاتينية ما معناه: "المجسَّم الذي قاعدته الشكل ذو الأضلاع والزوايا المتساوية الذي تحيط به دائرة مل ورأسه نقطة اَ "، وهذا ما يُبيِّن مرة أخرى طريقة الطوسي في التحرير التي تتّفق تماماً مع أسلوب الرياضيين في ذلك العصر.

٣٩- ص. ١٠٧، س. ٣: يقفز الطوسي هنا بسرعة إلى النتيجة خلافاً لما يقوم به بنو موسى وفقاً للنصّ اللاتيني.

٤٠- ص. ١٠٧، س. ٩: نجد بعد هذا في النصّ اللاتيني ما معناه: "فهما متساويان لأنَّ خطّ هـح يلقى خطّي بد وز وهو عمود عليهما".

٤١- ص. ١٠٨، س. ٣: يعلّل بنو موسى، وفقاً للنصّ اللاتينيّ، بما معناه: "لأنّا نُبيِّن أنَّ الخطّ الخارج من نقطة اَ إلى نقطة حَ يمرُّ بنقطة هَ ، فخطّ اح يخرج من رأس المخروط إلى مركز قاعدته عموداً على القاعدة.

٤٢- ص. ١٠٨، س. ٨: يبدو أنَّ الطوسي قد أهمل عدّة مراحل من الحساب الذي نجده في النصّ اللاتيني.

٤٣- ص. ١٠٩، س. ٤: لقد حذف الطوسي هنا صيغة القضيّة التي هي موجودة في النصّ اللاتيني، واكتفى بإيراد المثل الذي حذف من أوّله، كعادته، عبارة "مثال ذلك".

٤٤- ص. ١٠٩، س. ٤: نجد في النصّ اللاتينيّ تكملة لهذه الجملة بما معناه: "فهو ينصف قوس ابجـ "، وهذا ما هو بديهيّ. وهذا ما يؤكّد مرة أخرى أسلوب الطوسي في "التحرير".

٤٥- ص. ١١٠، س. ٤: يختلف تحرير الطوسي، ابتداءً من هنا وحتّى آخر هذه الفقرة، قليلاً عن النصّ اللاتينيّ.

٤٦- ص. ١١١، س. ٤: نجد في النصّ اللاتينيّ ما معناه: "فليقع أوّلاً في نصف الكرة مجسَّم مركّب من قطع مخروطات مستديرة كم كانت على الوجه الذي وصفنا".

٤٧- ص. ١١٢، س. ١: انظر القضيّة ١٢.

٤٨ـ ص. ١١٢، س. ٣: انظر القضيّة ١١.

٤٩ـ ص. ١١٢، س. ٩: لقد اختصر الطوسي كثيراً هذه الفقرة، كما يظهر من الترجمة اللاتينية.

٥٠ـ ص. ١١٣، س. ٦: المقصود هو السطح الجانبي.

٥١ـ ص. ١١٣، س. ٦: يترك الطوسي للقارئ، كعادته، استخلاص النتيجة. وذلك أنّنا نجد في النصّ اللاتيني ما معناه: "فقد تبيَّن أنَّ سطح مجسَّم ا ب جـ د أقلّ من ضعف سطح قاعدة <نصف> الكرة الذي يحيط به مجسّم ا ب جـ د ؛ وذلك ما أردنا أن نـُبيِّن. وهذه صورته.

٥٢ـ ص. ١١٤، س. ٥: كلمة "ضعف" ناقصة في النصّ العربي، ولكنَّها موجودة في النصّ اللاتيني.

٥٣ـ ص. ١١٤، س. ٤ـ٥: نحن نعتقد أنَّ الفقرة "فسطح...خلف" هي من كلام الطوسي. وترجمتها اللاتينية غامضة قليلاً.

٥٤ـ ص. ١١٥، س. ٢: أي يلزم وفقاً للقضية ١.

٥٥ـ ص. ١١٥، س. ٧: أي يلزم وفقاً للقضية ٢.

٥٦ـ ص. ١١٥، س. ٩: انظر الشرح الرياضيّ.

٥٧ـ ص. ١١٦، س. ٩: يكون ا ب قطر هذه الدائرة.

٥٨ـ ص. ١١٧، س. ٣: يقطع الخطّ ا هـ القوس ا جـ ب على النقطة ط التي ترسم القوس ا جـ ب.

٥٩ـ ص. ١١٧، س. ٤: يتعلّق الأمر بالخطّ المنحني الذي ترسمه نقطة التقاطع بين الدائرة ا ح هـ والأسطوانة.

٦٠ـ ص. ١١٧، س. ٥: انظر الحاشية السابقة.

٦١ـ ص. ١١٧، س. ٨ـ٩: الجملة: "ونخرج... ح ط " غير موجودة في النصّ اللاتيني.

٦٢ـ ص. ١١٧، س. ١١: وفقاً للقضية الثامنة من المقالة السادسة من "الأصول" (المثلّث جـ ل د).

٦٣ـ ص. ١١٧، س. ١١ـ١٢: وفقاً للقضية ٣٥ من المقالة الثالثة من "الأصول"(قوّة النقطة ك).

٦٤ـ ص. ١١٨، س. ١: لقد زيد المثلّث ا ك ل في النصّ اللاتيني.

٦٥ـ ص. ١٢٠، س. ١١: إنَّ المقطع التالي: من الخطّ ١٢ من الصفحة ١٢٠ حتّى الخطّ ٩ من الصفحة ١٢٢، ناقص في النصّ اللاتيني. وليس هناك ما يجعلنا نشكُّ بأصالة هذا النصّ أو ما يجعلنا ننسبه إلى الطوسي. ويشير بنو موسى لاحقاً في النصّ إلى هذه الطريقة الآلية.

٦٦ـ ص. ١٢١، س. ٨: انظر الشرح الرياضيّ.

ب ـ "كتاب في مساحة قطع المخروط الذي يُسمّى المكافئ"

١ـ ص. ١٩٧، س. ١٠: وفقاً للقضيّة ١٠.

٢ـ ص. ٢٠١، س. ١٧: المقصود ضمنياً هو أحد الأضعاف.

٣ـ ص. ٢٠١، س. ٢١: يكون معنا إذاً: $\overline{ل} = \overline{د} = \frac{\overline{هـ}}{2}$.

٤ـ ص. ٢٠٣، س. ١٨: لم ترد هذه الفرضية في صيغة القضيّة ولكنَّ هذا ممكن.

٥ـ ص. ٢٠٩، س. ١٥: وفقاً للقضيّة ١٣.

٦ـ ص. ٢١١، س. ٧ـ٨: لا يوجَد في المخطوطة سوى شكل واحد يجمع بين الحالتين، فهو غير صحيح.

٧ـ ص. ٢١٤، س. ٤ـ٥: هذا الشكل غير موجود في المخطوطة.

٨ـ ص. ٢١٦، س. ١٣: انظر القضية ١٦.

٩ـ ص. ٢١٧، س. ٢ـ٣: هذا الشكل غير موجود في المخطوطة.

١٠ـ ص. ٢١٨، س. ١: باستخدام القضية ١٧.

١١ـ ص. ٢٢٠: الشكل غير موجود في المخطوطة.

ج ـ " في مساحة المجسَّمات المكافئة" لثابت بن قرَّة

١ـ ص. ٢٦٩، س. ١٧: في الحالة التي يكون فيها القطر، المأخوذ كمحور للدوران، محوراً للقطع المكافئ.

٢ـ ص. ٢٧٠، س. ١: في الحالة التي يكون فيها القطر المأخوذ غير مطابق لمحور القطع.

٣ـ ص. ٢٧٠، س. ٣: انظر الملاحظة السابقة.

٤ـ ص. ٢٧١، س. ٩: المقصود هو مجموع المربَّعين.

٥ـ ص. ٢٧٣، س. ٢: وفقاً للقضيّة ٢.

٦ـ ص. ٢٧٤، س. ٤: الأعداد التي هي أكبر من الوحدة.

٧ـ ص. ٢٧٤، س. ١٠: انظر القضيتين ٣ وَ ٤.

٨ـ ص. ٢٧٤، س. ١٣: وفقاً للقضية ٣.

٩ـ ص. ٢٧٥، س. ١٣: وفقاً للقضية ٤.

١٠ـ ص. ٢٧٦، س. ٤: وفقاً للقضية ٥.

١١ـ ص. ٢٧٨، س. ٥: وفقاً للقضية ٦.

١٢ـ ص. ٢٧٨، س. ٨: وفقاً للقضية ٧.

١٣ـ ص. ٢٧٩، س. ٦: وفقاً للقضية ٦.

١٤ـ ص. ٢٨١، س. ١: وفقاً للقضية ٩.

١٥ـ ص. ٢٨١، س. ١٤ـ١٥: وفقاً للقضية ٨.

١٦ـ ص. ٢٨٢، س. ١٧ـ١٨: وفقاً للقضية ١٠.

١٧ـ ص. ٢٨٤، س. ١٧: وفقاً للفرضية: $\overline{\text{ا}} = \frac{\overline{\text{د}}}{2}$.

١٨ـ ص. ٢٨٥، س. ٧ إلى ص.٢٨٦، س.٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

١٩ـ ص. ٢٨٦، س. ١٣ ـ ١٩: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٢٠ـ ص. ٢٨٩، س. ٧ ـ ١٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٢١ـ ص. ٢٩١، س. ١٤: وفقاً للقضية ١٤.

٢٢ـ ص. ٢٩٢، س. ٥: انظر التعريف الوارد ص.٢٧٠.

٢٣ـ ص. ٢٩٢، س. ١٠: ويكون معنا أيضاً، وفقاً للتعريف الوارد ص.٢٧٠: $\overline{\text{حد}} // \overline{\text{زا}}$.

٢٤ـ ص. ٢٩٣، س. ١٥: هذا يفترض أنَّ $\overline{\text{حد}} // \overline{\text{زا}}$، وفقاً للتعريف الوارد ص.٢٧٠.

٢٥ـ ص. ٢٩٤، س. ٧: انظر التعريف الوارد ص.٢٧٠.

٢٦ـ ص. ٢٩٨، س. ١٥: "كهيئتها"، أي دون أن يتغيَّر شكلها.

٢٧ـ ص. ٢٩٨، س. ١٦: انظر التعريف الوارد ص.٢٧٠.

٢٨ـ ص. ٢٩٨، س. ١٦: "كهيئتها"، أي دون أن يتغيَّر شكلها.

٢٩ـ ص. ٣٠٧، س. ١١ـ١٢: وفقاً للقضية ٢٥.

٣٠ـ ص. ٣١٢، س. ١٩: وفقاً للقضية ٢٨.

٣١ـ ص. ٣١٦، س. ٦ ـ ٩: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٣٢ـ ص. ٣١٦، س. ١١ـ١٢: وفقاً للقضية ٣٠.

٣٣ـ ص. ٣١٧، س. ١ـ٢: لا يعطي المؤلّف أيّ تعليل؛ انظر الشرح الرياضيّ.

٣٤ـ ص. ٣١٨، س. ١٧: يعالج المؤلّف أوّلاً الحالة التي يكون فيها القطر $\overline{\text{ب جـ}}$ محوراً للقطع المكافئ.

٣٥ـ ص. ٣٢٠، س. ١٧ ـ ٢٠: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٣٦ـ ص. ٣٢٢، س. ١٣: لأنّ $\overline{\text{ب ك}} = \overline{\text{ب ط}}$، وفقاً لخاصّة خطّ تحت التماسّ، ويكون $\overline{\text{ا ح}} = \overline{\text{ب ط}}$.

٣٧ـ ص. ٣٢٢، س. ١٤: انظر الشرح الرياضيّ.

٣٨ـ ص. ٣٢٣، س. ٣: وفقاً للقضية ٢١.

٣٩ـ ص. ٣٢٤، س. ٣ـ١٣: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٤٠ـ ص. ٣٢٤، س. ١٠: انظر الشرح الرياضيّ.

٤١ـ ص. ٣٢٤، س. ١٥: وفقاً للقضيتين ١٩ و ٢٠.

٤٢ـ ص. ٣٢٤، س. ١٨: انظر الملاحظة ٤١.

٤٣ـ ص. ٣٢٤، س. ٢٢ـ٢٣: وفقاً للقضية ١٨.

٤٤ـ ص. ٣٢٥، س. ٣ـ٤: وفقاً للقضية ٢٩.

٤٥ـ ص. ٣٢٧، س. ١٩ـ٢٠: وفقاً للقضية ٣١.

٤٦ـ ص. ٣٣٠، س. ٢ـ٤: لقد أعدنا كتابة النصّ الموجود بين < >.

٤٧ـ ص. ٣٣١، س. ٢: الأعمدة على المحور.

٤٨ـ ص. ٣٣٣، س. ٢: المقصود هو المجسَّم الذي تكون قاعدته الدائرة ذات القطر $\overline{\text{ا جـ}}$، والذي يكون ارتفاعه $\overline{\text{ب د}}$.

٤٩ـ ص. ٣٣٣، س. ٢: يريد المؤلّف أن يقول إنَّ الأسطوانة والمجسَّمين $\overline{\text{و}}$ وَ $\overline{\text{هـ}}$ هم في تناسب مُتّصل.

٥٠ـ ص. ٣٣٣، س. ٢: يكون $\overline{\text{ع ن}}$ في حالات الشكل الثلاث خطّاً للترتيب.

٥١ـ ص. ٣٣٣، س. ٧: المقصود هو مربَّع النسبة.

٥٢ـ ص. ٣٣٥، س. ١: يجب تعليل كيف يُمكن أن نـُرفق بالنقطة عَ المضلّع $\overline{\text{ا ف ع ب د}}$ المحدَّد بالطريقة التي اتبُعت في القضيّة ٣٢؛ انظر الشرح الرياضيّ. ونحن لا نعلم إذا كان الأمر يتعلّق بنقص أو بسهو.

د ـ " في قطوع الأسطوانة وبسيطها" لثابت بن قرَّة

١ـ ص. ٣٨٧، س. ١١ـ١٢: إذا افترضنا أنَّ عَ وَ دَ في جهة واحدة بالنسبة إلى $\overline{\text{ح ز}}$؛ انظر القضية ٣٣ من المقالة الأولى من "الأصول" لأقليدس.

٢ـ ص. ٣٨٩، س. ١٣ـ١٤: القطعة $\overline{\text{ا د}}$ هي قسم من خطّ التقاطع.

٣ـ ص. ٣٨٩، س. ١٦: هذه النقطة هي النقطة اَ.

٤ـ ص. ٣٩٢، س. ١٣: هذا القطع $\overline{\text{جـ ك ل و}}$ غير ممثّل على الشكل الوارد في النصّ.

٥ـ ص. ٣٩٣، س. ١: هذا هو السطح المدروس في القضيّة ٥.

٦ـ ص. ٣٩٤، س. ٨: انظر التعليق الإضافيّ.

٧ـ ص. ٣٩٧، س. ٢: يتعلّق الأمر بقطر إحدى القاعدتين الدائريتين.

٨ـ ص. ٤٠١، س. ١٩: انظر التعليق الإضافيّ.

٩ـ ص. ٤٠١، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافيّ.

١٠ـ ص. ٤٠٢ : ليس هناك سوى شكل واحد في المخطوطة؛ ونحن نفصله إلى شكلين.

١١ـ ص. ٤٠٤، س. ٦: انظر التعليق الإضافيّ.

١٢ـ ص. ٤٠٥، س. ١٥: انظر التعليق الإضافيّ.

١٣ـ ص. ٤٠٥، س. ١٦ـ ١٧: انظر التعليق الإضافيّ.

١٤ـ ص. ٤٠٧، س. ١١ـ ١٢: انظر التعليق الإضافيّ.

١٥ـ ص. ٤٠٧، س. ١٦: انظر التعليق الإضافيّ.

١٦ـ ص. ٤٠٨، س. ١٠: انظر التعليق الإضافيّ.

١٧ـ ص. ٤٠٩، س. ٧: انظر التعليق الإضافيّ.

١٨ـ ص. ٤١٢، س. ١ـ٢: انظر التعليق الإضافيّ.

١٩ـ ص. ٤١٢، س. ٣: انظر التعليق الإضافيّ.

٢٠ـ ص. ٤١٣، س. ٢٠: $\frac{\overline{\text{وز}}}{\overline{\text{قر}}} = \frac{\overline{\text{وز}}}{\overline{\text{هب}}} = \frac{\overline{\text{وز}}.\overline{\text{هب}}}{\overline{\text{هب}}^{2}} = \frac{\overline{\text{كح}}^{2}}{\overline{\text{هب}}^{2}}$.

٢١ـ ص. ٤١٥، س. ١١ـ١٢: انظر الشرح الرياضيّ ص. ٣٥٨ـ٣٥٩.

٢٢ـ ص. ٤١٧، س. ٤: انظر الشرح الرياضيّ ص. ٣٥٩ـ٣٦٠.

٢٣ـ ص. ٤٢٤، س. ٢: انظر التعليق الإضافيّ.

٢٤ـ ص. ٤٢٧، س. ٤: هذه النقطة لا يمكن أن تكون سوى النقطة $\overline{\text{ط}}$ على $\overline{\text{اد}}$ أو النقطة $\overline{\text{ك}}$ على $\overline{\text{به}}$.

٢٥ـ ص. ٤٢٧، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافيّ.

٢٦ـ ص. ٤٢٩، س. ٣: يتعلّق الأمر، بشكل واضح من خلال السياق، بمستويات القطوع.

٢٧ـ ص. ٤٢٩، س. ٩: تكون النقاط $\overline{\text{م}}$، $\overline{\text{ن}}$ وَ $\overline{\text{ف}}$ متسامتة إذا كان $\overline{\text{مف}}$ // $\overline{\text{هد}}$، وهي ليست متسامتة في الحالة العامّة.

٢٨ـ ص. ٤٣٤، س. ٧: انظر التعليق الإضافيّ.

٢٩ـ ص. ٤٣٥، س. ١١:وفقاً للقضية ١٢ من المقالة السادسة من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

٣٠ـ ص. ٤٣٦، س. ١١: يتعلَق الأمر بالقضية ٤٧ من نشرة هايبرغ، أي لصياغة أوطوقيوس.

٣١ـ ص. ٤٣٦، س. ١٧: انظر الشرح الرياضيّ

٣٢ـ ص. ٤٣٦، س. ٢٢: انظر التعليق الإضافيّ.

٣٣ـ ص. ٤٥٠، س. ١٦: يُستبدل المربَّعان المنحرفان بمثلّثين لهما رأس مُشترَك وهو نقطة التماسّ.

٣٤ـ ص. ٤٥٠، س. ١٨: انظر التعليق الإضافيّ.

٣٥ـ ص. ٤٥٢، س. ٢ـ٣: انظر التعليق الإضافيّ.

٣٦ـ ص. ٤٥٥: لا يوجد الشكل، الوارد على هذه الصفحة، في المخطوطة.

٣٧ـ ص. ٤٥٧، س. ١٥: انظر التعليق الإضافيّ.

٣٨ـ ص. ٤٦٢: لا يوجد الشكل، الوارد على هذه الصفحة، في المخطوطة.

٣٩ـ ص. ٤٦٨، س. ٢: انظر التعليق الإضافيّ.

٤٠ـ ص. ٤٦٩، س. ٢٠: انظر التعليق الإضافيّ.

٤١ـ ص. ٤٧١، س. ٢: انظر التعليق الإضافيّ.

هـ ـ " في مساحة القطع المكافئ" لإبراهيم بن سنان

١ـ ص. ٤٩٩، س. ٣: نقرأ على هامش المخطوطة: كان أبو إسحاق إبراهيم بن سنان بن ثابت عمل هذا الكتاب قديماً، ثمَّ ذكر أنّه ضاع منه، فعمل كتابا آخر وذكر هذه النسخة في صدر المقالة التي أعادها."

٢ـ ص. ٥٠٤، س. ١٢: القضية ١٧ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٣ـ ص. ٥٠٥، س. ٩: لا يُبيِّن ابن سنان في هذه الكتابة أنَّ النقطتين ت وَ ث تتطابقان في نقطة واحدة هي وسط م ل. وهو يُرفق بالنقطتين ت وَ ث النقطتين ش وَ ر على هـ ح. وهو يفصل، عندئذ، كلّ واحد من المثلّثين ا ب ح وجـ د ط وكلّ واحد من المضلّعين ا ب ي ح ق و جـ د م ط ل إلى قسمين ليطبِّق نتيجة القضية ١.

٤ـ ص. ٥٠٥، س. ١٦: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٥ـ ص. ٥٠٥، س. ١٦: نحن نعلم أنَّ: د ز = ز جـ.

٦ـ ص. ٥٠٥، س. ٢٢: انظر الملاحظة السابقة.

٧ـ ص. ٥٠٨، س. ٥: الواضح من البناء هو أنَّ للنقطتين ط وَ ح خطّي ترتيب متساويين: دجـ/2 وَ دب/2؛ فيكون لهما نفس الإحداثية الأولى، فيكون ش = ق. ويجب أن يكون معنا، من جهة أخرى، ل = كـ ، لأنَّ ا هي وسط الخطّ الذي تحت خطّ التماسّ.

٨ـ ص. ٥٠٨، س. ٨: القضية ١٧ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس(خطّ التماسّ في الرأس).

٩ـ ص. ٥٠٨، س. ١٠: القضيتين ٣٣ و ٣٥ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس(الخطّ الذي يكون تحت خطّ التماسّ).

١٠ـ ص. ٥٠٨، س. ٨: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

و ـ " في مساحة قطع المخروط المكافئ" لإبراهيم بن سنان

١ـ ص. ٥١٢، س. ١٤: نجد في المخطوطات الثلاث شكلاً مع قطعين مكافئين مختلفين؛ والاستدلال صالح لقطعتين من نفس القطع المكافئ.

٢ـ ص. ٥١٤، س. ٥: هذه نتيجة للقضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس، وهي القضية التي يُذكّر بصيغتها ابن سنان في الفقرة التالية.

٣ـ ص. ٥١٥، س. ٩: القضية ٢٠ من المقالة الأولى من "مخروطات" أبلونيوس.

٤ـ ص. ٥١٧، س. ٢: يكون جـط إذاً خطّ التماسّ في جـ على القطع المكافئ.

٥ـ ص. ٥١٨، س. ١: يتعلّق الأمر بقطعتين ذواتي قاعدتين متوازيتين.

ز ـ "من شرح للمقالة الأولى من المجسطي" لأبي جعفر الخازن

١ـ ص. ٥٧١، س. ١٠: المقصود هو السطح الجانبيّ.

٢ـ ص. ٥٧١، س. ١٠: إنَّ توالي الفقرات في النصّ غير منطقيّ، إذ يجب أن توضع الفقرة التي تبدأ بِ "ويتبيَّن من ذلك أنَّ..." قبل الفقرة التي تسبقها والتي تكرَّس لدراسة الحجم. والفقرة التي تبدأ بِ "ومن أجل ذلك..." تفترض وجود فقرة أخرى مكرَّسة للكرة المحاطة بهرم مثلّثي، قبل المرور إلى حالة الهرم الاختياريّ (انظر المقدِّمة ٨، المثلّث والدائرة المحاطة، المضلّع المحيط بدائرة).

٣ـ ص. ٥٧٢، س. ١١: هذا يفرض أنَّ الأسطوانة قائمة.

٤ـ ص. ٥٧٣، س. ١١-١٢: هذا يفرض أنَّ المسدَّس المحيط بِ ابجد هو داخل الدائرة حطل. وإذا لم يُحقّق المسدَّس هذا الشرط، نحن نعرف كيف نجد مضلّعاً مناسباً يُحقّق هذا الشرط. وذلك أنّنا إذا استخدمنا القضية ١٦ من المقالة الثانية عشرة من "أصول" أقليدس"، نحصل على مضلّع P_n محاط بالدائرة حطل بحيث لا يكون له نقطة مشتركة مع الدائرة ابجد. ليكن a_n الخطّ العامد لهذا المضلّع (أي العمود الذي يخرج من مركز المضلّع إلى أحد أضلاعه) وليكن r نصف قطر الدائرة ابجد. تكون عندئذ صورة المضلّع P_n، في التحاكي ($\frac{r}{a_n}$ ، هـ) مضلّعاً يحقّق الشروط المطلوبة.

٥ـ ص. ٥٧٥، س. ١٢: إنّه المنشور.

٦ـ ص. ٥٧٧، س. ١: انظر القضيّة السابقة.

٧ـ ص. ٥٧٧، س. ٦: تبرهن القضيّة ١ من المقالة الثانية عشرة من "الأصول" أنَّ المضلّعات المتشابهة المحاطة بالدوائر هي فيما بينها مثل مربّعات الأقطار. ويُمكن أن نُبرهن، بطريقة مشابهة لطريقة أقليدس، هذه الخاصّة نفسها للمضلّعات المتشابهة المحيطة بالدوائر.

٨ـ ص. ٥٨١، س. ١٠: هذان المثلّثان هما: $\overline{\text{ز ع ب}}$ وَ $\overline{\text{س ح ب}}$.

٩ـ ص. ٥٨٢، س. ١: "أصغر منه": أي أصغر من أربعة أمثال دائرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$.

١٠ـ ص. ٥٨٢، س. ٤: يبدو، من الجملة الأولى في صيغة القضية، أنَ المؤلّف يتناول، كما فعل في القضية السابقة، مجسَّماً مُوَلّداً انطلاقاً من مضلّع متساوي الأضلاع محيط بالدائرة $\overline{\text{ل م ن}}$ ومحاط بالدائرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$. مسألة وجود هذا المضلّع مطروحة. إذا كان نصف قطر $\overline{\text{ل م ن}}$ وَ R نصف قطر $\overline{\text{ا ب جـ د}}$، وإذا كان n عدد أضلاع المضلّع يكون معنا $r = R\cos(\frac{\pi}{n})$. إذا كان r وَ R معلومين، لا نحصل في الحالة العامّة على عدد n صحيح.(إذا كان $r = \frac{R}{2}$، يكون $n = 3$؛ وإذا كان $r = \frac{R\sqrt{3}}{2}$، يكون $n = 6$). ولكن يكفي هنا أن يكون المضلّع، المحيط بالدائرة $\overline{\text{ل م ن}}$، داخل الدائرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$ (انظر الملاحظة ٤). يكون المجسّم عندئذ مماسّاً للكرة $\overline{\text{ل م ن}}$، وهذا ما يقوله المؤلّف، كما يكون داخل الكرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$.

١١ـ ص. ٥٨٢، س. ٨: انظر الملاحظة ٩.

١٢ـ ص. ٥٨٢، س. ٩: قد يكون هذا المجسّم إمّا مماسّاً للكرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$ وداخل الكرة $\overline{\text{ق ر ش}}$، وإمّا محاطاً بالكرة $\overline{\text{ق ر ش}}$ وبدون نقاط مشتركة مع الكرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$.

١٣ـ ص. ٥٨٣، س. ٩-١٠: هذه الدوائر هي تلك التي تمرُّ بالنقطتين $\overline{\text{ب}}$ وَ $\overline{\text{د}}$ مع استثناء الدائرة $\overline{\text{ا ب جـ د}}$.

١٤ـ ص. ٥٨٤، س. ١: هذه القواعد هي التي لها الرأس $\overline{\text{ب}}$ أو $\overline{\text{د}}$.

١٥ـ ص. ٥٨٤، س. ٣: انظر الشرح الريّاضيّ.

ح ـ " في استخراج مساحة المجسَّم المكافئ" لأبي سهل القوهي

١ـ ص. ٦٠٧، س. ١٠: تشير المخطوطة [ب]، بالإضافة إلى ذلك، إلى مركز الثقل لقطعة من قطع زائد.

٢ـ ص. ٦١٢، س. ١: تحتوي الورقة ١٢٧ و، للمخطوطة [ا]، فقط على الأشكال الثلاثة الواردة على الصفحة ٦١٠.

٣ـ ص. ٦١٤، س. ٢: تحتوي الورقة ١٢٨ و، للمخطوطة [ا]، فقط على الأشكال الثلاثة الواردة على الصفحة ٦١٣.

٤ـ ص. ٦١٥، س. ١١-١٢: أي المثلّثات المنحنية.

ط ـ من كتاب الاستكمال

١ـ ص. ٧٦٠، س. ٤: انظر الشرح الرياضيّ.

٢ـ ص. ٧٦٠، س. ٥: متجانسين: من نفس النوع.

٣ـ ص. ٧٦١، س. ٨: انظر الشرح الرياضيّ: نحصل على هذه المتساوية للقطع المكافئ استناداً إلى القضية ٢٠ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس، وللقطع الناقص أو الزائد استناداً إلى القضية ٢١ من المقالة الأولى من نفس الكتاب.

٤ـ ص. ٧٦١، س. ١٢: مُثنّاة: مضروبة.

٥ـ ص. ٧٦٢، س. ١٤: انظر القضية ٣٥ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

٦ـ ص. ٧٦٢، س. ١٦: انظر القضية ٣٦ من المقالة الأولى من كتاب "المخروطات" لأبلونيوس.

٧ـ ص. ٧٦٢، س. ١٨: انظر الشرح الرياضيّ.

٨ـ ص. ٧٦٣: لا يوجَد في المخطوطة سوى شكل واحد.

٩ـ ص. ٧٦٤، س. ١ـ٢: انظر الشرح الرياضيّ.

١٠ـ ص. ٧٧٦، س. ١٢: انظر الشرح.

المراجع

١- المخطوطات

١-١ مخطوطات النصوص

ابن أبي جرّادة

"تحرير كتاب قطوع الأسطوانة وبسيطها لثابت بن قرّة"

القاهرة، دار الكُتُب، رياضة ٤١، الأوراق ٣٦ظ-٦٤ظ [*Q*].

ابن السمح

مقطع لابن السَّمْح في الأسطوانة وقطوعها المستوية:

Ma'amar ba-iṣṭewanot we-ha-meḥuddadim

مخطوطة أكسفورد، مكتبة بودليان(*Bodleian Library, Hunt. 96*)، الأوراق:

٥٣و-٤٦ظ.

ابن سنان إبراهيم

"في مساحة قِطع المخروط المكافئ"

لندن، المكتب الهندي ٤٦١(*Loth 767*)، الأوراق ١٩٣- ١٩٧ [*L*]

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق: ١٣٤ظ-١٣٦و[*B*]

باتنا، خودا بخش ٢٥١٩، الأوراق: ١٣٢و-١٣٤ظ[*Kh*].

"في مساحة القِطع المكافئ"

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٢ظ-١٨٦ظ [*Q*].

دمشق، الظاهريّة، ٥٦٤٨، الأوراق ١٥٩-١٦٥ [*D*].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٧٦ظ-٧٩و [*A*].

ابن هود

"كتاب الاستكمال"

كوبنهاغن: المكتبة الملكية، *Or. 82*، الأوراق :٥٠و-٥٠ظ،١٠٠ظ-١٠٢ظ [*C*]

لايد: *Leyde, Or. 123-a* ، الأوراق :٧ظ-١١و

بنو موسى

"كتاب معرفة مساحة الأشكال البسيطة والكرُيّة" (القضيّتان ١٢ و ١٨)، الجامعة العثمانية حيدر أباد، ٩٩٢، الأوراق ٥١و-٥٢ظ

بنو موسى (تحرير الطوسي)

"كتاب معرفة مساحات الأشكال البسيطة والكرُيّة"

برلين: *Berlin, Staatsbibliothek, or. quart. 1867/13*،الأوراق ١٥٦ظ-١٦٤ظ [*B*]

كراكوفيا: *Cracovie, Biblioteka Jagiellonska*، الأوراق ١٨٣ظ-١٩٤ظ [*Y*]

إسطنبول، عاطف ١٤/١٧١٢، الأوراق ٩٧ظ-١٠٤ظ [*A*]

إسطنبول، بشير آغا ١٤/٤٤٠، الأوراق ١٦٢ظ-١٧١ظ [*X*]

إسطنبول، جار اللـه ٣/١٤٧٥، الأوراق ١ظ-١٤ظ (الأوراق غير مرقّمة) [*L*]

إسطنبول، جار اللـه ١٥٠٢، الأوراق ٤٢ظ-٤٧ظ [*C*]

إسطنبول، حاجي سليم آغا ٧٤٣، الأوراق ٧١ظ-٨١ظ [*W*]

إسطنبول، كوبرولو(*Köprülü*) ١٤/٩٣٠، الأوراق ٢١٤ظ-٢٢٧و(أو ٢١٥ظ - ٢٢٨ و، وفقاً لترقيم آخر) [*K*]

إسطنبول، كوبرولو(*Köprülü*) ١٤/٩٣١، الأوراق ١٢٩و-١٣٦ظ [*P*]

إسطنبول، السليمانية، أيا صوفيا ٢٧٦٠، الأوراق ١٧٧و-١٨٣ظ [*V*]

إسطنبول، السليمانية، أسعد أفندي (*Esad Effendi*) ٢٠٣٤، الأوراق ٤ظ-١٥ظ [*S*]

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٣/٣٤٥٣، الأوراق ١٤٨و-١٥٢ظ [*D*]

إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٥/٣٤٥٦، الأوراق ٦١ظ-٦٤ظ [*E*]

القاهرة، دار الكتب، رياضة ٤١، الأوراق ٢٦ظ-٣٣ظ [*Q*]

لندن، المكتب الهندي ٣/٨٢٤(رقم ١٠٤٣)، الأوراق ٣٦و-٣٩و، ٥٠و-٥٢ظ[*G*]،

نُشِرت في: *Manchester, John Rylands University Library 350.*

مَشـَهد، أستان قدس (*Astan Quds*) ٥٥٩٨، الأوراق ١٨-٣٣[*M*]

نيويورك، جامعة كولومبيا، بلمبتون ١٣/٣٠٦(*Plimpton Or 306/13*)، الأوراق

١١٦و-١٢٢ ظ [*N*]

أكسفورد، مكتبة بودليان مارش ٨/٧٠٩(*Bodleian Library, Marsh 709/8*)،

الأوراق ٧٨و-٨٩ظ[*O*]

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٦٧، الأوراق ٥٨ظ-٦٨و[*J*]

طهران، مجلس شورى ٣/٢٠٩، الأوراق ٣٣- ٥٤[*R*]

طهران، مجلس شورى ٣٩١٩، الأوراق ٢٧٢-٢٩٨[*T*]

طهران، دنيشكا ١٣/٢٤٣٢، الأوراق ١٢٣-١٣٧ (١٤٤ظ-١٥١ظ حسب ترقيم آخر) [*U*]

طهران، ملـّي ملك ٣١٧٩، الأوراق ٢٥٦ظ-٢٦١ظ، ٢٦٤و-٢٦٧ظ[I].

طهران، سِبَهسالار ٢٩١٣، الأوراق٨٦ظ-٨٩ظ[*H*].

فينـّا: *Nationalbibliothek, Mixt 1209/13*، الأوراق ١٦٣ظ-١٧٣و[*F*].

ثابت بن قرّة

"في مساحة قِطع المخروط الذي يسمّى المكافئ"

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٦ظ-٣٦ظ [*A*].

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٦٥ظ-١٨١و[*Q*].

مَشهد، أستان قدس (*Astan Quds*) ٥٥٩٣، الأوراق ٢٦-٤٢[*M*].

باريس، المكتبة الوطنية ٨/٤٨٢١، الأوراق: ١٢٢ظ-١٣٤ظ [*B*].

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٦٥ظ-١٨١و [*Q*].

"في مساحة المجسّمات المكافئة"

باريس، المكتبة الوطنية ٢٤٥٧، الأوراق: ١١٠ظ-١١٣و

"في قطوع الاسطوانة وبسيطها"

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٤و-٢٦و.

الخازن أبو جعفر

"من شرح للمقالة الأولى من المجِسطي"

باريس، المكتبة الوطنية ٨/٤٨٢١، الأوراق: ٤٧ظ-٦٨ظ

القوهي

"في استخراج مساحة المجسّم المكافئ"

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٤٠، الأوراق ١٨٧ظ-١٩٠ظ [*Q*].

دمشق، الظاهريّة، ٥٦٤٨، الأوراق ١٦٦و-١٧١و [*D*].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٢٥ظ-١٢٩و [*A*].

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٠، الأوراق ١٦١ظ-١٦٥و [*A*].

"في مساحة المجسّم المكافئ"

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٢/٤١، الأوراق ١٣٥ظ-١٣٧ظ.

١-٢ مخطوطات أخرى تمّ الاطّلاع عليها من أجل التحليل والتعليقات الإضافيّة

أبلونيوس

"المخروطات"، طهران، مِللي مَلِك ٨٦٧.

ابن هود

"كتاب الاستكمال"،

كوبنهاغن: المكتبة الملكية، Or. 82، ١٢٨ ورقة.

لايد، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or. 123-a* ، ٨٠ ورقة.

ابن وحشيّة

"الفلاحة النبطيّة"، إسطنبول، توبكابي سراي، أحمد الثالث ١٩٨٩.

أرشميدس

"كتاب الكرة والاسطوانة"، إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، الأوراق ٩ظ-٤٩و.

"كتاب في مساحة الدائرة"، إسطنبول، فاتح ٣٤١٤، الأوراق ٢ظ-٦ظ.

بطلميوس

"المجسطي"، لايد، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or.* ، ٢٢٠ ورقة.

بنو موسى

"مقدّمة كتاب المخروطات"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ٢٢٣ظ-٢٢٦ظ (= II/32، ٧١ظ-٧٤ظ).

"قول في تثليث الزاوية المستقيمة الخطّين" (المنسوب إلى أحمد)،

أكسفورد، مكتبة بودليان مارش ۲۰۷ (*Bodleian Library, Marsh 207*)، الورقة ۱۳۱ظ ؛ وأيضاً مارش ۷۲۰ الورقة ۲٦۰ظ.

ثابت بن قرّة

"كتاب في أنـّه إذا وقع خط مستقيم على خطّين مستقيمين ..."،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨۳۲، الأوراق ٥۱و-٥۲و.

إسطنبول، جار اللـه ۱٥۰۲، الأوراق ۱۳ظ-۱٤و.

باريس، المكتبة الوطنية ۲٤٥۷، الأوراق ۱٥٦و-۱٥۹و.

"في مساحة الأشكال المسطّحة والمجسّمة"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨۳۲، الأوراق ٤۱ظ-٤٤ظ.

مقطع يعالج الأعداد المتحابّة (ورد في مستهَلّ المخطوطة: نريد أن نجد عددين متحابّين)،

القاهرة، دار الكتُب، رياضة ٤۰، الأوراق ۳٦و-۳۷ظ ودمشق، الظاهريّة، ٥٦٤٨ (ذكره ابن هود في "الاستكمال").

حيدرأباد، الجامعة العثمانية ۹۹۲، الأوراق ۲۹٥و-۲۹۷و.

(ذكره المؤلّف مجهول الهويّة استناداً إلى من "كتاب الاستكمال").

الخازن

"مختصر مستخرج من كتاب المخروطات"،

أكسفورد، مكتبة بودليان هونتنجتن ۲۳۷ (*Bodleian Library, Huntington 237*)، الأوراق ۸۲و – ۱۰٤ظ.

الجزائر، المكتبة الوطنية ١٤٤٦،الأوراق ١٢٦ظ – ١٥٣و.

"تفسير صدر المقالة العاشرة من كتاب أقليدس"،

إسطنبول، فايز اللـه، ٦/١٣٥٩، الأوراق ٢٤٥و- ٢٥٢و.

تونس، المكتبة الوطنية ١٦١٦٧، الأوراق ٦٥ظ - ٧٢و.

السجزي

"في رسم القطوع المخروطيّة"، لايد (Leyde) مكتبة الجامعة الأوراق ،

Or 168(1) ١-١٢٢.

السموأل

"في كشف عُوار المنجّمين"، لايد، مكتبة الجامعة، *Leyde, Or.98*.

الكندي

"في الصناعة العظمى"،

إسطنبول، أيا صوفيا ٢/٤٨٣٠، الأوراق ٥٣و-٨٠ظ.

القوهي

"رسالة في استخراج ضلع المسبّع المتساوي الأضلاع"،

باريس، المكتبة الوطنية ٤٨٢١، الأوراق ١-٨.

إسطنبول، أيا صوفيا ٤٨٣٢، الأوراق ١٤٥ظ-١٤٧ظ.

لندن، المكتب الهندي ٤٦١، الأوراق: ١٨٢-١٨٩.

مؤلِّف مجهول الهويّة

شرح "أصول" أقليدس، حيدرأباد، الجامعة العثمانية ٩٩٢.

٢ـ كتب ومقالات

أبلونيوس:

Les coniques d'Apollonius de Perge, Œuvres traduites par Paul Ver Eecke (Paris, 1959).

Apollonius Pergaeus, éd. J.L Heiberg (Stuttgart, 1974).

Les Coniques, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par Roshdi Rashed, Berlin / New York, Walter de Gruyter; tome 1.1: *Livre I*, 2008; tome 3: *Livre V*, 2008; tome 2.2: *Livre IV*, 2009; tome 4: *Livres VI et VII*, 2009; tome 2.1: *Livres II et III*, 2010.

La section des droites selon des rapports, commentaire historique et mathématique, édition et traduction du texte arabe par Roshdi Rashed et Hélène Bellosta, Scientia Graeco-Arabica, vol. 2, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2009.

ابن الأبّار

"التكملة لكتاب الصلة"، تحقيق السيّد عزّت العطّار الحسيني (القاهرة، ١٩٥٥)، المجلّد الأوّل؛

Complementum libri Assilah, éd. F. Codera et Zaydin, 2 vol. (Madrid, 1887-1889).

"الحلّة السِّيَراء"، تحقيق حسين مونس (القاهرة، دون تأريخ)، المجلّد الثاني.

ابن أبي أصيبعة، "عيون الأنباء في طبقات الأطبّاء"، تحقيق أ. مولـّر (A. Müller)، ٣ مجلّدات (القاهرة / Königsberg، ١٨٨٢-٨٤)؛ تحقيق ن. رضا (بيروت، ١٩٦٥).

ابن الأثير، "الكامل في التاريخ"، حقّقه كـ. ج. تومبرغ (C.J. Tomberg) تحت عنوان *Ibn-El-Athiri Chronicon quod perfectissimum inscribitur*، ١٢ مجلّداً، (لايدن Leiden، ١٨٥١-٧١)؛ إعادة الطباعة ١٣ مجلّداً (بيروت، ١٩٦٥-٦٧).

ابن أكنين، "طب النفوس الأليمة"، حقّقه وترجمه إلى الألمانيّة م. غودمان (M. Güdemann)،
Das jüdische Unterrichtswesen während der spanisch-arabischen Periode
طبعة أولى فينّا ١٨٧٣، طبعة ثانية ١٩٦٨ **ابن باجَّة**، "رسائل فلسفيّة لأبي بكر ابن باجَّة"، تحقيق جمال الدين العلوي (بيروت، ١٩٨٣).

ابن تغري بردي، "النجوم الزاهرة في ملوك مصر والقاهرة"، قدّم له وشرحه محمّد حسين شمس الدين، المجلّد الرابع (بيروت، ١٩٩٢).**ابن الجوزي**، "المنتظم في تاريخ الملوك والأمم"، ١٠ مجلّدات (حيدر أباد، ١٣٥٧-٥٨/١٩٣٨-٤٠)، المجلّد السادس.

ابن جلجل، "طبقات الأطباء والحكماء"، تحقيق ف. سيّد، منشورات المعهد الفرنسي للآثار الشرقيّة في القاهرة. النصوص والترجمات لمؤلّفين شرقيّين، ١٠ (القاهرة، ١٩٥٥).

ابن حيدور، "التمحيص في شرح التلخيص"، حقّقه وحلّله ر. راشد ضمن:
«Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire», *Journal for the History of Arabic Sciences*, 6. 1-2 (1982), ص. ٢٠٩-٢٧٨.

ابن خُرداذبِه، "المسالك والممالك"، تحقيق م, ج. غوج (*M. J. de Goeje*)، Bibliotheca Geographorum Arabicorum VI (لايدن Leiden، ١٨٨٩؛ أعيد طبعه في بغداد، بدون تاريخ).

ابن خلّكان، "وفيات الأعيان"، تحقيق إحسان عبّاس، ٨ مجلّدات (بيروت، ١٩٧٨)، المجلّد الأوّل.

ابن الخطيب

"الإحاطة في أخبار غرناطة"، تحقيق محمّد عبد اللـه عنان (القاهرة، ١٩٥٥).

"كتاب أعمال الأعلام" (*Histoire de l'Espagne Musulmane*)، نصٌّ عربي منشور مع مقدّمة وملحق لـِ إ. ليفي- بروفنسال (E. Lévi-Provençal) (بيروت،١٩٥٦).

ابن سنان، إبراهيم

"رسائل ابن سنان"، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، ثلاثة مجلّدات،(حيدرأباد، ١٩٤٨). انظر أيضاً ر. راشد وهيلين بالوستا

ابن كثير، "البداية والنهاية"، نشرة بولاق، ١٤ مجلّداً (بيروت، ١٩٧٨).

ابن العبري، "تاريخ مختصر الدول"، تحقيق أ. صالحاني، الطبعة الأولى (بيروت، ١٨٩٠؛ طبعة ثانية ١٩٥٨).

"تاريخ الزمان"، ترجمه إلى العربيّة إسحق أرملة (بيروت، ١٩٩١).

ابن عراق، "تصحيح زيج الصفائح"، ضمن "رسائل متفرّقة في الهيئة" (حيدر أباد، ١٩٤٨).

ابن العماد، "شذرات الذهب في أخبار من ذهب"، نشرة بولاق، ٨ مجلّدات (القاهرة، ١٣٥٠-٥١ للهجرة)، (أي سنة ١٩٣١-١٩٣٢ للميلاد)، المجلّد الثاني.

ابن وحشيّة، "الفلاحة النبطيّة"، تحقيق توفيق فهد، المجلّد الأوّل (دمشق، ١٩٩٣).

بابّوس:

Pappus d'Alexandrie, *La Collection Mathématique*, trad. P. Ver Eecke (Paris / Bruges, 1933).

أرشميدس:

Archimède, *De la sphère et du cylindre / Sur les conoïdes et les sphéroïdes*,

تحقيق وترجمة شارل موغلر (Charles Mugler) إلى الفرنسية، ضمن:

Collection des Universités de France (Paris, 1970), t. I.

الأكفاني، "إرشاد القاصد إلى أسنى المقاصد"، ضمن:

J. Witkam, De egyptische Arts lbn al-Akfānī (Leiden, 1989).

أنبوبا عادل (Anbouba A.)،

«Construction of the Regular Heptagon by Middle Eastern Geometers of the Fourth (Hijra) Century», *Journal for the History of Arabic Science*, 1.2 (1977), pp. 352-384.

«Construction de l'heptagone régulier par les Arabes au 4e siècle de l'hégire», *Journal for the History of Arabic Science*, 2.2 (1978), pp. 264-269.

«L'algèbre arabe aux IXe et Xe siècles: Aperçu général», *Journal for the History of Arabic Science*, 2 (1978), pp. 66-100.

أهلواردت و. :

W. Ahlwardt, *Handschriften der Königlichen Bibliothek zu Berlin XVII*, Arabische Handschriften 5 (Berlin, 1893).

بنو موسى، "كتاب الحيل" (*The Book of Ingenious Devices*)، تحقيق أحمد ي. الحسن (حلب، ١٩٨١).

برغغرين ج. ل. :

J. L. Berggren, «The correspondence of Abū Sahl al-Kūhī and Abū Isḥāq al-Ṣābī: A translation with commentaries», *Journal for the History of Arabic Science*, 7.1-2 (1983), pp. 39-124.

بروكلمان ك. :

C. Brockelmann, *Geschichte der arabischen Litteratur*,

الطبعة الأولى (لايدن *Leiden*، ١٩٣٧) ؛ الطبعة الثانية (لايدن، ١٩٤٣).

بيسّل ـ هاغن إ. وَ سبايس أ.:

E. Bessel-Hagen, **O. Spies**, «*Thābit b. Qurra's Abhandlung über einen halbregelmässigen Vierzehnflächner*», Quellen und Studien zur Geschichte der Math. und Phys., B. 1 (Berlin,1932), pp. 186-198.

البيهقي، "تاريخ حكماء الإسلام"، تحقيق م. كرد علي (دمشق،١٩٤٦).

البيروني

"الآثار الباقية عن القرون الخالية"، *Chronologie orientalischer Völker*، تحقيق كـ. إ. ساشو *C.E. Sachau*.(*Leipzig*, 1923)

"الرسائل المتفرّقة في الهيئة للمتقدّمين ومعاصري البيروني"، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، (حيدرأباد، ١٩٤٧).

"كتاب تحديد نهايات الأماكن لتصحيح مسافات المساكن"، حقّقه ب. بولغاكوف (P. Bulgakov) وراجعه إمام إبراهيم أحمد، في "مجلّة معهد المخطوطات"، ٨، الكرّاس ١-٢ (أيّار- تشرين الثاني). ترجمه إلى الإنكليزيّة جميل علي:

The Determination of the Coordinates of Positions for the Correction of Distances between Cities، (بيروت، ١٩٦٧).

"القانون المسعودي"، ثلاثة مجلّدات، نشرة مكتب المنشورات الشرقية العثمانية، (حيدرأباد، ١٩٥٤-١٩٥٦).

بيورنبو أ.:

A. Björnbo, «Thābits Werk über den Transversalensatz». *Abhandlungen zur Geschichte der Naturwissenschaften und der Medizin*, 7 (1924).

بوخنر ف.:

F. Buchner, «*Die Schrift über den Qarastûn von Thabit b. Qurra*», Sitzungsberichte der physikalisch-medizinischen Sozietät in Erlangen, Bd 52-53 (1920/21), pp. 141-188.

التوحيدي

"مثالب الوزيرين الصاحب ابن عبّاد وابن العميد"، تحقيق محمّد الطنجي (بيروت، ١٩٩١).

"كتاب الإمتاع والمؤانسة"، تحقيق أحمد أمين وأحمد الزين (أعيدت طباعته، بولاق، بدون تاريخ).

تيسّامي ي. إ. :

Y. E. Tessami, *Catalogue des manuscrits persans et arabes de la Bibliothèque du Madjless, Publications de la Bibliothèque (Téhéran, 1933), vol. II.*

الخطيب البغدادي، "تـاريخ بغـداد"، تحقيـق محمّـد أمـين الخـانجي، ١٤ مجلـّداً (القـاهرة، ١٩٣١)؛ أعيـدت طباعتـه مـع نشـر مجلـّد للفهـارس: "فهـارس تـاريخ بغـداد للخطيـب البغدادي" (بيروت، ١٩٨٦).

الخيّام، "أعمال الخيّام الجبرية" (*L'œuvre algébrique d'al-Khayyām*)، تحقيق وترجمة وتحليل ر. راشد و أ. جبّار (حلب، ١٩٨١).

الدبّاغ ج.، "بنو موسى"، ضمن:

Dictionory of Scientific Biography, vol. I (New York, 1970),

ص. ٤٤٣-٤٤٦

الدبّاغ ج. و **روزنفلد ب. (B. Rosenfeld)**، Matematitcheskie traktaty (بالروسيّة)، Coll. Nautchnoie Nasledstvo, t. 8 (Moscou,1984).

دولد ـ سمبلونيوس:

Y. Dold-Samplonius

«*Die Konstruktion des regelmässigen Siebenecks», Janus, 50, 4 (1963), pp. 227-249*.

«*AI-Khāzin*», Dictionary of Scientific Biography, vol. VII (New York, 1973),

ص. ٣٣٤-٣٣٥.

«*Al-Qūhī*», *Dictionary of Scientific Biography*, vol. XI (1975),

ص. ٢٣٩-٢٤١.

الدمرداش أ. س. ، «ويجن رستم الكوهي وحجم المجسّم المكافئ»، "رسالة العلم"، ٤ (١٩٦٦)، ص. ١٨٢-١٩٥.

دوري أ. أ. :

A. A. Duri, «Baghdād», *Encyclopédie de l'Islam*, 2e éd. (Leiden, 1960), t. I, pp. 921-936.

الذهبي، "تاريخ الإسلام"، (السنوات ٢٨١-٢٩٠)، تحقيق عمر عبد السلام تدمري (بيروت، ١٩٨٩-١٩٩٣).

ر. راشد:

«*L'induction mathématique: al-Karajï- as-Samaw'al*, Archive for the History of Exact Sciences, 9, 1 (1972), pp. 1-21;

أعيد نشره ضمن:

Entre arithmétique et algèbre: *Recherches sur l'histoire des mathématiques arabes* (Paris, 1984), pp. 71-91.

«*La mathématisation des doctrines informes dans la science sociale*», in *La mathématisation des doctrines informes, sous la direction de G. Canguilhem (Paris, 1972), pp. 73-105.*

«*L'analyse diophantienne au Xe siècle: l'exemple d'al-Khāzin*», Revue d'histoire des sciences, 32 (1979), pp. 193-222.

«*Matériaux pour l'histoire des nombres amiables et de l'analyse combinatoire*», *Journal for the History of Arabic Science*, 6*, no 1 & 2 (19*

« Sharaf al-Dīn al-Tūsī, *Œuvres mathématiques*: *Algèbre et géométrie au XIIe siècle*», 2 vol. (Paris, 1986).

«*Ibn al-Haytham et les nombres parfaits»*; *Historia Mathematica*, 16 (1989), pp. 343-352.

«*Problems of the transmission of Greek scientific thought into Arabic:*

examples from mathematics and optics», History of Science, 27 (1989), pp. 199-209;

أعيد نشره ضمن:

Optique et mathématiques: *Recherches sur l'histoire de la pensée scientifique en arabe*, Variorum CS388 (Aldershot, 1992), I.

«*La philosophie mathématique d'Ibn al-Haytham. I: L'analyse et la synthèse*», *M.I.D.E.O.*, 20 (1991), pp. 31-231.

«*AI-Kindī's Commentary on Archimedes' 'The measurement of the Circle'* », Arabic Sciences and Philosophy, 3.1 (1993), pp. 7-53.

Géométrie et dioptrique au X^e siècle. *Ibn Sahl*, *al-Qūhī et Ibn al-Haytham* (Paris, 1993) ; English version : *Geometry and Dioptrics in Classical Islam*, London, al-Furqān, 2005.

'Al-Qūhī vs. Aristotle: On motion', Arabic Sciences and Philosophy 9.1, 1999, pp. 7–24.

الرياضيات التحليلية، المجلّد الثاني، ابن الهيثم، (بيروت، ٢٠١١).

انظر أيضاً الخيّام.

Œuvre mathématique d'al-Sijzī. Volume I: *Géométrie des coniques et théorie des nombres au Xe siècle*, Les Cahiers du Mideo, 3, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

'Thābit et l'art de la mesure', in R. Rashed (ed.), *Thābit ibn Qurra. Science and Philosophy in Ninth-Century Baghdad*, Scientia Graeco-Arabica, vol. 4, Berlin / New York, Walter de Gruyter, 2009, pp. 173–209.

R. Rashed - H. Bellosta, *Ibrāhīm ibn Sinān. Logique et géométrie au Xe siècle*, Leiden, Brill, 2000.

R. Rashed - B. Vahabzadeh, *Al-Khayyām mathématicien*, Paris, Librairie Blanchard, 1999; English version (without the Arabic texts): *Omar*

Khayyam. The Mathematician, Persian Heritage Series n° 40, New York, Bibliotheca Persica Press, 2000.

R. Rashed - Ch. Houzel, *Recherche et enseignement des mathématiques au IXe siècle.*

Le Recueil de propositions géométriques de Na'īm ibn Mūsā, Les Cahiers du Mideo, 2, Louvain-Paris, Éditions Peeters, 2004.

روزنفلد ب. أ. وَ غريغوريان أ. :

B. A. Rosenfeld et **A. T. Grigorian**, «Thābit ibn Qurra», *Dictionary of Scienrific Biography*, vol. XIII (1976), pp. 288-295.

انظر أيضاً الدبّاغ.

روم أ:

A. Rome, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste*, texte établi et annoté, t.II: *Théon d'Alexandrie, Commentaire sur les livres 1 et 2 de l'Almageste* (Vatican, 1936).

سامسو ج. :

J. Samsò, «*AI-Khāzin*», *Encyclopédie de l'Islam*, 2[e] *éd. (Leiden, 1978), t. IV pp. 1215-1216.*

سايلي أ:

A. Sayili, *The Observatory in Islam and its Place in the General History of the Observatory*, 2[e] éd (Ankara, 1988).

السجستاني، "منتخب صوان الحكمة")، نصٌّ عربي، تقديم وتعليقات د. م. دنلوب:

The Muntakhab ⊲iwān al-ħikmah Introduction and Indices edited by D.M. Dunlop (The Hague / Paris / New York, 1979).

سزكين ف. :

F. Sezgin, *Geschichte des arabischen Schrifttums*, B. V (Leiden, 1974) et B. VI (Ieiden, 1978).

سعيدان أ.

"رسائل البيروني وابن سنان" (*Rasā'il of al-Bīrūnī and Ibn Sinān*)، "الثقافة الإسلاميّة" (*Islamic Culture*)، ٣٤، (١٩٦٠)، الصفحات ١٧٣-١٧٥.

"أعمال إبراهيم بن سنان"، (الكويت ١٩٨٣).

سوتر هـ. :

H. Suter

Die Mathematiker und Astronomen der Araber und ihre Werke (Leipzig, 1900).

«*Über die Geometrie der Söhne des Mûsâ ben Schâkir*», *Bibliotheca Mathematica*, 3 (1902), pp. 259-272.

«Über die Ausmessung der Parabel von Thâbit b. Kurra al-Ḥarrânî», *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Societät in Erlangen*, 48 (1916), pp. 65-86.

«Die Abhandlungen Thâbit b. Kurras und Abû Sahl al-Kûhîs über die Ausmessung der Paraboloide», *Sitzungsberichte der Physikalisch-medizinischen Societät in Erlangen*, 49 (1917), pp. 186-227. Trad. russe J. al-Dabbagh et B. Rosenfeld, *Matematitcheskie traktaty*, pp. l57-l96.

«Abhandlung über die Ausmessung der Parabel von Ibrāhīm b. Sinān b. Thābit», in *Vierteljahresschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, Herausgegeben von Hans Schinz, 63 (1918), pp. 214-228.

سيرينوس أنطينوي:

Serenus d'Antinoë, *Sereni Antinoensis Opuscula*. Edidit et latine interpretatus est I. L. Heiberg (Leipzig, 1896).

ترجم هذا الكتاب إلى الفرنسية ب. فير إيك:

P. Ver Eecke, *SERENUS D'ANTINOË*: *Le livre de la section du cylindre et le livre de la section du cône* (Paris, 1969).

سيسن ر.، أ وَ إزغي ك. وَ جميل أكبينار :

R. Şeşen, **C. Izgi**, **Cemil Akpinar**, *Catalogue of manuscripts in the Köprülü Library*, Research Centre for Islamic History, Art and Culture, 3 vol. (Istanbul, 1986).

شاشت ج. وَ مايرهوف م. :

J. Schacht et **M. Meyerhof**, *The Medico-Philosophical Controversy between Ibn Butlan of Baghdad and Ibn Ridwan of Cairo*. *A Contribution to the History of Greek Learning Among the Arabs*, Faculty of Arts n° 13 (Le Caire, 1937).

شتاينشنايدر م. :

M. Steinschneider

«Thabit ("Thebit") ben Korra. Bibliographische Notiz», Zeitschrift für Mathematik u. Physik, XVIII, 4 (1873), pp.331-338.

«Die Söhne des Musa ben Schakir», Bibliotheca Mathematica, 1(1887), pp. 44-48, 71-76.

Die hebraeischen Übersetzungen des Mittelalters und die Juden als Dolmetscher (Berlin, 1893; reprod. Graz, 1956).

Die arabische Literatur der Juden (Frankfurt, !902; reprod. Hildesheim / Zürich / New York, 1986).

الشهرزوري، "تاريخ الحكماء، نزهة الأرواح وروضة الأفراح"، تحقيق عبد الكريم أبو شويرب (طرابلس- ليبيا، ١٩٨٨).

صاعد الأندلسي، "طبقات الأمم"، تحقيق هـ. بو علوان (بيروت، ١٩٨٥). ترجمة ر. بلاشير (*R. Blachère*)، *Livre des Catégories des Nations* (باريس، ١٩٣٥).

الصفدي، "الـوافي بالوفيـات"، ٢٤ مجلـّداً (١٩٣١-١٩٩٣)؛ المجلـّد العاشـر، تحقيـق علـي عمارة و جاكلين سوبليه (Jacqueline Sublet) (فيسبادن Wiesbaden، ١٩٨٠).

صليبا ج.:

G. Saliba :*Risālat Ibrāhīm ibn Sinān ibn Thābit ibn Qurra fī al-Ma'ānī allatī istakhrajahā fī al-handasa wa al-nujūm*», *Studia Arabica & Islamica*, Festschrift for Iħsān 'Abbās, ed. Wadād al-Qāḍī, American University of Beirut (1981), pp. 195-203.

«Early Arabic critique of ptolemaic cosmology: A ninth-eentury text on the motion of the celestial spheres», Journal for the History of Astronomy, 25 (1994), pp. 115-141.

الطبري، "تاريخ الرسل والملوك"، تحقيق محمّد أبو الفضل إبراهيم (القاهرة، ١٩٦٧)، المجلـّد التاسع.

العتبي

"شـرح اليمينـي المسـمّى بـالفتح الـوهبي علـى تـاريخ أبـي نصـر العتبـي للشـيخ المنينـي" (القاهرة ١٢٨٦/١٨٧٠)، المجلـّد الأوّل.

غاربرز ك. :

K. Garbers, *Ein Werk Thābit b. Qurra's über ebene Sonnenuhren*, Dissertation (Hamburg / Göttingen, 1936).

غرين ت. م. :

T. M. Green, *The City of the Moon God* (Leiden, 1992).

فاجدا ج. :

G. Vajda

«Quelques notes sur le fonds de manuscrits arabes de la Bibliothèque nationale de Paris», Rivista degli Studi Orientali, 25 (1950).

Index général des manuscrits arabes musulmans de la Bibliothèque nationale de Paris, Publications de l'Institut de recherche et d'histoire des textes IV (Paris, 1953)

فايدمان إ. :

E. Wiedemann

«*Die Schrift über den Qaras‿ūn*», *Bibliotheca Mathematica*, 123 (1911-12), pp. 21-39.

«*Über Thābit ben Qurra, sein Leben und Wirken*», in *Aufsätze zur arabischen Wissenschafts-Geschichte* (Hildesheim, 1970), vol. II.

فورهوف ب. :

P. Voorhoeve, *Codices Manuscripti VII. Handlist of Arabic Manuscripts in the Library of the University of Leiden and Other Collections in the Netherlands*, 2e éd. (The Hague / Boston / London, 1980).

القفطي، "تأريخ الحكماء"، تحقيق جوليوس ليبّرت (Julius Lippert)،

(Leipzig، ١٩٠٣).

كراولسكي د. :

D. Krawulsky, *Īrān - Das Reich der Īlẖāne. Eine topographisch-historische Studie* (Wiesbaden, 1978).

كرمودي ف. ج.:

F. J. Carmody, *The Astronomical Works of Thābit b. Qurra* (Berkeley/ Los Angeles, 1960).

كلاجيت م. :

M. Clagett, *Archimedes in 1he Middle Ages*, vol. I: *The Arabo-Latin Tradition* (Madison, 1964); vol. V: *Quasi-Archimedean Geometry in the Thirteenth Century* (Philadelphia, 1984).

كنورّ و. ر. :

W. R. Knorr

«*Ancient sciences of the medieval tradition of mechanics*», in Supplemento agli Annali dell'Istituto e Museo di Storia della Scienza, Fasc. 2 (Florence, 1982).

«*The medieval tradition of a Greek mathematical lemma*», Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenshaften, 3 (1986), pp. 230-264.

Textual Studies in Ancient and Medieval Geometry (Boston, Basel, Berlin, 1989), pp. 267-275.

كورتز م. :

M. Curtze, «*Verba Filiorum Moysi, Filii Sekir, id est Maumeti, Hameti et Hasen. Der Liber trium fratrum de Geometria, nach der Lesart des Codex Basileenis F. II. 33 mit Einleitung und Commentar*», Nova Acta der Ksl. Leop.-Carol. Deutschen Akademie der Naturförscher, vol. 49 (Halle, 1885), pp. 109-167.

كولسون د.:

D. Chwolson, *Die Ssabier und der Ssabismus*, vol. I (St. Petersburg 1856; repr. Amsterdam, 1965).

لانغرمان ت. :

T. Langermann, «*The mathematical writings of Maïmonides*», The Jewish Quarterly Review, LXXV, n° 1 (July 1984), pp. 57-65.

لو بارون دي سلان م. :

M. Le Baron de Slane, *Catalogue des manuscrits arabes de la Bibliothèque Nationale (Paris, 1883-1895).*

لوت أ. :

O. Loth, *A catalogue of the Arabic Manuscripts in the Library of the India Office* (London, 1877).

لورش ر. :

R. Lorch, «*Abū Ja‘far al-Khāzin on isoperimetry and the Archimedian tradition*», Zeitschrift für Geschichte der arabisch-islamischen Wissenschaften, 3 (1986), pp. 150-229.

المراكشي، "المعجِب في تلخيص أخبار المغرب"، تحقيق م. س. العريان و م. العربي، الطبعة السابعة (الدار البيضاء، ١٩٧٨).

المسعودي

"التنبيه والإشراف"، تحقيق *M.J. de Goeje*، *Bibliotheca Geographorum Arabicorum VIII* (*Leiden*، ١٨٩٤).

"مروج الذهب"، تحقيق ك. باربييه دو ماينار (*C. Barbier de Meynard*) و م. بافيه دو كورتاي (*M. Pavet de Courteille*)، أعاد القراءة وصحّح شارل بيلاّ (Charles Pellat)، منشورات الجامعة اللبنانيّة ، فرع الدراسات التاريخيّة XI (بيروت، ١٩٦٦)، المجلّد الثاني.

معاني أ. غ. (*A. G. Ma‘ānī*)، "فهرست كتب خطّي كتابخانه أستان قدس" (*Fihrist kutub khattī Kitābkhāna Astān Quds*) (مشهد، ١٩٧٢/١٣٥٠)، المجلّد الثامن.

المقـَّري، "نفح الطيب من غصن الأندلس الرطيب"، تحقيق إحسان عبّاس، ٨ مجلّدات (بيروت، ١٩٦٨)، المجلّد الأوّل.

مولوي عبد الحميد:

Maulavi Abdul Hamid, *Catalogue of the Arabic and Persian Manuscripts in the Oriental Public Library at Bonkipore*, volume XXII (Arabic MSS) Science (Patna, 1937).

R. Morelon: voir Thābit ibn Qurra

النديم، "كتاب الفهرست"، تحقيق ر. تجدّد (طهران، ١٩٧١).

C. Nallino, *Arabian Astronomy*, *its History during the Medieral Times*, [Conférences en arabe à l'université égyptienne] (Rome, 1911).

نصير عبد المجيد ، "رسالة في مساحة المجسّم المكافئ"، "مجلّة معهد المخطوطات العربيّة" (*Revue de l'Institut des manuscrits arabes*)، ٢٩، ١ (١٩٨٥)، الصفحات ١٨٧-٢٠٨.

النويري، "نهاية الأرب في فنون الأدب"، ٣١ مجلّداً (القاهرة، ١٩٢٣-٩٣)، المجلّد الثاني.

لوقا فاليريو:

Luca Valerio, *De Cenno Gravitatis Salidorum Libri Tres* (Bologne, 1661)

هايبرغ ج. ل. :

J.L. Heiberg, *Claudii Ptolemaei opera quae exstant omnia. I Syntaxis mathematica* (Leipzig, 1898).

هوجنديجك ج. ب. :

J.P. Hogendijk

«*Discovery of an 11 th-century geometrical compilation: The Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd, King of Saragossa*». Historia Mathematica, (1986), pp. 43-52.

«*The geometrical parts of the Istikmāl of Yūsuf al-Mu'taman ibn Hūd (ll th century). An analytical table of contents*», Archives internationales d'histoire des sciences, 41.127 (1991), pp. 207-281.

هيث ث. :

Th. Heath, *The Thirteen Books of Eudid's Elements*, 3 vol. (Cambridge, 1926; reprod. Dover, 1956).

ويبكه ف. :

F. Woepcke, *«Recherches sur plusieurs ouvrages de Léonard de Pise»,* Atti Nuovi Lincei, 14 (1861), pp. 301-324.

ياقوت، "كتاب إرشاد الأريب إلى معرفة الأديب (معجم الأدباء)"، حقّقه مرغوليوث د. س. *D.S. Margoliouth*، المجلّد السابع (لندن، ١٩٢٦).

فهرس الأسماء

- ب -

فهرس المصطلحات

ـ ب ـ

ـ ت ـ

- ج -

ـ ذ ـ

ـ ر ـ

- ف -

- ق -

ـ ك ـ

ـ ل ـ

- م -

هذا الكتاب

لقد صدر للأستاذ رشدي راشد، باللغة الفرنسية، خمسة مجلدات، غاية في الضخامة، وتحت عنوان واحد: **الرياضيات التحليلية بين القرن الثالث والقرن الخامس للهجرة** (بين القرنين التاسع والحادي عشر الميلادي).

وقد كرَّس المؤلِّف هذا **المجلَّد الأول** للبحث في رياضيات اللامتناهيات في الصغر، منذ بداية نشأة هذا الحقل المعرفي وحتى عشية إنجاز هذا التكوّن؛ أي للمؤسّسين لهذا التقليد في الرياضيات التحليلية؛ فاحتوى هذا المجلّد تحقيقاً وشرحاً للنصوص المكتوبة بين النصف الثاني من القرن التاسع ونهاية القرن العاشر الميلادي، وهي نصوص تعود إلى بني موسى، وثابت بن قرّة، وابراهيم بن سنان، والخازن، والقوهي، وابن السَّمْح، إضافة إلى فصلٍ عن ابن هود، وهو خَلَفٌ لابن الهيثم وشارح له ولابن سنان.

وتبقى **الترجمة العربية** لهذه المجلدات الخمسة، محافظةً، حتى درجة عالية من المسؤولية والحِرَفية، على ما جاء في النص الأصلي (باللغة الفرنسية). وهو جهد جليل للمؤلِّف والمترجمين وفريق العمل العلمي والتقني.

وهو إنجاز تراثي كبير يقدِّمه **مركز دراسات الوحدة العربية**، بالتعاون مع **مدينة الملك عبد العزيز للعلوم والتقنية**، إلى القارئ العربي.

مركز دراسات الوحدة العربية

بناية «بيت النهضة»، شارع البصرة، ص. ب: ٦٠٠١ ـ ١١٣
الحمراء ـ بيروت ٢٠٣٤ ٢٤٠٧ ـ لبنان
تلفون: ٧٥٠٠٨٤ ـ ٧٥٠٠٨٥ ـ ٧٥٠٠٨٦ ـ ٧٥٠٠٨٧ (٩٦١١+)
برقياً: «مرعربي» ـ بيروت
فاكس: ٧٥٠٠٨٨ (٩٦١١+)
e-mail: info@caus.org.lb
Web site: http://www.caus.org.lb

الثمن للمجموعة الكاملة
للأفراد: ١٠٠ دولار أو ما يعادلها
للمؤسسات: ١٥٠ دولاراً أو ما يعادلها

ISBN 978-9953-82-373-7